УДК 517.53

М. Н. Шеремета, д-р физ.-мат. наук (Львов. ун-т)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С УБЫВАЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

In the class $S^*_\psi(A)$ of entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n)$ which is defined for a fixed sequence $A = (a_n)$, $0 < a_n \downarrow 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, by the conditions $0 \le \lambda_n \nearrow +\infty$ and $\lambda_n \le \le (\ln^+(1/a_n)) / \psi(\ln(1/a_n))$ imposed on the parameters λ_n, where ψ is a positive continuous function on $[0, +\infty)$, $\psi(x) \uparrow +\infty$, and $x/\psi(x) \uparrow +\infty$ as $x \to +\infty$, the necessary and sufficient conditions are given for the relation $\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F))$ to hold as $\sigma \to +\infty$, where $M(\sigma, F) = \sup\{| F(\sigma + it) |: t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{a_n \exp(\sigma\lambda_n): n \in \mathbb{Z}_+\}$, and φ is a positive continuous function increasing to $+\infty$ on $[0, +\infty)$ for which $\ln \varphi(x)$ is concave, and $\varphi(\ln x)$ is a slowly increasing function.

У класі $S^*_\psi(A)$ цілих рядів Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n)$, який при фіксованій послідовності $A = (a_n)$, $0 < a_n \downarrow 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, визначається умовами $0 \le \lambda_n \nearrow +\infty$ і $\lambda_n \le \le (\ln^+(1/a_n)) / \psi(\ln(1/a_n))$ на показники λ_n, де ψ – додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція, $\psi(x) \uparrow +\infty$ і $x/\psi(x) \uparrow +\infty$ при $x \to +\infty$, вказані необхідна і достатня умови виконання співвідношення $\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F))$ при $\sigma \to +\infty$, де $M(\sigma, F) = \sup\{| F(\sigma + it) |: t \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{a_n \exp(\sigma\lambda_n): n \in \mathbb{Z}_+\}$, а φ – додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $\ln \varphi(x)$ вгнута, а $\varphi(\ln x)$ – повільно зростаюча функція.

1. Пусть $A = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, а ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

целый (абсолютно сходящийся в $\mathbb{C}$). Обозначим

$$M(\sigma, F) = \sup\{| F(\sigma + it) |: t \in \mathbb{R}\},$$

и пусть

$$\mu(\sigma, F) = \max\{| (a_n) \exp(\sigma\lambda_n) |: n \in \mathbb{Z}_+\}$$

— максимальный член ряда (1). Зафиксируем последовательность Λ и допустим, что $0 \le \lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to \infty$. Через L обозначим класс неотрицательных непрерывных возрастающих к $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функций $\psi(x)$ и скажем, что $F \in \in S_\psi(\Lambda)$, если

$$\ln | a_n | \le -\lambda_n \psi(\lambda_n), \quad n \ge n_0.$$

В [1] доказано, что если

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n)), \quad n \to \infty,$$

то для каждой функции $F \in S_\psi(\Lambda)$ выполняется соотношение

$$\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F) \quad \text{при} \quad \sigma \to +\infty.$$

Условие

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n)), \quad n \to \infty,$$

является также и необходимым для выполнимости указанного соотношения в классе $S_\psi(\Lambda)$. Будем рассматривать аналогичную задачу в классе целых рядов Дирихле (1), который при фиксированной последовательности A определяется условиями на показатели λ_n. Относительно последовательности A будем считать, что $0 < a_n \downarrow 0$, $n \to \infty$, и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$. Эти требования естественны, так как в случае, когда $\lambda_n \uparrow +\infty$, $n \to \infty$, для целого ряда Дирихле (1) можно построить [2, с. 180] мажоранту Ньютона

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* \exp(s\lambda_n),$$

коэффициенты a_n^* которой удовлетворяют условиям $0 < a_n^* \downarrow 0$, $n \to \infty$, и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* < +\infty$. При этом

$$\mu(\sigma, F^*) = \mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F) \le M(\sigma, F^*)$$

и, если

$$\varphi(\ln M(\sigma, F^*)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F^*)) \quad \text{при} \quad \sigma \to +\infty$$

для той или иной функции $\varphi \in L$, то

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F)) \quad \text{при} \quad \sigma \to +\infty.$$

