УДК 519.21

Ю. В. Кук, канд. физ.-мат. маук (Ин-т кибернетики АН Украины, Киев),
Ю. И. Петунин, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ С ПОМОЩЬЮ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ. I

The method for constructing statistical criteria is proposed. It can be used for testing an arbitrary finite set of simple alternative hypotheses. A concept of an optimal statistical criterion is introduced whose special cases are the Bayes criterion and the minimax criterion. It is proved that any optimal statistical criterion can be constructed on the basis of the likelihood ratio.

Пропонується методика побудови статистичних критеріїв, яку можна застосувати для перевірки довільного скінченного числа простих альтернативних гіпотез. Вводиться поняття оптимального статистичного критерію, окремими випадками якого є байєсовський та мінімаксний критерії. Доводиться, що будь-який оптимальний статистичний критерій можна побудувати на підставі відношення правдоподібності.

В этой работе, а также в связанных с ней работах [1, 2], предлагается новая методика построения статистических критериев, которую можно применять для проверки произвольного конечного числа простых конкурирующих альтернативных гипотез $H_1, \ldots, H_N$. Полученные результаты обобщают и уточняют классическую теорию Неймана — Пирсона для проверки статистических гипотез, построенную в случае, когда имеется одна простая гипотеза H и единственная конкурирующая гипотеза $\overline{H}$ [3].

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка, совместное распределение которой принадлежит параметрическому семейству $P = \{F_j,\ j = \overline{1, N}\}$.

Будем предполагать, что гипотезе H_j соответствует распределение F_j, $j = \overline{1, N}$. Обозначим через $T \in R_m$, $m \le n$, достаточную статистику для семейства P [3]. Без ограничения общности можно считать, что статистика T имеет плотность распределения $f_j(t)$, $t \in R_m$, по некоторой мере $\mu(dt)$.

Нерандомизированная процедура принятия гипотезы состоит в разбиении пространства R_m на N непересекающихся измеримых множеств $V_1, V_2, \ldots, V_N$; $\bigcup_{i=1}^{N} V_i = R_m$: если статистика T в результате эксперимента попадает в область V_j, то принимается гипотеза H_j, а остальные отклоняются. Более общая рандомизированная процедура осуществляется с помощью задания в пространстве R_m измеримой векторной функции $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t))$, $\varphi_i(t) \ge 0$, $\sum_{i=1}^{N} \varphi_i(t) = 1$, которая называется критической функцией [4]. Для принятия гипотезы производится дополнительный случайный эксперимент, результатом которого является одно из чисел $1, 2, \ldots, N$, выпадающие соответственно с вероятностями $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_N(t)$, где t — значение, которое принимает T в результате наблюдения.

Обозначим через $L_i(j)$, $i, j = \overline{1, N}$, $i \ne j$, положительные числа, определяющие потери, связанные с принятием на основе критической функции φ гипотезы H_i, когда верна H_j. Пусть $P(H_i \mid H_j)$ — вероятность принятия гипотезы H_i при условии, что верна гипотеза H_j. Рассмотрим вектор риска $r_\varphi = (r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N))$, где

$$r_\varphi(j) = M_j L_i(j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{N} L_i(j) P(H_i \mid H_j). \tag{1}$$

Пусть $\| u \|$ — произвольная норма, определенная в N-мерном векторном

© Ю. В. КУК, Ю. И. ПЕТУНИН, 1994

пространстве E_N, а Φ — множество всех критических функций.

Определение 1. *Будем говорить, что критерий для проверки альтернативных гипотез* H_j, $j=\overline{1,N}$, *отвечающий критической функции* φ^*, *является оптимальным статистическим критерием по норме* $\|u\|$, $u\in E_N$, *если норма вектора риска* $r_{\varphi*}$ *минимальна в классе всех критериев, соответствующих критическим функциям* $\varphi\in\Phi$:

$$\| r_{\varphi*} \| = \inf_{\varphi\in\Phi} \| (r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N)) \|.$$

В случае, когда E_N, наделенное нормой $\|u\|$, $u\in E_N$, является пространством l_1 с весом $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$, оптимальный статистический критерий превращается в байесовский критерий, соответствующий априорным вероятностям $\pi_1, \ldots, \pi_N$; в метрике пространства l_∞ оптимальный статистический критерий представляет минимаксный критерий; эти критерии рассматривались и обсуждались в многочисленной литературе (см., например, [3, 4, 7 – 10]; в работе С. Рао и П. Слейтера [8], по-видимому, было впервые получено обобщение леммы Неймана — Пирсона для байесовского критерия). Пространства l_p, $1<p<\infty$, которые являются промежуточными пространствами между l_1 и l_∞ [5], порождают оптимальные статистические критерии, которые, в некотором смысле, будут промежуточными между байесовским и минимаксным критерием.

Определение 2. *Критерии, оптимальные по норме пространства* l_p, $p\in[1,\infty)$, *будем называть* l_p*-критериями.*

Обозначим через $\Re$ множество всех векторов риска r_φ.

