УДК 517.5

В. А. Родин

О мажорантных операторах сильного суммирования рядов Фурье

Для операторов, являющихся мажорантами для сильных средних рядов Фурье по тригонометрической системе и системе Уолша, установлены неравенства слабого типа (1,1).

Для операторів, що є мажорантами для сильних середніх рядів Фур'є по тригонометричній системі і системі Уолша, встановлені нерівності слабкого типу (1,1).

1. Пусть $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и f — суммируемая на G функция, $\tilde{f}$ — сопряженная с f, а $S_k(f)$, $\tilde{S}_k(f)$ — частные суммы ряда Фурье по тригонометрической системе. Известно [1, с. 275], что для $p < \infty$ почти везде на G справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} |S_k(f, x) - f(x)|^p + |\tilde{S}_k(f, x) - \tilde{f}(x)|^p = o(n) \tag{1}$$

$n \to \infty$. Сильное суммирование (1) естественным образом связано с мажорантными операторами

$$(H_p f)(x) = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |S_k(f, x)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$(\tilde{H}_p f)(x) = \sup_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\tilde{S}_k(f, x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Операторы (1), (2) удобно представить в другом виде. Пусть $\varkappa_e$ — характеристическая функция множества $e \subset [0, 1]$:

$$\varkappa_e(t) = \begin{cases} 1, & t \in e; \\ 0, & t \in [0, 1] \setminus e, \end{cases}$$

и $\Delta_n^k = [k/n, (k+1)/n)$, $k = 0, \ldots, n-1$. Определим ступенчатые функции

$$\begin{aligned} S(f; x, t; n, N) &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{k+N}(f, x)\, \varkappa_{\Delta_n^k}(t), \\ \tilde{S}(f; x, t; n, N) &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{S}_{k+N}(f, x)\, \varkappa_{\Delta_n^k}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда операторы (1), (2) примут вид

$$(H_p f)(x) = \sup_{n \geqslant 1} \| S(f; x, t; n, 0) \|_{L_p},$$

$$(\tilde{H}_p f)(x) = \sup_{n \geqslant 1} \| \tilde{S}(f; x, t; n, 0) \|_{L_p}.$$

Пусть BMO — непериодический аналог пространства функций ограниченной средней осцилляции, банахово пространство всех $f \in L_1$ с нормой

$$\| f \|_{\mathrm{BMO}} = \mathfrak{N}(f) + \left| \int_0^1 f(x)\, dx \right|.$$

Здесь

$$\mathfrak{N}(f) = \sup (| f(x) - (f)_I |)_I < \infty,$$

где $(g)_I = |I|^{-1} \int_I g(s)\, ds$ и sup берется по всем интервалам $I \subset [0, 1]$ [2, с 195].

Теорема 1. *Операторы*

$$(Bf)(x) = \sup_{n \geqslant 0} \| S(f; x, t; 2^n, 0) \|_{\mathrm{BMO}},$$

$$(\tilde{B}f)(x) = \sup_{n \geqslant 0} \| \tilde{S}(f; x, t; 2^n, 0) \|_{\mathrm{BMO}}$$

имеют слабый тип (1, 1).

Наиболее трудная, качественная часть теоремы 1, а именно, что

$$\sup_{n \geqslant 0} \| S(f; x, t; 2^n, 0) \|_{\mathrm{BMO}} < \infty, \quad \sup_{n \geqslant 0} \| \tilde{S}(f; x, t; 2^n, 0) \|_{\mathrm{BMO}} < \infty$$

почти всюду на $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, установлена в работе [3]. Дальнейшие рассуждения опираются на теорему Стейна [4] и специальное представление нормы в BMO [5, с. 273].

Обозначим через L_M пространство Орлича с M-функцией $\exp|u| - 1$.

Следствие 1. *Операторы*

$$(Uf)(x) = \sup_{n \geqslant 1} \| S(f; x, t; n, 0) \|_{L_M},$$

$$(\tilde{U}f)(x) = \sup_{n \geqslant 1} \| \tilde{S}(f; x, t; n, 0) \|_{L_M}$$

имеют слабый тип (1,1).