Скажем, что $\varphi \in L_{MB}$, если $\varphi \in L$ и $\varphi(2x) \sim \varphi(x)$, $x \to +\infty$, т. е. φ — медленно возрастающая функция, и $\psi \in L^*$, если $\psi \in L$ и $x/\psi(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$. Не умаляя общности, будем считать, что $a_n \le 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$; положим $A_n = \ln(1/a_n)$ и через $S_\psi(A)$ обозначим класс целых рядов Дирихле (1) таких, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_n = +\infty \tag{2}$$

и

$$\lambda_n \le A_n/\psi(A_n), \quad n \ge n_0. \tag{3}$$

Основной в настоящей статье является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in L^*$ *и*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ln n/A_n = h < 1, \tag{4}$$

а функция $\psi \in L$ *такая, что* $\varphi(\ln x) \in L_{MB}$ *и* $\ln \varphi(x)$ *— вогнутая функция. Для того чтобы для каждой функции* $F \in S_\psi^*(A)$ *выполнялось соотношение*

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F)) \quad \textit{при} \quad \sigma \to +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции $\gamma \in L_{MB}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi\big(\ln n + \psi(A_n)\gamma(\psi(A_n))\big)}{\varphi\big(\psi(A_n)\gamma(\psi(A_n))\big)} = 1. \tag{5}$$

2. Докажем достаточность условия (5). Заметим, что $A_n \uparrow +\infty$, $n \to \infty$, и обозначим

$$n^0(\sigma) = \min\{n\colon \psi(A_n) \ge 2\sigma/(1-h)\}.$$

Тогда $n^0(\sigma) \ge n_0$ для всех $\sigma \ge \sigma_0$ и, используя (3) и (4), имеем

$$M(\sigma, F) = F(\sigma) \le \sum_{n=0}^{n^0(\sigma)-1} a_n \exp(\sigma, \lambda_n) + \sum_{n=n^0(\sigma)}^{\infty} \exp\{-A_n + \sigma A_n/\psi(A_n)\} \le$$

$$\le n^0(\sigma)\mu(\sigma, F) + \sum_{n=n^0(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}(1+h)A_n\right\} \le$$

$$\le n^0(\sigma)\mu(\sigma, F) + \sum_{n=n^0(\sigma)}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1+h}{2h}(1+o(1))\ln n\right\} = n^0(\sigma)\mu(\sigma, F) + o(1), \ \sigma \to +\infty.$$

Пусть $n_A(t) = \sum_{A_n \le t} 1$ — считающая функция последовательности (A_n). Поскольку

$$A_{n^0(\sigma)-1} < \psi^{-1}(2\sigma/(1-h)),$$

то

$$n^0(\sigma) - 1 \le n_A(\psi^{-1}(2\sigma/(1-h))).$$

Поэтому в силу условия $\varphi(\ln x) \in L_{MB}$ из приведенной выше оценки вытекает

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \le \varphi(\ln n^0(\sigma) + \ln \mu(\sigma, F) + o(1)) =$$
$$= \varphi(\ln(n^0(\sigma) - 1) + \ln \mu(\sigma, F) + o(1)) \le$$
$$\le (1 + o(1))\varphi(\ln n_A(\psi^{-1}(2\sigma/(1-h))) + \ln \mu(\sigma, F)), \quad \sigma \to +\infty. \tag{6}$$

Из (2) следует, что

$$(1/\sigma)\ln \mu(\sigma, F) \to +\infty, \quad \sigma \to +\infty.$$

Действительно, если бы для некоторой последовательности $(\sigma_k) \uparrow +\infty$, $k \to \infty$, выполнялось неравенство

$$(1/\sigma_k)\ln \mu(\sigma_k, F) \le P < \infty,$$

то для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ мы имели бы неравенство

$$(1/\sigma_k)\ln|a_n| + \lambda_n \le P.$$

Устремляя здесь $k \to \infty$, получаем $\lambda_n \le P$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, что невозможно. Таким образом, существует функция $\gamma_1 \in L_{MB}$ такая, что

$$x/\gamma_1(x) \uparrow +\infty, \quad x \to +\infty,$$

и

$$2\sigma/(1-h) \le \ln \mu(\sigma, F)/\gamma_1(\ln \mu(\sigma, F))$$

для всех $\sigma \ge \sigma_0$. Поэтому из (6) имеем

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \le (1 + o(1))\varphi\left(\ln n_A\left(\psi^{-1}\left(\frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\gamma_1(\ln \mu(\sigma, F))}\right)\right) + \ln \mu(\sigma, F)\right)$$

