УДК 517.95

В. М. Борок, д-р физ.-мат. наук,
Э. Кенне, асп. (Харьк. ун-т)

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В УЗКОЙ ПОЛОСЕ

For the general linear partial differential equation with constant coefficients, a criterion of correctness is established for a boundary-value problem on the strip $\Pi_Y = \mathbb{R} \times [0, Y]$ with an integral in the boundary condition. A complete classification of such problems is obtained dependently on their asymptotic properties as $Y \to 0$.

Для загального лінійного рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами встановлено критерій коректності крайової задачі у смузі $\Pi_Y = \mathbb{R} \times [0, Y]$ з інтегралом у граничній умові. Одержана повна класифікація цих задач відносно їх асимптотичних властивостей при $Y \to 0$.

Увеличение числа работ, посвященных исследованию нелокальных краевых задач, имеет, по-видимому, две причины: во-первых, подобные задачи все чаще встречаются как модели различных физических и технических процессов, и математики обращают внимание на целесообразность и необходимость их исследования (см., например, [1 – 3]; во-вторых, установлено [4], что для ряда уравнений невозможна корректная постановка локальных задач.

Рассмотрим с позиций общей теории дифференциальных уравнений в частных производных следующую краевую задачу:

$$\partial u(x, y)/\partial y = P(\partial/\partial x)u(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, Y] = \Pi_Y, \tag{1}$$

$$Au(x, 0) + Bu(x, Y) + C\int_0^Y u(x, y)\,dy = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Здесь $P(s)$ — произвольный полином с постоянными (комплексными) коэффициентами, $A, B, C \in \mathbb{C}$, $|A|+|B|+|C| > 0$, $u_0(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — заданная, а $u(x, y)\colon \Pi_Y \to \mathbb{C}$ — искомая функции.

***Определение* 1.** *Задача* (1), (2) *называется корректной, если для любого* $m > 0$ *найдется* $n > 0$ *такое, что для любой функции* $u_0(x) \in C^n(\mathbb{R})$ *такой, что*

$$\|u_0(x)\|_n = \sup_{\mathbb{R}} \max_{0\le j\le n} |\partial^j u_0(x)/\partial x^j| < \infty,$$

задача (1), (2) *имеет единственное ограниченное в* Π_Y *вместе с производными по* x *до порядка* m *включительно решение* $u(x, y)$ *и* $\sup_{[0,\,Y]} \|u(x, y)\|_m \le$ $\le C\|u_0(x)\|_n$.

Это определение аналогично определению равномерной корректности задачи Коши, данному И. Г. Петровским в известной работе [5], с которой, по сути, и началась общая теория дифференциальных уравнений.

***Определение* 2.** *Задачу* (1), (2) *назовем: асимптотически корректной при* $Y \to 0$ (АК-*задачей*), *если существует* $\delta > 0$ *такое, что при* $Y \in]0, \delta[$ *эта задача корректна; асимптотически некорректной* (АН-*задачей*), *если она некорректна при любом значении* $Y \in]0, \delta[$, $\delta > 0$; *асимптотически смешанной задачей* (АС-*задачей*), *если для любого* $\delta > 0$ *существует* $Y_1, Y_2 \in]0, \delta[$

© В. М. БОРОК, Э. КЕННЕ, 1994

такие, что задача (1), (2) *корректна при* $Y = Y_1$ *и некорректна при* $Y = Y_2$.

В настоящей статье получены следующие результаты.

1. В п. 1 дан критерий корректности задачи (1), (2), состоящий во всех случаях, за исключением задачи Коши $(AB = C = 0)$, в выполнении условия

$$\Delta_Y(\sigma) \equiv h(YP(i\sigma)) \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где

$$\begin{cases} h(z) = A + B\exp z + CY(\exp z - 1)/z, & z \neq 0, \\ h(0) = A + B + CY. \end{cases} \tag{4}$$

В случае задачи Коши условие (3) выполнено для любого $P(s)$, а критерием корректности служит условие A И. Г. Петровского [5]:

$$|A| \sup_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} P(i\sigma) - |B| \inf_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} P(i\sigma) < \infty. \tag{5}$$

2. В п. 2 в соответствии с определением 2 дана полная классификация задач (1), (2) в зависимости от A, B, C и $P(s)$.

