УДК 517. 5

О. В. Моторная, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

The asymptotically exact estimate of the best approximations of differentiable functions by algebraic polynomials in the space L_1 is obtained.

Одержана асимптотично точна оцінка найкращих наближень r разів диференційовних функцій алгебраїчними многочленами у просторі L_1.

В пространстве $L_\infty = L_\infty[-1, 1]$ рассмотрим следующие классы функций (полагаем $\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty}$, $\|f\|_1 = \|f\|_{L_1}$): $W_\infty^r = \{f : f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, $\|f^{(r)}\|_\infty \le 1\}$, $r = 1, 2, \ldots$, $H_\infty^n = \{f : \|f\|_\infty \le 1,\ \int_{-1}^{1} t^k f(t)dt = 0,\ k = \overline{0, n}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $W^r H_\infty^n = \{f : f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, $f^{(r)} \in H_\infty^n$, $f^{(k)}(-1) = 0$, $k = \overline{0, r-1}\}$.

Пусть P_n — пространство алгебраических многочленов степени не выше n,

$$E_n(f)_1 = \inf_{p \in P_n} \|f(\cdot) - p(\cdot)\|_1, \quad E_n(W_\infty^r)_1 = \sup_{f \in W_\infty^r} E_n(f)_1.$$

Теорема. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$; $n \ge r - 1$. *Тогда*

$$E_n(W_\infty^r)_1 = \frac{2}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2} + 1\right) \frac{K_{r+1}}{(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right), \tag{1}$$

где $B(x, y)$ — *Эйлеров интеграл* I-*го рода,* K_r — *константы Фавара.*

При доказательстве используется следующий результат [1]:

$$E_n((x-a)_+^{r-1})_1 = \frac{K_r}{(n+1)^r} \left(\sqrt{1-a^2}\right)^r (r-1)! + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^{r-1}}{(n+1)^{r+1}}\right), \tag{2}$$

где $a \in (-1, 1)$; $r = 1, 2, \ldots$; $n \ge r - 1$.

Лемма 1. *Если* $f \in W^r H_\infty^n$, *то для любого промежутка* $[a, b] \subset [-1, 1]$

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \le \frac{K_{r+1}}{(n+1)^{r+1}} \left(\sqrt{1-c^2}\right)^{r+1} + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-c^2}\right)^r}{(n+1)^{r+2}}\right),$$

где $c = \min\{|a|, |b|\}$.

Действительно, если положить $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$, то $F(x) \in W^{r+1} H_\infty^n$, поэтому

$$|F(x)| = \left| \frac{1}{r!} \int_{-1}^{1} F^{(r+1)}(t)(x-t)_+^r dt \right| \le \frac{1}{r!} E_n((x-t)_+^r)_1 =$$

$$= \frac{K_{r+1}}{(n+1)^{r+1}} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r}{(n+1)^{r+2}}\right).$$

Но тогда

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = |F(b)-F(a)| \leq \frac{2K_{r+1}}{(n+1)^{r+1}}\left(\sqrt{1-c^2}\right)^{r+1} + O\left(\frac{\left(\sqrt{1-c^2}\right)^r}{(n+1)^{r+2}}\right).$$

Лемма 2. *Пусть функция* $f \in W^r H_\infty^n$. *Если на концах какого-либо промежутка* $[a, b] \subset [-1, 1]$ *с длиной*

$$(b-a) < \frac{\pi}{n+1}\sqrt{1-c^2}; \tag{3}$$

где $c = \min\{|a|, |b|\}$, *функция* $f(t)$ *обращается в нуль, а внутри этого промежутка знакопостоянна, то*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq 2K_{r+1}\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\left(\frac{\sqrt{1-c^2}}{n+1}\right)^{r-1} + (b-a)^2\frac{\left(\sqrt{1-c^2}\right)^{r-2}}{(n+1)^{r+1}}O(1). \tag{4}$$

Наметим схему доказательства. Пусть $r = 2\nu - 1$ и

$$\Psi_k(t) = -2\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^k B_k\left((t-a)\frac{2\pi}{b-a}\right), \quad k = \overline{1, 2\nu-1},$$