при $\sigma \to +\infty$. Используя неравенство $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$, покажем, что

$$\varphi\left(\ln n_A\left(\psi^{-1}\left(\frac{x}{\gamma_1(x)}\right)\right) + x\right) \sim \varphi(x), \quad x \to +\infty. \tag{7}$$

Можем считать, что функция $\gamma_1 \in L_{MB}$ непрерывно дифференцируема и

$$x\gamma_1'(x)/\gamma(x) \to 0, \quad x \to +\infty$$

(последнее условие часто используется в качестве определения медленно возрастающей функции). Через β обозначим функцию, обратную к функции $x/\gamma_1(x)$, и будем искать ее в виде $\beta(t) = t\gamma(t)$. Тогда $\gamma(t) \equiv \gamma_1(t\gamma(t))$ и

$$\frac{t\gamma'(t)}{\gamma(t)} \equiv \frac{\gamma_1'(t\gamma(t))t\gamma(t)}{\gamma_1(t\gamma(t))}\left(1 + \frac{t\gamma'(t)}{\gamma(t)}\right),$$

т. е.

$$t\gamma'(t)/\gamma(t) \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Отсюда следует, что γ — медленно изменяющаяся функция и, поскольку

$$\gamma_1(x) \equiv \gamma((x)/\gamma_1(x)) \quad \text{и} \quad \gamma_1 \in L_{MB},$$

то $\gamma(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, так что $\gamma \in L_{MB}$. Таким образом, соотношение (7) можно переписать в виде

$$\varphi(\ln n_A(t) + \psi(t)\gamma(\psi(t))) \sim \varphi(\psi(t)\gamma(\psi(t))), \quad t \to +\infty.$$

Доказательство последнего соотношения проведем от противного. Допустим, что существуют число $p > 0$ и последовательность $(t_k) \uparrow +\infty$, $k \to \infty$, такие, что

$$\varphi(\ln n_A(t_k) + \psi(t_k)\gamma(\psi(t_k))) \geq (1+p)\varphi(\psi(t_k)\gamma(\psi(t_k))).$$

Пусть

$$A_{n_k} \leq t_k < A_{n_k+1}.$$

Так как в силу вогнутости функции $\ln\varphi(x)$ для каждого $p > 0$ функция

$$\varphi^{-1}((1+p)\varphi(x)) - x$$

неубывающая, то отсюда имеем

$$\ln n_k + o(1) = \ln(n_k + 1) = \ln n_A(A_{n_k}) = \ln n_A(t_k) \geq$$

$$\geq \varphi^{-1}((1+p)\varphi(\psi(t_k)\gamma(\psi(t_k))) - \psi(t_k)\gamma(\psi(t_k)) \geq$$

$$\geq \varphi^{-1}((1+p)\varphi(\psi(A_{n_k})\gamma(\psi(A_{n_k}))) - \psi(A_{n_k})\gamma(\psi(A_{n_k})), \quad k \to \infty,$$

т. е. по условию $\varphi(\ln x) \in L_{MB}$ получаем

$$\varphi(\ln n_k + \psi(A_{n_k})\gamma(\psi(A_{n_k}))) \geq (1+p)(1+o(1))\varphi(\psi(A_{n_k})\gamma(\psi(A_{n_k})))$$

при $k \to \infty$, что в силу (5) невозможно. Достаточность условия (5) доказана.

3. Для доказательства необходимости условия (5) нам нужны некоторые вспомогательные результаты. Для произвольной последовательности $(\eta_n)_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел обозначим

$$\kappa_n = \frac{\ln a_n - \ln a_{n+1}}{\eta_{n+1} - \eta_n} = \frac{A_{n+1} - A_n}{\eta_{n+1} - \eta_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

а для функциональной последовательности

$$(a_n \exp\{\sigma\eta_n\})_{n=0}^{\infty}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

через $\mu(\sigma)$ обозначим максимальный член. Тогда [3] если

$$0 \le \varkappa_n \uparrow +\infty, \quad n \to \infty,$$

то

$$\mu(\sigma) = a_n \exp(\sigma\eta_n)$$

для всех $\sigma \in [\varkappa_{n-1}, \varkappa_n]$. Пусть (m_k) и (n_k) — последовательности натуральных чисел такие, что $n_k - m_k \ge 3$ и $0 < m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \ldots$. Положим $\lambda_n = \eta_n$ при $m_k \le n \le n_k$ и $\lambda_n = 0$ при $n < m_1$ и $n_k < n < m_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Очевидным является следующее утверждение.