***Замечание* 1.** Частные случаи задачи (1), (2) изучались ранее и были получены критерии их корректности: случай $AB = C = 0$ — задача Коши [5]; случай $C = 0$, $AB \neq 0$ [6]; случай $A = B = 0$ [7]. Результаты в этих случаях совпадают с полученными в п. 1.

1. Критерий корректности. В силу замечания можем ограничиться изучением случая $C(|A| + |B|) \neq 0$. Будем впредь обозначать

$$\operatorname{Re} P(i\sigma) \equiv P_1(\sigma); \quad \operatorname{Im} P(i\sigma) \equiv P_2(\sigma);$$

$$\mathbb{R}_{\sigma_0} = \{\sigma \in \mathbb{R} : |\sigma| \geq \sigma_0\} \quad (\sigma_0 > 0);$$

$$\mathbb{R}_{\sigma_0}^{\lambda} = \{\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0} : \lambda\sigma \geq \sigma_0\} \quad \lambda = \pm 1;$$

$$N_h = \{\sigma \in \mathbb{R} : h(\sigma) = 0\}; \quad N_h^C = \{s \in \mathbb{C} : h(s) = 0\}.$$

Запись $f(\sigma) \leq g(\sigma)$ $(\sigma \to \lambda\infty)$ означает, что существует $\sigma_0 > 0$ и $\lambda \in \{1, -1\}$ такие, что $f(\sigma) \leq g(\sigma)$ при $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}^{\lambda}$; $\delta(s) \equiv As + Bs\exp s + C(\exp s - 1)$.

Установим ряд вспомогательных фактов.

Лемма 1. *При* $AB \neq 0$ *достаточно большие (по модулю) нули* s_k *функции* $\delta(s)$ *представимы в виде*

$$s_k = \ln(-A/B) + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j k^{-j}, \quad \zeta_j \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{s}_k$ — нули функции $\tilde{\delta}(s) \equiv (A + B\exp s)s$. Тогда (при подходящей нумерации) $s_k = \tilde{s}_k + o(1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \to \infty$ ([8], гл. 12). Положив

$$\gamma_0 = \arg(-A/B), \quad \mu_k = s_k - \ln|A/B| + i(\gamma_0 + 2k\pi),$$

$$\delta(\kappa, \mu) \equiv -[B\ln|A/B| + iB(\gamma_0 + 2\kappa\pi) + B_\mu + C]A\exp\mu/B +$$

$$+ A[\ln|A/B| + \mu + 2\kappa\pi i + i\gamma_0] - C,$$

$$\delta_1(\kappa, \mu) \equiv \kappa\delta(1/\kappa, \mu),$$

убеждаемся в том, что

$$\delta(\kappa, \mu_k) = \delta(s_k) = 0, \quad \delta_1(0,0) = 0, \quad \partial\delta_1(0,0)/\partial\mu = 2\pi Ai \neq 0.$$

Таким образом, при достаточно малых значениях $|\kappa|$ уравнение $\delta_1(\kappa, \mu) = 0$ определяет аналитическую функцию

$$\mu = \mu(\kappa) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \kappa^j, \quad \zeta_j \in \mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что при больших значениях $|\kappa|$ корни μ_k уравнения $\delta(\kappa, \mu) = 0$ представимы в виде

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \kappa^{-j}, \quad \zeta_j \in \mathbb{C},$$

откуда, возвращаясь к нулям s_k функции $\delta(s)$, получаем искомое.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (3). *Тогда при некоторых* $M > 0$ *и* $\mu \in \mathbb{R}$ *справедливо оценка*

$$|\Delta_Y(\sigma)| \geq M(1+|\sigma|)^{\mu}, \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть сначала $AB \neq 0$ и $\inf \rho(YP(i\sigma), N_h^C) > 0$. Тогда [8] справедлива оценка (7) при $\mu = 0$. Если $\inf \rho(YP(i\sigma), N_h^C) = 0$, то $YP_1(\sigma) \equiv \ln|A/B|$. Считая при этом $p = \deg P_2(\sigma) > 0$ (при $P(i\sigma) \equiv \mathrm{const}$ утверждение тривиально) из (6) заключаем, что

