УДК 517.95

П. Я. Пукач, асп. (Львов. ун-т)

О ЗАДАЧЕ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Some classes are indicated, for which a solution of a problem without initial conditions for a certain nonlinear degenerating parabolic system exists and is unique. The uniqueness conditions are established both in the case where restrictions are imposed on the behavior of the solutions as $t \to -\infty$ and in the case where they are not imposed. The existence is proved for an arbitrary behavior of the right-hand side of the system as $t \to -\infty$.

Вказано деякі класи існування та єдиності розв'язку задачі без початкових умов для однієї нелінійної параболічної системи, що вироджується. Одержано умови єдиності при наявності та відсутності обмежень на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$. Існування доведено при довільній поведінці при $t \to -\infty$ правої частини системи.

Задача без начальных условий для нелинейных уравнений и систем параболического типа рассматривались в работах [1 – 4] и др. В [4], в частности, показано, что эта задача для некоторых нелинейных параболических уравнений имеет не более одного решения в классе функций с произвольным поведением при $t \to -\infty$. В настоящей работе указаны некоторые классы существования и единственности решения задачи без начальных условий для одной нелинейной вырождающейся параболической системы.

В цилиндрической области Q рассмотрим следующую задачу:

$$\Phi(t)u_t + A(u) + C(x,t)u = F(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Относительно Q предполагаем следующее: $Q = \Omega \times S$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega \in C^2$, $S = (-\infty, T)$, $T \le +\infty$, $\Gamma = \partial\Omega \times S$ — боковая поверхность Q. Отметим, однако, что полученные ниже результаты единственности для задачи (1), (2) остаются верными и в случае нецилиндрической области, принадлежащей классу $B(n,T)$ [4].

Без ограничения общности считаем далее, что $T = 0$.

Будем также предполагать выполнение условий:

1^0. $\Phi(t) = \operatorname{diag}[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)]$ — диагональная матрица размерности m; $\varphi_i(t): \overline{S} \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемые на $\overline{S}$ функции, $i = \overline{1, m}$; $\varphi_i(t) > 0$ на S, $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi_i(t) = 0$; $\varphi(t)|\xi|^2 \le (\Phi\xi, \xi) \le \varphi_0(t)|\xi|^2$ для произвольного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\varphi(t) \in C^\infty(\overline{S})$, $\varphi_0(t) \in C^\infty(\overline{S})$, $\varphi(t) > 0$ на S, $\varphi_0(t) > 0$ на S, $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \varphi_0(t) = 0$.

2^0. $C(x,t)$ — квадратная действительнозначная матрица размерности m такая, что $(C\xi, \xi) \ge c(t)|\xi|^2$, $c(t) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, — произвольный вектор; $2\inf\limits_{S} c(t) \ge \sup\limits_{Q} \|\Phi'(t)\|$.

Относительно нелинейного оператора A предполагаем: $A: V^m \to (V^*)^m$, где $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > 2$,

$$A(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\omega_0(x, |\nabla u|^{p-1})|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \omega_1(x)|u|^{p-2}u,$$

$$u = (u_1, \ldots, u_m).$$

Будем считать, что функции ω_0 и ω_1 удовлетворяют некоторым условиям, обеспечивающим хеминепрерывность и монотонность оператора A (см., например, [5]). Кроме того:

3^0. $$\int_{\Omega_t} < A(v_1) - A(v_2),\ v_1 - v_2 > dx \geq h(t)\|v_1 - v_2\|^p_{V^m}$$

для любых $v_1, v_2 \in V^m$, где

$$h(t) \in L^1_{\mathrm{loc}}((-\infty, 0]), \quad h(t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{h(t)}{\varphi_0^{p/2}(t)}\, dt = +\infty.$$

Введем далее одно функциональное весовое пространство. Обозначим

$$Z_{\varphi,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) = \Big\{ u_1, \ldots, u_m \,\Big|\, \int_{\Omega_t} \varphi(t)|u|^2 dx < +\infty,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} |u|^p dxdt < +\infty, \quad \int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dxdt < +\infty$$

для любых конечных τ_1, τ_2 таких, что $-\infty < \tau_1 < \tau_2 \leq 0$; $u = 0$ на $\Gamma\}$. Пространство $Z_{\varphi,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ банахово относительно стандартной нормы весовых соболевских пространств, в нем плотно множество $c_0^\infty(Q)$.