Лемма 1. *Если ряд Дирихле* (1) *с такими показателями* λ_n *целый, то*

$$\mu(\varkappa_{n-1}, F) = a_n \exp(\varkappa_{n-1}\lambda_n)$$

для всех n, $m_k < n \le n_k$.

Следующая лемма имеет самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть* $\psi \in L^*$, *выполнено условие* (4) *и* $\alpha \in L_{MB}$. *Обозначим* $B_n = A_n / \psi(A_n)$ *и предположим, что возрастающая последовательность* (n_k) *натуральных чисел удовлетворяет для всех* $k \in \mathbb{N}$ *условиям*

$$n_1 \ge 1, \quad n_{k+1} \ge 4n_k, \quad \psi(A_{n_k}) \ge 2\psi(A_{n_{k-1}}), \quad B_{m_k} > B_{n_{k-1}}, \tag{8}$$

где $m_k = [(1/2)n_k]$. *Тогда существуют функция* $F \in S^*_\psi(A)$ *и последовательность*

$$(\sigma_k) \uparrow +\infty, \quad k \to \infty,$$

такие, что

$$\ln \mu(\sigma_k, F) \le \psi(A_{n_k})\alpha(A_{n_k} / \psi(A_{n_k})) \tag{9}$$

и

$$M(\sigma_k, F) \ge \frac{1}{2} n_k \mu(\sigma_k, F). \tag{10}$$

Доказательство. Положим

$$\alpha^*(x) = \frac{2}{3}\begin{cases} \alpha(B_{m_k}), & B_{m_k} \le x \le B_{n_k}, \\ \alpha(x), & B_{n_{k-1}} < x < B_{m_k}. \end{cases}$$

Так как

$$\alpha \in L_{MB} \quad \text{и} \quad \alpha^*(x) \le (2/3)\alpha(x),$$

то

$$\alpha^*(x)/x \to 0, \quad x \to +\infty,$$

и

$$\{B_n - \alpha^*(B_n)\} / B_n \ge \frac{2}{3} \tag{11}$$

для всех достаточно больших n. Для простоты считаем, что (11) выполняется для всех n. Положим

$$\lambda_{n_k} \equiv \frac{1}{2} B_{n_k};$$

$$\kappa_{n_k-1} = 2B_{n_k}\psi\left(A_{n_k}\right)\Big/\left\{B_{n_k} - \alpha^*\left(B_{n_k}\right)\right\}. \tag{12}$$

В силу (8) и (11) имеем

$$\kappa_{n_{k+1}-1} = \frac{2B_{n_{k+1}}\psi\left(A_{n_{k+1}}\right)}{B_{n_{k+1}} - \alpha^*\left(B_{n_{k+1}}\right)} \geq 4\psi\left(A_{n_k}\right) =$$

$$= \frac{2B_{n_k}\psi\left(A_{n_k}\right)}{B_{n_k} - \alpha^*\left(B_{n_k}\right)}\frac{2\left(B_{n_k} - \alpha^*\left(B_{n_k}\right)\right)}{B_{n_k}} \geq \frac{4}{3}\kappa_{n_k-1},$$

т. е.

$$\kappa_{n_k-1}\uparrow +\infty, \quad k \to \infty.$$

Положим, наконец,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda_{n_k} - \left(A_{n_k} - A_n\right)/\kappa_{n_k-1}, & m_k \leq n \leq n_k, \\ 0, & n_{k-1} < n < m_k, \end{cases} \tag{13}$$

и покажем, что ряд (1) с такими показателями задает целую функцию $F \in$ $\in S_\psi^*(A)$. Ясно, что

$$\lambda_{n_k} < B_{n_k} = A_{n_k}\big/\psi\left(A_{n_k}\right).$$

и $\lambda_n < A_n/\psi(A_n)$ при $n_{k-1} < n < m_k$, а при $m_k \leq n \leq n_k$ в силу (11) – (13) имеем

$$\lambda_n = \frac{1}{2}B_{n_k} - \left(A_{n_k} - A_n\right)\left(B_{n_k} - \alpha^*\left(B_{n_k}\right)\right)\Big/2B_{n_k}\psi\left(A_{n_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\alpha^*\left(B_{n_k}\right) + B_n\psi(A_n)\left(B_{n_k} - \alpha^*\left(B_{n_k}\right)\right)\Big/B_{n_k}\psi\left(A_{n_k}\right)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{\alpha^*\left(B_{n_k}\right) + B_n\right\} = \frac{1}{2}B_n\left(1 + \alpha^*(B_n)/B_n\right) \leq \frac{2}{3}B_n < A_n/\psi(A_n),$$