Заметим, что в силу неравенства Джона—Ниренберга [2, с. 210] справедливо вложение ВМО $\subset L_M$ и $\| g \|_{L_M} \leqslant c \| g \|_{\text{BMO}}$, c — абсолютная константа. Применяя это неравенство и учитывая, что пространство L_M — идеальная структура, получаем сформулированное выше утверждение об операторах U и $\tilde{U}$ как следствие теоремы 1. Так как $L_M \subset L_p$ для любого конечного p, то справедливо такое следствие.

Следствие 2. *Операторы H_p и $\tilde{H}_p$ имеют слабый тип* (1,1).

2. Пусть $G = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}_k(2)$, где $\mathbb{Z}_k(2)$ — циклическая группа порядка 2.

Система Уолша—Пели является распространенной нумерацией системы характеров группы G. Пусть $S_k(f, x)$ — частные суммы ряда Фурье по системе Уолша—Пели в формулах (3) для $f \in L_1(G)$.

Теорема 2. *Оператор*

$$(Kf)(x) = \sup_{n, m \geqslant 0} \| S(f; x, t; 2^n, 2^m) \|_{\text{BMO}}$$

имеет слабый тип (1, 1).

Следствие 3. *Оператор*

$$(Wf)(x) = \sup_{n, m \geqslant 0} \| S(f; x, t; 2^n . 2^m) \|_{L_M},$$

а также операторы U и H_p, имеют слабый тип (1, 1).

Заметим [6], что для системы Уолша в нумерации Пели для почти всех $x \in G$ справедливо неравенство

$$\sup_{m \geqslant 0} | S_{2m}(f, x) | < \infty. \tag{4}$$

В работе [7] показано, что для почти всех $x \in G$

$$\sup_{n \geqslant 0} \| S(f; x, t; 2^n, 0) \|_{\text{BMO}} < \infty. \tag{5}$$

С помощью (4) и (5) утверждение теоремы 2 устанавливается так же, как и теорема 1.

3. Результаты пп. 1, 2 позволяют получить следующие утверждения о сильной суммируемости рядов Фурье.

Теорема 3. а). *Если $G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $f \in L_1(G)$ и $S_k(f, x)$ — частные суммы по тригонометрической системе, то*

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (S_k(f, x) - f(x)) \varkappa_{\Delta_n^k}(t) \right\|_{L_M} = 0 \tag{6}$$

п. в. на G;

б). *Если $G = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_k(2)$. $f \in L_1(G)$, а $S_k(f, x)$ — частные суммы по системе Уолша — Пели, то п. в. на G справедливо* (6).

Замечание. Пункт а) теоремы 3 является усилением p-сильной суммируемости и в качестве гипотезы был высказан В. Тотиком [8].

После представления статьи в редакцию автору стало известно, что в работе Л. Д. Гоголадзе «О сильной суммируемости почти всюду» (Мат. сб.— 1988.— **135**. — № 2.— С. 158—168) отличными от приведенных методами установлена справедливость п. а) теоремы 3.

1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.— Т. 1, 2.
2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды.— М. : Наука, 1984.— 495 с.
3. *Родин В. А.* Применение пространства ВМО для изучения E-сильных средних рядов Фурье по тригонометрической системе.— Воронеж, 1988.— 31 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1320-В88.
4. *Stein E. M.* On limits of sequences of operators // Ann. Math.— 1961.— **74**, N 1.— P. 140—170.
5. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции.— М. : Мир, 1984.— 427 с.

Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша.— М. : Наука, 1987.— 344 с.
. *Родин В. А.* Пространство ВМО и сильные средние рядов Фурье — Уолша.— Воронеж, 1988.— 29 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 1319-В887.
8. *Осколков К. И.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР — 1984.— **172**.— С. 280—190.

Воронеж. политехн. ин-т

Получено 16.03.88