Напомним, что множество $\Re$ в N-мерном эвклидовом пространстве E_N называется телом, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Лемма 1. *Множество* $\Re$ *в* N*-мерном эвклидовом пространстве* E_N *является замкнутым, ограниченным и выпуклым. Если выполняется одно из следующих условий:*

1) *потери* $L_i(j)$ *не зависят от* i: $L_i(j)=L_j$; $i,j=\overline{1,N}$, $i\neq j$, *причем* $L_j>0$, $j=\overline{1,N}$;

2) $\forall j\in\{1,\ldots,N\}$ $\exists k\in\{1,\ldots,N\}$ *такое, что* $L_k(j)\neq 0$, *и плотности* $f_j(t)$, $j=\overline{1,N}$, *таковы что* $\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu f_\nu(t)\equiv 0$, μ*-почти всюду лишь при* $c_\nu=0$, $\nu=\overline{1,N}$;

то множество $\Re$ *является телом.*

Доказательство. Пусть $r_{\varphi'}$ и $r_{\varphi''}\in\Re$. В силу (1) $\mu r_{\varphi'}(j)+(1-\mu)r_{\varphi''}(j)=r_\varphi(j)$, $\forall\mu\in[0,1]$, где $\varphi=\mu\varphi'+(1-\mu)\varphi''\in\Phi$. Поэтому $\forall\mu\in[0,1]$ $\mu r_{\varphi'}+(1-\mu)r_{\varphi''}\in\Re$. Тем самым выпуклость множества $\Re$ доказана. Покажем, что $\Re$ — компактное множество. Отсюда в силу теоремы Больцано — Вейерштрасса будет вытекать замкнутость и ограниченность $\Re$ в пространстве E_N. Пусть F — равномерно ограниченный класс измеримых вещественных функций, определенных в пространстве R_m. Последовательность функций $\{f_n\}$ из F называется сходящейся к f слабо, если

$$\int_{R_m} f_n(t)p(t)\mu(dt) \to \int_{R_m} f(t)p(t)\mu(dt), \quad n\to\infty, \tag{2}$$

для всех μ-интегрируемых функций p. Справедлива следующая теорема о слабой компактности [3, с. 482 – 484]. Пусть μ — σ-конечная мера в эвклидовом пространстве R_m. Тогда множество измеримых функций φ с $0 \le \varphi \le 1$ компактно по отношению к слабой сходимости, определяемой условием (2).

Из этой теоремы вытекает, что если $\{\varphi^n\}$, $\varphi^n = \left(\varphi_1^n, \dots, \varphi_{N-1}^n, \varphi_N^n = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \varphi_j^n\right)$, — некоторая последовательность критических функций, то для последовательностей $\{\varphi_j^n\}$, $j = 1, \dots, N-1$, существуют подпоследовательности $\{\varphi_j^{n_l}\}$, $j = 1, \dots, N-1$, такие, что

$$\lim_{n_l \to \infty} \int_{R_m} \varphi_j^{n_l}(t) f_i(t) \mu(dt) = \int_{R_m} \varphi_j^0(t) f_i(t) \mu(dt),$$

где $0 \le \varphi_j^0 \le 1$, $j = \overline{1, N-1}$; $i = \overline{1, N}$. Отсюда следует, что для всякой последовательности точек $\{r_{\varphi^n}\} \in \mathfrak{R}$, $r_{\varphi^n} = (r_{\varphi^n}(1), \dots, r_{\varphi^n}(N))$ существует сходящаяся в $\mathfrak{R}$ подпоследовательность точек $\{r_{\varphi^{n_l}}\}$, $\varphi^{n_l} = \left(\varphi_1^{n_l}, \varphi_2^{n_l}, \varphi_{N-1}^{n_l}, 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \varphi_j^{n_l}\right)$. В самом деле, так как

$$r_{\varphi^{n_l}}(j) = \int_{R_m} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ i \ne j}}^{N} L_k(j) \varphi_k^{n_l}(t) \right\} f_j(t) \mu(dt)$$

и

$$\lim_{n_l \to \infty} r_{\varphi^{n_l}}(j) = \int_{R_m} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne j}}^{N} L_k(j) \varphi_k^0(t) \right\} f_j(t) \mu(dt) = r_{\varphi^0}(j),$$

где $\varphi_N^0 = 1 - \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^0$, то $\lim\limits_{n_l \to \infty} \{r_{\varphi^{n_l}}\} = r_{\varphi^0} = (r_{\varphi^0}(1), \dots, r_{\varphi^0}(N))$. Тем самым компактность множества $\mathfrak{R}$ доказана.