где B_k — функции Бернулли [2, с. 72]; $f_0(t) = (\frac{b-a}{2\pi})^k \varphi_k((t-a)\frac{\pi}{b-a})$, где φ_k — k-й периодический интеграл от $\operatorname{sign}\cos t$. Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(t)\Psi_{2\nu-1}^{(2\nu-1)}(t)dt = \sum_{k=1}^{\nu-1}\Psi_{2k}(a)(f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)) -$$

$$-\int_a^b f^{(2\nu-1)}(t)\Psi_{2\nu-1}(t)dt.$$

Таким образом,

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \sum_{k=1}^{\nu-1}|\Psi_{2k}(a)||f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)| + \int_a^b |\Psi_{2\nu-1}(t)|dt. \tag{5}$$

Применяя последовательно формулу интегрирования по частям к интегралу, стоящему в правой части (5), получаем

$$\int_a^b |\Psi_{2\nu-1}(t)|dt = (-1)^\nu\left[-\sum_{k=1}^{\nu-1}|\Psi_{2\nu-2k}(t)f_{2k}(t)|\,\frac{b}{a}\right] + (-1)^{\nu-1}\int_a^b f_{2\nu-1}(t)dt =$$

$$= (b-a)^2\left[\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^{2\nu-2}\left\{\frac{-1}{2^{2\nu-2}\pi^2}\sum_{k=1}^{\nu-1}K_{2k}2^{2k}|B_{2\nu-2k}(0)| + \frac{2K_{2\nu}}{\pi^2}\right\}\right] \tag{6}$$

(f_{2k} — $2k$-я производная функции f_0).

Из соотношений двойственности [2, с. 40] следует

$$\sup_{f \in W^r H_\infty^n} |f(t)| = E_n\left(\frac{(x-a)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)_1. \tag{7}$$

И теперь из (2), (3) и (7) имеем

$$\sum_{k=1}^{\nu-1}|\Psi_{2k}(a)||f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(b)| <$$

$$< \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \frac{\left(\sqrt{1-c^2}\right)^{2\nu-2}}{(n+1)^{2\nu-2}} \sum_{j=1}^{2\nu-1} \frac{|B_{2\nu-2j}(0)|K_{2j}}{2^{2\nu-2j-2}} +$$

$$+ (b-a)^2 \frac{\left(\sqrt{1-c^2}\right)^{2\nu-3}}{(n+1)^{2\nu-1}} O(1). \tag{8}$$

Учитывая в (6) условие (3), из (5), (6) и (8) получаем неравенство (4).

Случай $r = 2\nu$ рассматривается аналогично.

Доказательство теоремы. Из соотношений двойственности [2, с. 40], справедливых для функции $f \in W_\infty^r$, вытекает следующее равенство:

$$E_n(f)_1 = \sup_{h \in H_\infty^n} (-1)^r \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t) h_r(t) dt,$$

где $h_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \int_{-1}^{t} (t-u)^{r-1} h(u) du$. Таким образом, имеем

$$E_n(W_\infty^r)_1 \le \sup_{h \in H_\infty^n} \| h_r \|_1 = \sup\{ \| h \|_1 : h \in W^r H_\infty^n \}.$$

Для n и r выбираем точки $\pm\theta_n \in (-1, 1)$ так, чтобы

$$\frac{\sqrt{2}}{n^{1/(r+3)}} < \sqrt{1-\theta_n^2} < \frac{2}{n^{1/(r+3)}}. \tag{9}$$

Пусть $f(t) \in W^r H_\infty^n$. Тогда справедливо

$$\int_{-1}^{1} |f(t)| dt = \int_{-\theta_n}^{\theta_n} |f(t)| dt + \int_{-1}^{-\theta_n} |f(t)| dt + \int_{\theta_n}^{1} |f(t)| dt. \tag{10}$$

Из (2), (7) и (9) следует

$$\int_{-1}^{-\theta_n} |f(t)| dt + \int_{\theta_n}^{1} |f(t)| dt = O\left(\frac{1}{n^{r+\frac{r+2}{r+3}}}\right). \tag{11}$$