т. е. выполняется условие (3). Поэтому в силу (4) для любого $\sigma \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$a_n \exp(\sigma\lambda_n) \leq \exp\{-A_n + \sigma A_n/\psi(A_n)\} =$$

$$= \exp\{-(1 + o(1))A_n\} = \exp\{(-(1 + o(1))/h)\ln n\}, \quad n \to \infty,$$

т. е. ряд Дирихле (1) с показателями (13) задает целую функцию $F \in S_\psi^*(A)$.

Положим $\kappa_n = \kappa_{n_k-1}$ при $m_k < n \leq n_k$, $\eta_n = \lambda_n$ при $m_k \leq n \leq n_k$, а при $n_{k-1} <$ $< n \leq m_k$ выберем κ_n так, чтобы последовательность (η_n) удовлетворяла условиям леммы 1. Тогда по этой лемме

$$\ln\mu\left(\kappa_{n_k-1}, F\right) = \ln a_{n_k} + \kappa_{n_k-1}\lambda_{n_k} =$$

$$= -A_{n_k} + \frac{B_{n_k}^2\psi\left(A_{n_k}\right)}{B_{n_k} - \alpha^*\left(B_{n_k}\right)} = \frac{B_{n_k}\psi\left(A_{n_k}\right)\alpha^*\left(B_{n_k}\right)}{B_{n_k} - \alpha^*\left(B_{n_k}\right)} \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}\alpha^*\left(B_{n_k}\right)\psi\left(A_{n_k}\right) \leq \psi\left(A_{n_k}\right)\alpha\left(A_{n_k}\big/\psi\left(A_{n_k}\right)\right),$$

а в силу (13)

$$M\left(\kappa_{n_k-1}, F\right) \geq \sum_{n=m_k}^{n_k-1} a_n \exp\left\{\kappa_{n_k-1}\lambda_n\right\} = \sum_{n=m_k}^{n_k-1} a_{n_k} \exp\left\{\kappa_{n_k-1}\lambda_{n_k}\right\} =$$

$$= (n_k - m_k)\mu(\kappa_{n_k-1}) \ge \frac{1}{2} n_k \mu(\kappa_{n_k-1}),$$

т. е. выполняются неравенства (9) и (10) с $\sigma_k = \kappa_{n_k-1}$. Лемма 2 доказана.

Докажем необходимость условия (5) в теореме 1. Допустим, что (5) не выполняется, т. е. существуют функция $\gamma \in L_{MB}$, число $p > 0$ и последовательность

$$(n_k) \uparrow +\infty, \quad k \to \infty,$$

такие, что

$$\ln n_k \ge \varphi^{-1}\Big((1+p)\varphi\Big(\psi(A_{n_k})\gamma\big(\psi(A_{n_k})\big)\Big)\Big) - \psi(A_{n_k})\gamma\big(\psi(A_{n_k})\big).$$

Можем считать, что (n_k) удовлетворяет условиям (8), а функцию $\alpha \in L_{MB}$ выберем так, чтобы

$$\alpha(x/\psi(x)) \le \gamma(\psi(x)).$$

Согласно лемме 2 существуют функция $F \in S_\psi^*(A)$ и последовательность

$$(\sigma_k) \uparrow +\infty, \quad k \to \infty,$$

такие, что в силу условия $\varphi(\ln x) \in L_{MB}$ и неубывания функции

$$\varphi^{-1}((1+p)\varphi(x)) - x$$

имеем

$$\varphi(\ln M(\sigma_k, F)) \ge \varphi(\ln n_k + \ln \mu(\sigma_k, F) - \ln 2) \ge$$

$$\ge (1 + o(1))\varphi\Big(\varphi^{-1}\Big((1+p)\varphi\Big(\psi(A_{n_k})\alpha\big(A_{n_k}/\psi(A_{n_k})\big)\Big)\Big) -$$

$$- \psi(A_{n_k})\alpha\big(A_{n_k}/\psi(A_{n_k})\big) + \ln \mu(\sigma_k, F)\Big) \ge$$

$$\ge (1 + o(1))(1+p)\varphi(\ln \mu(\sigma_k, F)), \quad k \to \infty.$$

Значит, если (5) не выполняется, то существует функция $F \in S_\psi^*(A)$, для которой соотношение

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F)), \quad \sigma \to +\infty,$$

не справедливо. Теорема 1 доказана.