Покажем, что из условий 1 или 2 леммы 1 вытекает, что можество $\mathfrak{R}$ является телом. Пусть выполнено условие 1. Тогда компоненты вектора риска r_φ вычисляются по формулам

$$r_\varphi(j) = L_j \left(1 - \int_{R_m} \varphi_j(t) f_j(t) \mu(dt) \right), \quad j = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Полагая в этих формулах последовательно при $j = 1, \dots, N$: $\varphi_i(t) \equiv 1$, $\varphi_i(t) \equiv 0$, $i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, N$, получаем, что множество $\mathfrak{R}$ должно содержать точки $A_1 = (0, L_2, \dots, L_N)$, $A_2 = (L_1, 0, L_3, \dots, L_N)$, $\dots$, $A_N = (L_1, L_2, \dots, L_{N-1}, 0)$ и часть гиперплоскости Π_1, проходящей через эти точки и ограниченной гиперплоскостями $x_1 = L_1, \dots, x_N = L_N, x_1 = 0, \dots, x_N = 0$. Уравнение Π_1 имеет вид

$$\frac{x_1}{L_1} + \frac{x_2}{L_2} + \dots + \frac{x_N}{L_N} = N - 1. \tag{4}$$

Для точек $(x_1, \dots, x_N) \in \mathfrak{R}$ уравнение (4) можно переписать, принимая во внимание (3), следующим образом:

$$\int_{R_m} \varphi_1(t) f_1(t) \mu(dt) + \dots + \int_{R_m} \varphi_N(t) f_N(t) \mu(dt) = 1.$$

Заменяя в этом уравнении φ_N на $1-\sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i$, получаем

$$\int\limits_{R_m}\varphi_1(t)[\,f_1(t)-f_N(t)]\,\mu(dt)+\ldots+\int\limits_{R_m}\varphi_{N-1}(t)[\,f_{N-1}(t)-f_N(t)]\,\mu(dt)=0. \quad (5)$$

Предположим противное: пусть $\Re$ не является телом. Тогда какую бы мы ни взяли критическую функцию $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$, отвечающий ей вектор риска $r_\varphi\in\Re$ должен принадлежать гиперплоскости Π_1, а компоненты φ должны удовлетворять соотношению (5). Положим $\varphi_1(t)\equiv 1$, когда $t\in A$, где A — произвольное борелевское множество из σ-алгебры борелевских множеств $\mathfrak{B}$ в пространстве R_m, и $\varphi_1(t)\equiv 0$, когда $t\notin A$; функции $\varphi_2(t),\ldots,\varphi_{N-1}(t)$ выберем равными тождественно нулю в R_m и $\varphi_N(t)=1-\sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i(t)$. Тогда (5) преобразуется к виду

$$\int\limits_A[\,f_1(t)-f_N(t)]\mu(dt)=0,\quad \forall A\in\mathfrak{B}. \quad (6)$$

Так как гипотезы H_1 и H_N различны, то плотность $f_1(t)$ не равна $f_N(t)$ μ-почти всюду и поэтому равенство (6) не возможно. Тем самым приходим к противоречию. Следовательно, $\Re$ — тело.

Пусть выполнено условие 2. Множество $\Re$ содержит точки

$$A_1=(0,L_1(2),\ldots,L_1(N)),\ldots,A_N=(L_N(1),\ldots,L_N(N-1),0),$$

отвечающие критическим функциям, у которых одна из компонент (для точки A_i это i-я компонента) тождественно равна единице, а остальные компоненты тождественно равны нулю. Обозначим через Π_2: $a_1x_1+\ldots+a_Nx_N=d$ гиперплоскость, проходящую через эти точки. Предположим противное: пусть $\Re$ не является телом. Тогда $\Re$ содержится в Π_2, и для компонент любого вектора риска $r_\varphi\in\Re$ выполняется соотношение

$$a_1r_\varphi(1)+a_2r_\varphi(2)+\ldots+a_Nr_\varphi(N)=d,\quad \forall\, r_\varphi\in\Re. \quad (7)$$

Подставляя в (7) выражения для $r_\varphi(j)$, $j=\overline{1,N}$, из (1) получаем

$$\sum_{j=1}^N a_j\left(\sum_{i=1}^N L_i(j)\int\limits_{R_m}\varphi_i(t)f_j(t)\mu(dt)\right)=d,\quad \forall\,\varphi\in\Phi, \quad (8)$$

где $L_i(i)=0$, $i=\overline{1,N}$.

В определении гиперплоскости Π_2 все a_j, $j=\overline{1,N}$; не могут одновременно равняться нулю. Пусть $a_{j_0}\neq 0$. Согласно требованию условия 2 леммы 1 существует такое k, что $L_k(j_0)\neq 0$. Заменяя в (8) $\varphi_k(t)$ на $1-\sum_{l=1,\,l\neq k}^N\varphi_l(t)$, имеем

$$\sum_{j=1}^N a_j\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^N L_i(j)\int\limits_{R_m}\varphi_i(t)f_j(t)\mu(dt)\right)+\sum_{j=1}^N a_jL_k(j)-$$

$$-\sum_{j=1}^N a_jL_k(j)\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^N\int\limits_{R_m}\varphi_i(t)f_j(t)\mu(dt)\right)=d. \quad (9)$$

Полагая в (9)

$$\varphi_i(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, N}; \quad i \neq k, \quad (\varphi_k(t) \equiv 1),$$

находим

$$\sum_{j=1}^{N} a_j L_k(j) = d. \tag{10}$$

Перегруппировывая члены в (9) и учитывая (10), преобразуем (9) к виду

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \int_{R_m} \varphi_i(t) \left[\sum_{j=1}^{N} a_j (L_i(j) - L_k(j)) f_j(t) \right] \mu(dt) = 0. \tag{11}$$