Пусть t_0 — ближайший нуль $f(t)$ слева к $-\theta_n$, t_* — ближайший нуль справа к θ_n и $t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} = t_*$ — все нули $f(t)$ на $[-t_0, t_*]$; $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Тогда

$$(n+1)\sqrt{1-t_k^2} > (n+1)\sqrt{1-\theta_n^2} > \sqrt{2}\, n^{(r+2)/(r+3)}, \quad k \ne 0, N+1. \tag{12}$$

Рассмотрим промежуток $[0, 1]$. Положим

$$a_k = \frac{1}{\Delta t_k \left(\sqrt{1-t_k^2}\right)^r} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt \right|, \quad a_m = \max_i a_i.$$

Пусть $t_\nu \le 0 < t_{\nu+1}$; $|t_\nu| \le |t_{\nu+1}|$. Тогда

$$\int_{t_\nu}^{\theta_n} |f(t)| dt = \sum_{k=\nu}^{N} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt \right| = \sum_{k=\nu}^{N} a_k \left(\sqrt{1-t_k^2}\right)^r \Delta t_k \le$$

$$\le a_m \sum_{k=\nu}^{N} \left(\sqrt{1-t_k^2}\right)^r \Delta t_k.$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $\Delta t_m \geq \frac{\pi}{n+1}\sqrt{1-t_m^2}$, т. е. $\frac{1}{t_{m+1}-t_m} \leq (n+1)/\pi\sqrt{1-t_m^2}$. Учитывая (12), согласно лемме 1 имеем

$$a_m < \frac{2K_{r+1}}{\pi(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+\frac{r+2}{r+3}}}\right) = \frac{2K_{r+1}}{\pi(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

2. $\Delta t_m < \frac{\pi}{n+1}\sqrt{1-t_m^2}$. Из леммы 2 и (12) следует

$$a_m < \frac{2K_{r+1}}{\pi(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{n^{r+\frac{r+2}{r+3}}}\right) = \frac{2K_{r+1}}{\pi(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Применяя аналогичные рассуждения при рассмотрении промежутка $[-1, 0]$ и учитывая полученные оценки для a_m, из (10), (11) получаем неравенство

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|dt < \frac{2K_{r+1}}{\pi(n+1)^r}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{r/2}dt + o\left(\frac{1}{n^r}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{2}+1\right)\frac{K_{r+1}}{\pi(n+1)^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Для получения оценки снизу рассмотрим введенные В. А. Кофановым [3] сплайны

$$S_{n,r}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{1}(x-t)_+^{r-1}\operatorname{sign}\sin(n+2)\cos t\,dt; \quad S_{n,r} \in W^r H_\infty^n.$$

Оценивая вариацию сплайна $S_{n,r+1}$, получаем оценку

$$\| S_{n,r} \|_1 > \frac{2K_{r+1}}{\pi(n+1)^r}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{r/2}dt + o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Теорема доказана.

Отметим, что для наилучшего приближения $\tilde{E}_n(\tilde{W}_\infty^r)_1$ соответствующего класса $\tilde{W}_\infty^r$ 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в [4] и [5] установлено, что $\tilde{E}_n(\tilde{W}_\infty^r)_1 = 4K_{r+1}/(n+1)^{r+1}$.

Известна также асимптотически точная оценка наилучшего приближения класса W_∞^r алгебраическими многочленами в пространстве $C[-1, 1]$, установленная С. Н. Бернштейном [2, с. 192]:

$$E_n(W_\infty^r)_{C[-1,1]} = K_r n^{-r} + o(n^{-r}).$$

1. *Моторная О. В.* Уточнение одного асимптотического результата С. М. Никольского // Оптимизация методов приближения. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 63 – 69.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
3. *Кофанов В. А.* Приближение классов дифференцируемых функций алгебраическими многочленами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, №5. – С. 1078 – 1090.
4. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 61 – 70.
5. *Туровец С. П.* О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1968. – №5. – С. 417 – 421.

Получено 28. 12. 92