4. Используя теорему 1, докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in L^*$. *Для того чтобы для любой функции* $F \in S_\psi^*(A)$ *выполнялось соотношение*

$$\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F), \quad \sigma \to +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\ln n = O(\psi(A_n))$, $n \to \infty$.

Доказательство. Функция $\varphi(x) \equiv x$, $x > e$, удовлетворяет условиям теоремы 1, а условие (5) переписывается в этом случае в виде

$$\ln n = o(\gamma(\psi(A_n))\psi(A_n)), \quad n \to \infty,$$

для каждой функции $\gamma \in L_{MB}$, что равносильно условию $\ln n = O(\psi(A_n))$, $n \to \infty$. Поэтому из теоремы 1 вытекает справедливость теоремы 2 в случае, когда выполнено условие (4). Так как $\psi \in L^*$, то из условия $\ln n = O(\psi(A_n))$, $n \to \infty$, вытекает, что $\ln n = o(A_n)$, $n \to \infty$, и достаточность доказана в общем случае. Чтобы завершить доказательство необходимости, достаточно показать, что для каждой последовательности (A_n) такой, что

$$\ln n_k \geq \alpha(A_{n_k})\psi(A_{n_k}).$$

для некоторых функции $\alpha \in L_{MB}$ и последовательности

$$(n_k)\uparrow +\infty, \quad k \to \infty,$$

можно выделить подпоследовательность (A_m^*) такую, что

$$\ln m \leq \frac{1}{2} A_m^* \quad \text{и} \quad \ln m_k \geq \alpha^*(A_{m_k}^*)\psi(A_{m_k}^*)$$

для некоторых функции $\alpha^* \in L_{MB}$ и последовательности

$$(m_k)\uparrow +\infty, \quad k \to \infty.$$

Поскольку

$$x/\psi(x)\uparrow +\infty, \quad x \to +\infty,$$

то существует функция $\alpha_1 \in L_{MB}$ такая, что $\alpha_1(x)\psi(x) \leq (1/2)x$ для всех $x \geq 0$. Выберем функцию $\alpha^* \in L_{MB}$ так, чтобы

$$\alpha^*(x) \leq (1/4)\min\{\alpha(x), \alpha_1(x)\}.$$

Тогда $\alpha^*(x)\psi(x) \leq (1/8)x$ для всех

$$x \geq 0 \quad \text{и} \quad \ln n_k \geq 4\alpha^*(A_{n_k})\psi(A_{n_k}).$$

Если $\ln n_A(x) \leq (1/2)x$ для всех x, то необходимость условия $\ln n = O(\psi(A_n))$, $n \to \infty$, доказана выше. В противном случае пусть

$$x_0 = \inf\{x: \ln n_A(x) > (1/2)x\}.$$

Проведем прямую $y = \ln n_A(x_0)$ и через x_0^* обозначим абсциссу ее точки пересечения с кривой $y = 2\alpha^*(x)\psi(x)$. Все точки A_n, лежащие на $[x_0, x_0^*]$, из последовательности (A_n) исключим. Тогда для последовательности $(A_k^{(0)})$, которая осталась, справедливы неравенства

$$\ln n_{(A_k^{(0)})}(x) \leq \frac{1}{2}x; \quad 0 \leq x \leq x_0^*;$$

и

$$\ln n_{(A_k^{(0)})}(x_0^*) \geq 2\alpha^*(x_0^*)\psi(x_0^*) - 1.$$

Если

$$\ln n_{(A_k^{(0)})}(x) \leq \frac{1}{2}x$$

для всех $x \geq x_0^*$, то полагаем $(A_m^*) \equiv (A_k^{(0)})$, и построение на этом завершаем. Если же это неравенство не выполняется, то обозначим

$$x_1 = \inf\left\{x > x_0^*: \ln n_{(A_k^{(0)})}(x) > \frac{1}{2}x\right\}$$

и для точки x_1 указанным выше способом строим точку x_1^* и, если надо, процесс продолжаем. В результате получим необходимую последовательность (A_m^*).