Положим $\varphi_{j_0}(t) \equiv 1$, когда $t \in A$, где A — произвольное борелевское множество из σ-алгебры борелевских множеств $\mathfrak{B}$ в пространстве R_m, и $\varphi_{j_0}(t) \equiv$ $\equiv 0$, когда $t \notin A$; $\varphi_i(t)$, $i \neq j_0 \neq k$, выберем равными тождественно нулю в R_m, а

$$\varphi_k(t) = 1 - \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j_k}}^{N} \varphi_l(t).$$

Тогда (11) примет вид $\forall\ A \in \mathfrak{B}$

$$\int_A \left[\sum_{j=1}^{N} a_j \big(L_{j_0}(j) - L_k(j)\big) f_j(t) \right] \mu(dt) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \big(L_{j_0}(j) - L_k(j)\big) f_j(t) \equiv 0$$

почти всюду. Так как $a_{j_0}(L_{j_0}(j_0) - L_k(j_0)) \neq 0$, то приходим к противоречию с условием 2 леммы 1, ибо плотности $f_j(t)$, $j = \overline{1, N}$, таковы, что $\sum_{\nu=1}^{N} c_\nu f_\nu(t) \equiv 0$ μ-почти всюду лишь тогда, когда c_ν равны нулю. Следовательно, $\mathfrak{R}$ — тело. Лемма доказана.

Простейшим примером того, что $\mathfrak{R}$ не является телом, есть случай, когда существует такое j, для которого $L_k(j) = 0$, $k = \overline{1, N}$; при этом $\mathfrak{R}$ лежит в гиперплоскости $x_j = 0$.

Перейдем теперь к построению оптимальных статистических критериев для двух конкурирующих гипотез H_1 и H_2.

Теорема 1. *Для любой нормы, определенной в векторном пространстве E_2, оптимальный статистический критерий задается критической функцией $\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*)$, определяемой формулой*

$$\varphi_1^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда } L_2(1) f_1(t) > \lambda L_1(2) f_2(t), \\ \alpha, & \text{когда } L_2(1) f_1(t) = \lambda L_1(2) f_2(t), \\ 0, & \text{когда } L_2(1) f_1(t) < \lambda L_1(2) f_2(t), \end{cases}$$

$$\varphi_2^*(t) = 1 - \varphi_1^*(t), \quad t \in R_m, \tag{12}$$

где α *и* λ *— некоторые положительные числа, зависящие от вида нормы в пространстве* E_2.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}_\infty$ — банахово пространство, состоящее из почти всюду ограниченных измеримых функций. Тогда множество всех критических функций Φ представляет выпуклое подмножество $\mathfrak{L}_\infty$. Как известно, функционалы

$$r_\varphi(j) = L_i(j)\int\limits_{R_m}\varphi_i(t)f_j(t)\mu(dt), \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j, \tag{13}$$

являются линейными и ограниченными и определены на L_∞, а функции $f_j(t)$ интегрируемы по мере μ.

На основании леммы 1 множество векторов риска $\mathfrak{R}$ выпукло, ограниченно и замкнуто в E_2. Определим нижнюю границу Γ_H этого множества как совокупность векторов $r_\varphi \in \mathfrak{R}$, у которых ордината имеет минимальное значение при фиксированном значении абсциссы:

$$r_{\varphi'} \in \Gamma_H \Leftrightarrow r_{\varphi'}(1) = r^0(1), \quad r_{\varphi'}(2) = \min_{\varphi\in\Phi} r_\varphi(2), \tag{14}$$

где $r^0(1)$ — фиксированное число; Γ_H является выпуклой кривой, соединяющей точки $(0, L_1, (2))$ и $(L_2(1), 0)$.

Найдем вид критической функции, отвечающей точке из Γ_H. Из выпуклости кривой Γ_H вытекает, что в формуле (14) равенство $r_{\varphi'}(1) = r^0(1)$ можно заменить на неравенство $r_{\varphi'}(1) \leq r^0(1)$. В силу теоремы Куна – Таккера ([6, с. 56], теорема 2.5), если критическая функция φ представляет решение экстремальной задачи о минимизации ординаты вектора риска при условии $r_{\overline{\varphi}}(1) \leq$ $\leq r^0(1)$, то существует такое положительное число λ, что

$$\lambda r_{\overline{\varphi}}(2) + r_{\overline{\varphi}}(1) \leq \lambda r_\varphi(2) + r_\varphi(1), \quad \forall\, \phi \in \Phi. \tag{15}$$

Из (15) и (14) получаем, что $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2)$ должна минимизировать выражение

$$\int\limits_{R_m}\{\lambda L_1(2)f_2(t)\}\,\varphi_1(t)\mu(dt) + \int\limits_{R_m}\{L_2(2)f_1(t)\}\,\varphi_2(t)\mu(dt)$$

в классе $\varphi \in \Phi$. Поэтому $\overline{\varphi}_1$ должна равняться единице на множестве $\{t: L_2(1)f_1(t) < \lambda L_1(2)f_2(t)\}$, некоторому числу $\alpha > 0$ на множестве $\{t: L_2(1)f_1(t) =$ $= \lambda L_1(2)f_2(t)\}$ и нулю в остальной части пространства R_m; $\overline{\varphi}_2(t) = 1 - \overline{\varphi}_1(t)$. Таким образом, $\overline{\varphi}$ имеет вид (12).