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *назовем функцию* $u \in Z_{\varphi,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int_Q [(\Phi u_t, \psi) + (A(u), \psi) + (Cu, \psi) - (F, \psi)]\, dxdt = 0 \tag{3}$$

для всех $\psi \in c_0^\infty(Q)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $1^0 - 3^0$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет не более одного обобщенного решения.*

Доказательство проводится по следующей схеме. Предположив, что $w = u^1 - u^2$, где u^1, u^2 — два обобщенных решения задачи (1), (2), получим из (3)

$$\int_Q [(\Phi w_t, \psi) + (A(u^1) - A(u^2), \psi) + (Cw, \psi)]\, dxdt = 0.$$

Из этого равенства, рассматриваемого только для $\psi \in c_0^\infty(Q\tau_1, \tau_2)$ и сужений w на Q_{τ_1, τ_2} (τ_1, τ_2 — произвольные числа, $-\infty < \tau_1 < \tau_2 \leq 0$), получим

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (\Phi w, w)\, dx + 2\int_\Omega < A(u^1) - A(u^2),$$

$$u^1 - u^2 > dx + 2\int_\Omega [(Cw, w) - (\Phi' w, w)/2] dx = 0.$$

После оценок слагаемых последнего равенства приходим к дифференциальному неравенству вида

$$\frac{ds(t)}{dt} + C\,\frac{s^{p/2}(t)}{\varphi_0^{p/2}(t)} \leq 0, \quad C > 0,$$

где $s(t) = \int_\Omega (\Phi w, w)\, dx$. Отсюда вследствие условий теоремы получаем (подобно [4]), что $w \equiv 0$ на $(-\infty, 0)$.

Приведем одну теорему единственности, носящую качественный характер.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *задача* (1), (2) *имеет не более одного решения* $u(x, t)$, *удовлетворяющего условию*

$$\int\limits_{\Omega} (\Phi u, u) dx = o(\varphi(t)) \Lambda^{-1} \left(2 \int\limits_{t}^{0} \frac{h(\tau)}{\varphi_0^{p/2}(\tau)} d\tau \right) \tag{4}$$

при $t \to -\infty$, *где*

$$\Lambda(y) = \int\limits_{1}^{y} \frac{ds}{s^{p/2}}, \quad p > 2.$$

Замечание. Класс единственности, определяемый условием (4), в определенном смысле точный.

Пример. Рассмотрим следующую задачу для скалярного уравнения:

$$-\frac{1}{t} u_t - u_{xx} + u = 0, \tag{5}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \tag{6}$$

Пусть $Q = (0, \pi) \times (-\infty, t_0)$, $t_0 < 0$. Для задачи (5), (6) имеем $p/2 = 1$, $h(t) = 1$, $\Lambda^{-1}(z) = e^z$. Итак, согласно теореме 2 решение задачи (5), (6) единственно в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} = o(1) \exp \left\{ -2 \int\limits_{t}^{0} \tau d\tau \right\} = o(1) e^{t^2}$$

при $t \to -\infty$. С другой стороны, непосредственно убеждаемся, что $u(x, t) = \sin x e^{t^2}$ — нетривиальное решение этой задачи. Поэтому условие (4) точное.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Кроме того:*

а) $\inf\limits_{t \in (-r, r)} h(t) > 0$ *для любых* $r > 0$;

б) $|F| \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $1/p + 1/q = 1$.

Тогда задача (1), (2) *имеет хотя бы одно обобщенное решение. Произвольное обобщенное решение удовлетворяет оценкам*

$$\varphi(t) \| u \|^2_{L^2_m(\Omega)} \le C_1(\overline{h}(t-1, t))^{1/(1-p)} \int\limits_{t-1}^{t} \| F \|^q_{(V^*)^m} d\tau + C_2(\overline{h}(t-1, t))^{2/(2-p)};$$

$$\int\limits_{t}^{t+1} \| u \|^p_{V^m} d\tau \le C_1(\overline{h}(t-1, t+1))^{p/(1-p)} \int\limits_{t-1}^{t+1} \| F \|^q_{(V^*)^m} d\tau + C_2(\overline{h}(t-1, t+1))^{p/(2-p)},$$

где C_1, C_2 — *константы, зависящие от* n, p, Ω; $\overline{h}(t_1, t_2) = \inf\limits_{t \in (t_1, t_2)} h(t)$.

Доказательство теоремы 3 проводится по схеме, подобной использованной в работе [4].

1. *Ильин А. М.* Задача без начальных условий для уравнения Бюргерса // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, вып. 5. – С. 208 – 209.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. *Лавренчук В. П., Матийчук М. И.* Глобальная разрешимость задачи для квазилинейной параболической системы и задача без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 6. – С. 710 – 717.
4. *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3 – 44.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

Получено 06.07.92