Если теперь рассмотрим $\lambda_n^* = \lambda_n$ при $A_n \in (A_m^*)$ и $\lambda_n^* = 0$ при $A_n \notin (A_m^*)$, где (λ_n) — последовательность показателей функции $F \in S_\psi^*(A)$, построенной по лемме 2 при доказательстве необходимости в случае условия (4), то для такой функции F_1 имеем

$$F_1(s) = F(s) + \sum_{A_n \notin (A_m^*)} a_n = F(s) + K,$$

где $K \equiv \text{const}$, и значит, $F_1 \in S_\psi^*(A)$. Для этой функции F_1, как и для функции F, соотношение

$$\ln M(\sigma, F) \sim \ln \mu(\sigma, F), \quad \sigma \to +\infty,$$

не выполняется. Теорема 2 доказана.

5. Условие $\varphi(\ln x) \in L_{MB}$ в теореме 1, вообще говоря, устранить нельзя. Например, если

$$\varphi(\ln x + \ln 2) \geq (1+p)\,\varphi(\ln x), \quad p > 0,$$

для всех $x \geq 1$, то для каждого ряда Дирихле (1) с положительными коэффициентами имеем

$$\overline{\lim_{\sigma \to +\infty}}\, \varphi(\ln M(\sigma, F)) / \varphi(\ln \mu(\sigma, F)) \geq (1+p),$$

ибо существует последовательность

$$(\sigma_k) \uparrow +\infty, \quad k \to \infty,$$

такая, что в каждой σ_k два соседних члена стают максимальными. Условие вогнутости функции $\ln \varphi(x)$ кажется излишним, так как таковым оно является в случае, когда $\varphi \in L_{MB}$. Перейдем к рассмотрению этого случая.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in L_{MB}$. *Условие* (5) *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\varphi(\ln n)}{\varphi(\psi(A_n))} \leq 1. \qquad (5')$$

Доказательство. Если выполняется (5′), то для каждой функции $\gamma \in L_{MB}$ имеем

$$1 \leq \frac{\varphi(\ln n + \gamma(\psi(A_n))\psi(A_n))}{\varphi(\gamma(\psi(A_n))\psi(A_n))} \leq \frac{\varphi(2\max\{\ln n, \gamma(\psi(A_n))\psi(A_n)\})}{\varphi(\gamma(\psi(A_n))\psi(A_n))} =$$

$$= (1 + o(1)) \max\left\{\frac{\varphi(\ln n)}{\varphi(\gamma(\psi(A_n))\psi(A_n))}, 1\right\} \leq 1 + o(1), \quad n \to \infty,$$

т. е. выполняется (5). Если же (5′) не выполняется, то существуют число $p > 0$ и последовательность

$$(n_k) \uparrow \infty, \quad k \to \infty,$$

такие, что

$$\ln n_k \geq \varphi^{-1}((1+p)\varphi(\psi(A_{n_k}))).$$

Поскольку $\varphi \in L_{MB}$, то

$$\varphi^{-1}((1+p)\varphi(x))/x \to +\infty, \quad x \to +\infty,$$

и значит, существует функция $\gamma \in L_{MB}$ такая, что

$$\varphi^{-1}((1+p)\varphi(x))/x\gamma(x) \to +\infty, \quad x \to +\infty,$$

и

$$\varphi(x\gamma(x)) \sim \varphi(x), \quad x \to +\infty.$$

Для этой функции γ имеем

$$\frac{\varphi\left(\varphi^{-1}((1+p)\varphi(x)) + x\gamma(x)\right)}{\varphi(x\gamma(x))} = \frac{\varphi\left((1+o(1))\varphi^{-1}((1+p)\varphi(x))\right)}{(1+o(1))\varphi(x)} =$$

$$= (1+o(1))(1+p), \quad x \to +\infty.$$

Поэтому

$$\frac{\varphi\left(\ln n_k + \gamma\left(\psi\left(A_{n_k}\right)\right)\psi\left(A_{n_k}\right)\right)}{\varphi\left(\gamma\left(\psi\left(A_{n_k}\right)\right)\psi\left(A_{n_k}\right)\right)} \geq (1+o(1))(1+p), \quad k \to \infty,$$

т. е. (5) не выполняется.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in L_{MB}$, $\psi \in L^*$ *и выполняется условие* (4). *Для того чтобы для каждой функции* $F \in S_\psi^*(A)$ *выполнялось соотношение*

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F)), \quad \sigma \to +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5′).