Покажем теперь, что вектор риска с минимальной нормой r_{φ^*} принадлежит нижней границе Γ_H. Предположим противное: $r_{\varphi^*} \notin \Gamma_H$. Тогда отрезок прямой, соединяющий r_{φ^*} и начало координат 0, пересекает Γ_H в некоторой точке $r_{\overline{\varphi}}$, расположенной на более близком расстоянии от начала координат 0, чем $r_{\overline{\varphi}^*}$, то есть $\| r_{\overline{\varphi}} \| < \| r_{\varphi^*} \|$, но тем самым мы приходим к противоречию с определением r_{φ^*}. Поэтому $r_{\varphi^*} \in \Gamma_H$, и, как было показано выше, φ^* имеет вид (12). Теорема доказана.

***Замечания.* 1.** Из теоремы 1 вытекает, что всякий оптимальный статистический критерий для проверки двух альтернативных простых гипотез можно построить на основании отношения правдоподобия.

2. Число λ, фигурирующее в определении критической функции φ^* оптимального статистического критирия, равно $-\operatorname{ctg}\alpha$, где α — угол наклона касательной, проведенной к нижней границе Γ_H множества векторов риска $\Re$ в точке r_{φ^*}.

Действительно, подставляя в уравнение этой касательной координаты точки $r_{\varphi^*} = (r_{\varphi^*}(1), r_{\varphi^*}(2))$, получаем $r_{\varphi^*}(2) - \operatorname{tg}\alpha \cdot r_{\varphi^*}(1) = c = \text{const}$. Легко видеть, что

$$c = \min_{\varphi \in \Phi} \{r_\varphi(2) - \operatorname{tg}\alpha\, r_\varphi(1)\} = -\operatorname{ctg}\alpha\, r_{\varphi^*}(2) + r_{\varphi^*}(1). \tag{16}$$

Сравнивая (16) и (15), замечаем, что в выражении для φ^* в качестве λ выступает $(-\operatorname{ctg}\alpha)$.

Из теоремы 1 и замечания 2 вытекает, что для байесовского критерия $\lambda = \pi_2/\pi_1$, а α — произвольное число из отрезка $[0, 1]$. Этот результат известен (см. [7, с. 151], теорема 1). В случае минимаксного критерия числа α и λ подбираются так, чтобы $r_{\varphi^*}(1) = r_{\varphi^*}(2)$ [7].

Определение 3. *Пусть E_2 — двумерное банахово пространство с нормой $\|(x_1, x_2)\|$. Норма $\|(x_1, x_2)\|$ называется симметричной, если $\|(x_1, x_2)\| = \|(x_2, x_1)\|$.*

Следствие 1. *Пусть гипотезе H_1 отвечает плотность $f(t)$ по мере Лебега, а гипотезе H_2 — $f(-t-a)$, где a — параметр сдвига. Пусть потери $L_1(2) = L_2(1) = 1$. Нерандомизированный статистический критерий с критическими областями*

$$V_1^* = \{t : f(t) > f(-t-a)\} + V_1', \quad V_2^* = \{t : f(t) < f(-t-a)\} + V_2',$$

где $V_1' \cup V_2' = \{t : f(t) = f(-t-a)\}$ *и* $\int_{V_1'} f(t)\,dt = \int_{V_2'} f(t)\,dt$, $V_1' \cap V_2' = \varnothing$, *является оптимальным по любой симметричной норме.*

Доказательство. Касательная, проведенная к нижней границе множества векторов риска $\Re$ с тангенсом угла наклона, равным -1, будет проходить через точку $r_{\varphi^*} \in \Gamma_H$ с координатами

$$r_{\varphi^*}(1) = \int_{V_2^*} f(t)\,dt, \quad r_{\varphi^*}(2) = \int_{V_1^*} f(-t-a)\,dt.$$

Действительно, минимум выражения

$$\|r_\varphi\|_{l_1} = r_\varphi(1) + r_\varphi(2) = \int_{R_m} \varphi_2(t) f(t)\,dt + \int_{R_m} \varphi_1(t) f(-t-a)\,dt$$

достигается на критической функции

$$\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*), \quad \varphi_1^* = \begin{cases} 1, & t \in V_1^*, \\ 0, & t \in V_2^*. \end{cases}$$

Точка r_φ лежит на биссектрисе первого координатного угла; в самом деле, нетрудно заметить, что $V_1^* = -V_2^* - a$ и

$$r_{\varphi^*}(1) = \int\limits_{V_2^*} f(t)dt = \int\limits_{-V_1^*-a} f(t)dt = \int\limits_{V_1^*} f(-t-a)dt = r_{\varphi^*}(2).$$

Отсюда, а также из симметричности и выпуклости нормы легко видеть, что сфера $\|(r(1), r(2))\| = c = \text{const}$ при некотором значении c соприкасается с нижней границей Γ_H в точке r_{φ^*}. Следствие доказано.

Рассмотрим некоторые примеры оптимальных статистических критериев для проверки двух простых альтернативных гипотез.

Пусть гипотезе H_1 отвечает плотность по мере Лебега $f_1(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$, $(f_1(t) = 0,\ t < 0)$, а гипотезе H_2 — $f_2(t) = e^{-t+\varepsilon}$, $t \geq \varepsilon$, $(f_2(t) = 0,\ t < \varepsilon)$. Предположим, что потери $L_1(2) = L_2(1) = 1$. Требуется построить по одному наблюдению случайной величины x оптимальный по норме l_p статистический критерий для проверки этих гипотез. Заметим, что условия следствия 1 здесь не выполняются. Наиболее простым для построения является l_1-критерий с критическими областями $V_1 = \{t : f_1(t) \geq f_2(t)\} = [0, \varepsilon]$ и $V_2 = \{t : f_1(t) < f_2(t)\} = (\varepsilon, \infty)$. Однако при малых значениях ε для l_1-критерия вероятность принять гипотезу H_2, когда верна H_1, велика (при $\varepsilon \to 0$ эта вероятность $P(H_2 \mid H_1) = r_{\varphi}(1) = \int_{\varepsilon}^{\infty} f_2(t)\,dt \to 1$). Поэтому для малых значений ε целесообразнее применить l_p-критерии при больших p или минимаксный критерий (l_∞-критерий). Так как отношение плотностей $h(t) = f_1(t)/f_2(t)$ равно бесконечности в интервале $[0, \varepsilon]$ и $e^{-\varepsilon}$ в интервале (ε, ∞), то для построения l_p-критерия ($p > 1$) параметр λ, фигурирующий в выражении для критической функции φ^* оптимального критерия, необходимо положить равным $e^{-\varepsilon}$. Тогда

$$\{t : f_1(t) > \lambda f_2(t)\} = [0, \varepsilon], \quad \{t : f_1(t) = \lambda f_2(t)\} = (\varepsilon, \infty), \quad \{t : f_1(t) < \lambda f_2(t)\} = \varnothing.$$

Применяя теорему 1, получаем

$$r_{\varphi^*}(1) = \int\limits_{R_1} \varphi_1^*(t) f_1(t)\,dt = (1-\alpha)\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t}\,dt = (1-\alpha)\,e^{-\varepsilon},$$

$$r_{\varphi^*}(2) = \int\limits_{R_1} \varphi_1^*(t) f_2(t)\,dt = \alpha\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} e^{-t+\varepsilon}\,dt = \alpha.$$

Для l_p-критерия ($p > 1$)

$$\|(r_{\varphi^*}(1), r_{\varphi^*}(2))\|_{l_p} = [\{(1-\alpha)\,e^{-\varepsilon}\}^p + \alpha^p]^{1/p}, \tag{17}$$

причем α должно минимизировать (17). Поэтому $\alpha = \left(1 + \exp\dfrac{\varepsilon p}{p-1}\right)^{-1}$ и компоненты критической функции $\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ для l_p-критерия имеют вид

$$\varphi_1^* = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t \in [0, \varepsilon], \\ \left(1 + \exp\dfrac{\varepsilon p}{p-1}\right)^{-1}, & \text{когда} \quad t \in (\varepsilon, \infty), \end{cases}$$

$$\varphi_2^* = 1 - \varphi_1^*.$$

Для минимаксного критерия (l_∞-критерия) это значение можно найти непосредственно из условия $r_{\varphi^*}(1) = r_{\varphi^*}(2)$. Если задачу немного видоизменить, потребовав, чтобы величина риска $r_{\varphi^*}(2)$ была в k раз $(k > 1)$ больше $r_{\varphi^*}(1)$, то вектор риска $(r_{\varphi^*}(1), r_{\varphi^*}(2))$ будет соответствовать оптимальному статистическому критерию по норме l_p, где $p = 1 + \varepsilon / \ln k$. Таким образом, в этом случае в качестве оптимального критерия выступают не l_1-критерий и минимаксный критерий, а некоторый „промежуточный" l_p-критерий.

Лемма 2. *Пусть потери* $L_i(j)$ *не зависят от* $i : L_i(j) = L_j$, $i, j = \overline{1, N}$ $(L_j > 0,\ j = \overline{1, N})$. *Обозначим через* $\mathfrak{A}$ *множество точек из* $\mathfrak{R}$, *лежащих под гиперплоскостью*

$$\Pi : \frac{x_1}{L_1} + \ldots + \frac{x_N}{L_N} = N - 1:$$

$$r_\varphi \in \mathfrak{A} \iff \frac{r_\varphi(1)}{L_1} + \ldots + \frac{r_\varphi(N)}{L_N} \le N - 1.$$

Тогда для всякой точки $r^0 = (r^0(1), \ldots, r^0(N)) \in \mathfrak{A}$ *точка*

$$\bar{r} = \left(r^0(1), \ldots, r^0(i-1), \max_{\varphi \in \Phi} r_\varphi(i), r^0(i+1), \ldots, r^0(N)\right)$$

лежит или над гиперплоскостью Π, *когда*

$$\frac{r^0(1)}{L_1} + \ldots + \frac{r^0(i-1)}{L_{i-1}} + \frac{r^0(i+1)}{L_{i+1}} + \ldots + \frac{r^0(N)}{L_N} \ge N - 2,$$

или в гиперплоскости $x_i = L_i$, *когда*

$$\frac{r^0(1)}{L_1} + \ldots + \frac{r^0(i-1)}{L_{i-1}} + \frac{r^0(i+1)}{L_{i+1}} + \ldots + \frac{r^0(N)}{L_N} \le N - 2.$$

Доказательство. Будем доказывать лемму для i, равного N. Аналогичными рассуждениями доказывается справедливость леммы для i, равного $1, \ldots, N-1$.