Доказательство. Из неравенства (6) в силу условия $\varphi \in L_{MB}$ имеем

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \leq (1+o(1))\varphi(2\max\{\ln n_A(\psi^{-1}(2\sigma/(1-h))), \ln \mu(\sigma, F)\}) \leq$$

$$\leq (1+o(1))\max\{\varphi(\ln n_A(\psi^{-1}(2\sigma/(1-h)))), \varphi(\ln \mu(\sigma, F))\}, \quad \sigma \to +\infty,$$

и нам осталось доказать, что

$$\varlimsup_{\sigma \to +\infty} \varphi(\ln n_A(\psi^{-1}(\sigma)))/\varphi\left(\ln \mu\left(\frac{1-h}{2}\sigma, F\right)\right) \leq 1.$$

Так как

$$(1/\sigma)\ln \mu(\sigma, F) \to +\infty, \quad \sigma \to +\infty,$$

это неравенство вытекает из (5′). Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Допустим, что условие (5′) не выполняется, т. е.

$$\varphi(\ln n_k) \geq (1+p)\varphi(\psi(A_{n_k}))$$

для некоторых числа $p > 0$ и последовательности

$$(n_k) \uparrow \infty, \quad k \to \infty.$$

Поскольку $\varphi \in L_{MB}$, то

$$\varphi^{-1}((1+p/2)\varphi(x))/x \to +\infty, \quad x \to +\infty.$$

Выберем функцию $\alpha \in L_{MB}$ так, чтобы

$$\alpha(x/\psi(x)) \le \varphi^{-1}((1+p/2)\varphi(\psi(x)))/\psi(x).$$

Тогда для построенной в лемме 2 функции $F \in S_\psi^*(A)$ имеем

$$\varphi(\ln M(\sigma_k, F)) \ge \varphi(\ln n_k) \ge (1+p)\varphi(\psi(A_{n_k})) =$$

$$= \frac{(1+p)\varphi\left(\psi\left(A_{n_k}\right)\right)}{\varphi\left(\psi\left(A_{n_k}\right)\right)\alpha\left(A_{n_k}/\psi\left(A_{n_k}\right)\right)}\varphi(\psi(A_{n_k}))\alpha(A_{n_k}/\psi(A_{n_k})) \ge$$

$$\ge \{(1+p)/(1+p/2)\}\varphi(\ln M(\sigma_k, F)),$$

и тем самым теорема 3 доказана.

В отличие от теоремы 2 в теореме 3 имеется дополнительное условие (4) на последовательность A. Это условие можно опустить, если наложить дополнительные требования на функции φ и ψ.

Теорема 3′. *Пусть* $\varphi \in L_{MB}$, $\psi \in L^*$ *и*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\, \varphi(x)/\varphi(\psi^{-1}(x)) = \delta < 1. \tag{14}$$

Для того чтобы для каждой функции $F \in S_\psi^*(A)$ *выполнялось соотношение*

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F)), \quad \sigma \to +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (5′).

Доказательство. Чтобы доказать достаточность условия (5′), достаточно показать, что из (5′) и (14) вытекает (4). Так как $\delta < 1$ и $\varphi \in L_{MB}$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{A_n} \ln n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{A_n} \varphi^{-1}((1+o(1))\varphi(\psi(A_n))) \le$$

$$\le \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\varphi^{-1}((1+o(1))\varphi(x))}{\psi^{-1}(x)} \le \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\varphi^{-1}((1+o(1))\varphi(x))}{\varphi^{-1}((1+o(1))\varphi(x)/\delta)} = 0.$$

Необходимость условия (5′) в случае выполнения условия (4) доказана выше. Если условие (4) не выполняется, то можем поступить, как при доказательстве теоремы 2, выделив из последовательности A подпоследовательность A^*, для которой (4) выполняется, а (5′) не выполняется и тем самым завершить доказательство теоремы 3′.

В заключение отметим, что если

$$\varphi(x) \sim \varphi(\psi^{-1}(x)), \quad x \to +\infty,$$

то из (4) вытекает (5′). Поэтому, *если*

$$\varphi \in L_{MB}, \quad \psi \in L^*, \quad \varphi(x) \sim \varphi(\psi^{-1}(x)), \quad x \to +\infty,$$

и выполнено условие (4), *то*

$$\varphi(\ln M(\sigma, F)) \sim \varphi(\ln \mu(\sigma, F)), \quad \sigma \to +\infty.$$

Вопрос о существенности условия (4) в этом утверждении требует дополнительного изучения.

1. *Шеремета М. Н.* О полной эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 6. – С. 119 – 123.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
3. *Шеремета М. Н.* Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 215 – 226.

Получено 27. 03. 91