Пусть Π — гиперплоскость, проходящая через точки $A_1 = (0, L_2, L_3, \ldots, L_N)$, $A_2 = (L_1, 0, L_3, \ldots, L_N), \ldots, A_N = (L_1, L_{N-1}, 0)$. Точка A_i соответствует критической функции, у которой i-я компонента тождественно равна единице, а остальные компоненты тождественно равны нулю. В силу леммы 1 множество векторов риска $\mathfrak{R}$ образует в пространстве E_N выпуклое тело, которое содержит часть гиперплоскости Π, содержащейся внутри параллелепипеда $0 \le x_1 \le L_1$, $0 \le x_2 \le L_2, \ldots, 0 \le x_N \le L_N$. Пусть l_1 — прямая, являющаяся пересечением гиперплоскостей $x_1 = r^0(1)$, $x_2 = r^0(2), \ldots, x_{N-1} = r^0(N-1)$, l_1 параллельна оси Ox_N. Если

$$\frac{r^0(1)}{L_1} + \ldots + \frac{r^0(N-1)}{L_{N-1}} > N - 2,$$

то l_1 пересекает Π_1 в точке $r' = (r^0(1), \ldots, r^0(N-1), r'(N))$, где

$$r'(N) = L_N\left(N - 1 - \frac{r^0(1)}{L_1} - \ldots - \frac{r^0(N-1)}{L_{N-1}}\right)$$

(заметим, что $r^0(1)/L_1 + \ldots + r^0(N-1)/L_{N-1}$ всегда меньше $N-1$). Поэтому в этом случае $\bar{r}$ лежит над П. Пусть теперь

$$\frac{r^0(1)}{L_1} + \ldots + \frac{r^0(N-1)}{L_{N-1}} \le N-2.$$

Покажем, что $\bar{r}$ лежит в гиперплоскости $x_N = L_N$. Доказательство будем проводить методом математической индукции по N. При $N = 2$, $r^0(1)/L_1 \le N-2$, т.е. $r^0(1)$ равняется нулю. Так как $r_\varphi(i) = L_i\left(1 - \int_{R_m} \varphi_i(t) f_i(t)\mu(dt)\right)$, $i = 1, 2$; то $\max\limits_{\varphi\in\Phi} r_\varphi(2)$ при условии $r_\varphi(1) = r^0(1) = 0$ достигается, когда $\varphi_1(t) \equiv 1$, а $\varphi_2(t) \equiv$ $\equiv 1$. Следовательно, $\max\limits_{\varphi\in\Phi} r_\varphi(2) = L_2$ и точка $\bar{r} = (0, L_2)$ лежит в гиперплоскости $x_2 = L_2$. Пусть доказываемое утверждение справедливо в случае $N-1$ гипотез. Обозначим через B множество пространства L_{N-1}, имеющее вид

$$B = \{(r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N-1)), (r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N)) \in \Re, \varphi_N(t) \equiv 0, r_\varphi(N) = L_N\},$$

а через $\bar{B}$ — его часть, ограниченную гиперплоскостями $x_1 = L_1, \ldots, x_{N-1} =$ $= L_{N-1}$; $x_1 = 0, \ldots, x_{N-1} = 0$, $x_1/L_1 + \ldots + x_{N-1}/L_{N-1} = N-2$. Легко видеть, что B является множеством векторов риска для проверки $N-1$ гипотез. Согласно предположению индукции прямая в пространстве E_{N-1}, образованная пересечением гиперплоскостей $x_1 = r^0(1), \ldots, x_{N-2} = r^0(N-2)$, пересекает границу $\bar{B}$ в двух точках, которые отличаются лишь $N-1$-й координатой, причем точка с большей $N-1$-й координатой лежит в гиперплоскости $x_{N-1} = L_{N-1}$. Рассмотрим теперь множества C и $\bar{C}$, которые определяются аналогично множествам B и $\bar{B}$ соответственно, когда $r_\varphi(N) = c < L_N$ $(\varphi_N \not\equiv 0)$. Покажем, что $\bar{C} \subset \bar{B}$. Действительно, пусть $a = (r^0_{\bar{\varphi}}(1), \ldots, r^0_{\bar{\varphi}}(N-1)) \in \bar{C}$, а $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \ldots,$ $\bar{\varphi}_N)$ — критическая функция, соответствующая этой точке, $\sum_{i=1}^{N-1}\bar{\varphi}_i = 1 - \bar{\varphi}_N$. Рассмотрим критическую функцию $(\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_{N-2}, \bar{\varphi}_{N-1} + \bar{\varphi}_N, 0)$. Так как

$$r_\varphi(j) = L_j\left(1 - \int\limits_{R_m} \varphi_j(1) f_j(t)\mu(dt)\right),$$

этой критической функции отвечает точка

$$B = \left(r^0_{\bar{\varphi}}(1), \ldots, r^0_{\bar{\varphi}}(N-2), r^0_{\bar{\varphi}}(N-1) - L_{N-1}\int\limits_{R_m} \bar{\varphi}_N(1) f_{N-1}(t)\mu(dt)\right) \in \bar{B}.$$

Точки a и b расположены на одной прямой l_2, $a(N-1) \ge b(N-1)$. Следовательно, из предположения индукции вытекает, что $a \in \bar{B}$. Таким образом, $\bar{B} \supset \bar{C}$. Прямая l_1 может пересечь границу выпуклого множества $\Re$ не более чем в двух точках: $(r^0(1), \ldots, r^0(N-1), c')$ и $(r^0(1), \ldots, r^0(N-1), c'')$, $c' \le c''$. Так как $\bar{B} \supset \bar{C}$ $\forall\, c \in [0, L_N]$, $(r^0(1), \ldots, r^0(N-1)) \in \bar{B}$ и точка $(r^0(1), \ldots$ $\ldots, r^0(N-1), L_N)$ принадлежит прямой l_1 и $\Re$. Поэтому $c'' = L_N$, а вектор $\bar{r} = (r^0(1), \ldots, r^0(N-1), \max\limits_{\varphi\in\Phi} r_\varphi(N))$, когда $r^0(1)/L_1 + \ldots + r^0(N-1)/L_{N-1} \le$

$\leq N-2$ лежит в гиперплоскости $x_N = L_N$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть M — одна из двух точек пересечения границы множества векторов риска $\Re$ с биссектрисой $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$, которая имеет наименьшую эвклидову норму. Если потери $L_i(j)$ не зависят от i: $L_i(j) = L_j$, $i, j = \overline{1, N}$; $L_j > 0$, $j = \overline{1, N}$, то для минимаксного критерия (l_∞-критерия) минимум нормы пространства достигается на векторе риска с концом в точке M.*

Доказательство. Множество точек $x \in E_N$, удовлетворяющих соотношению $\|x\|_{l_\infty} \leq k$, где k — некоторая константа, образуют в пространстве E_N куб $A_k = \{x = (x_1, \ldots, x_N),\ 0 \leq x_i \leq k,\ i = \overline{1, N}\}$, причем точки с нормой равной k расположены на границе куба. Если k увеличивать, начиная с нуля, то при некотором k, равном k_0, куб A_{k_0} впервые коснется множества векторов риска $\Re$. Обозначим через D множество всех точек куба A_{k_0} с $\Re$. Легко видеть, что векторы риска, имеющие минимум нормы в пространстве l_∞, принадлежат D и имеют по крайней мере одну из координат, равную k_0. Покажем, что вектор $(k_0, k_0, \ldots, k_0)$ также принадлежит D. В самом деле, пусть $(r^0(1), \ldots, r^0(N)) \in$ $\in D$, $r^0(i) \leq k_0$, $i = \overline{1, N}$, и l_1 — прямая, являющаяся пересечением гиперплоскостей $x_1 = r^0(1), \ldots, x_{N-1} = r^0(N-1)$. Согласно лемме 2 отрезок прямой l_1, соединяющий точки $(r^0(1), \ldots, r^0(N))$ и $(r^0(1), \ldots, r^0_{N-1}, \max\limits_{\varphi \in \Phi} r_\varphi(N))$, содержит отрезок, соединяющий точки $(r^0(1), \ldots, r^0(N))$ и $(r^0(1), \ldots, r^0(N-1), k_0)$, который принадлежит кубу A_{k_0}, ибо в силу построения куба A_{k_0} ни один из отрезков, принадлежащих кубу, не может пересекать гиперплоскость Π, о которой идет речь в лемме 2. Поэтому точка $(r^0(1), \ldots, r^0(N-1), k_0)$ куба A_{k_0} принадлежит $\Re$, а значит, и D. Аналогичным образом последовательно доказывается, что точки $(r^0(1), \ldots, r^0(N-2), k_0, k_0), \ldots, (k_0, k_0, \ldots, k_0)$ принадлежат D. Теорема доказана.

Используя результаты, полученные в этой работе, в [2] изучается структура критической функции оптимального статистического критерия для проверки N гипотез.

1. *Кук Ю. В., Петунин Ю. И.* Оптимальные статистические критерии // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. – № 4. – С. 298 – 300.
2. *Кук Ю. В., Петунин Ю. И.* Проверка нескольких гипотез с помощью оптимальных статистических критериев // Укр. мат. журн. – (в печати).
3. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964. – 300 с.
4. *Закс Ш.* Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И.* Шкалы банаховых пространств // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 2. – С. 89 – 168.
6. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1969. – 151 с.
7. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974. – 491 с.
8. *Rao C. R., Slater P.* Multivariate analysis applied to differences between neurotic groups // Brit. J. Psychol. (Statist. Sec.). – 1949. – **2**, № 1. – P. 17 – 26.
9. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. – М.: Сов. радио, 1962. – 648 с.
10. *Кендалл М., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 587 с.

Получено 16.08.91