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \kappa^{-j} \not\equiv 0,$$

и значит, при некотором $j_0 \geq 1$ имеем $\mathrm{Re}\,\zeta_{j_0} \neq 0$, $\mathrm{Re}\,\zeta_j = 0$ при $1 \leq j < j_0$. Если $k(\sigma) \in \mathbb{Z}$ таково, что $\inf\limits_{\mathbb{Z}} \rho(YP(i\sigma), N_h^C) = |YP(i\sigma) - s_{k(\sigma)}|$, то $YP_2(\sigma) - \gamma_0 - 2k(\sigma)\pi = o(1)$ ($|\sigma| \to \infty$), откуда $|k(\sigma)| \leq a_0|\sigma|^p$, $|\sigma| \to \infty$, $a_0 > 0$. С другой стороны,

$$|YP(i\sigma) - s_{k(\sigma)}| \geq |YP_1(\sigma) - \mathrm{Re}\, s_{k(\sigma)}| \geq$$

$$\geq |\mathrm{Re}\,\zeta_{j_0}|\,|k(\sigma)|^{-j_0}/2 \geq a_1|\sigma|^{-pj_0}, \quad a_1 > 0,$$

$|\sigma|$ — достаточно большая величина.

Записав $\Delta_Y(\sigma) = h(YP(i\sigma))$ в виде

$$\Delta_Y(\sigma) = (s - s_k)[B \exp s_k (\exp(s - s_k) - 1)/(s - s_k) +$$

$$+ CY(1 - \exp s_k + s_k \exp s_k (\exp(s - s_k) - 1)/(s - s_k))/(ss_k)]$$

при $s = YP(i\sigma)$, $s_k = s_{k(\sigma)}$ и учитывая, что $\exp s_k \to -A/B$, $(\exp(s - s_k) - 1)/(s - s_k) \to 1$ при $|\sigma| \to \infty$, заключаем, что

$$|\Delta_Y(\sigma)| \geq |A||YP(i\sigma) - s_{k(\sigma)}|/2, \quad \sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}.$$

Из этого неравенства с учетом предыдущего получаем (7).

Если $A = 0$, $B \neq 0$, то [8]

$$s_k = x_k + i y_k, \quad x_k = \ln|CY/B| - \ln|2k\pi + \gamma_0 \mp \pi/2| + o(1);$$

$$y_k = 2k\pi + \gamma_0 \mp \pi/2 + o(1), \quad |k| \to \infty, \quad \gamma_0 = \arg(C/B).$$

Отсюда заключаем, что

$$\inf_{\mathbb{R}} \rho(YP(i\sigma), N_h^C) > 0,$$

и значит, справедливо (7) с $\mu = 0$.

При $A \neq 0$, $B = 0$ (большие по модулю) нули s_k функции $h(s)$ асимптотически близки к нулям $\tilde{s}_k$ функции $\tilde{h}(s) = As + CY\exp(Ys)$ и $\tilde{s}_k = \xi_k + i\eta_k$, ξ_k, $\eta_k \in \mathbb{R}$, — решения системы $\exp\xi\cos\eta = a\xi - b\eta$, $\exp\xi\sin\eta = b\xi + a\eta$ с большими значениями $|\xi_k + i\eta_k|$ (здесь $a = \mathrm{Re}(-CY/A)$, $b = \mathrm{Im}(-CY/A)$). Но тогда $\xi_k \to +\infty$ и при этом $\xi_k = \ln|k|(1 + o(1))$, $\eta_k = k\pi(1 + o(1))$, $|k| \to \infty$. Отсюда, как и в предыдущем случае, следует (7) с $\mu = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (3). *Тогда функция*

$$R(\sigma, y) \equiv \exp(yP(i\sigma))/\Delta_Y(\sigma)$$

имеет следующие свойство: $\forall\, q \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists\, c_q > 0$ *и* $\exists\, m_q \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$|\partial^q R(\sigma, y)/\partial y^q| \leq C_q (1 + |\sigma|)^{m_q}, \quad (\sigma, y) \in \Pi_Y. \tag{8}$$

Доказательство. Ясно, что можно ограничиться рассмотрением $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$ с каким-либо $\sigma_0 > 0$ и считать $\deg P > 0$. Если $P(i\sigma) \neq 0$ при $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$, то легко установить формулу

$$\partial^q R(\sigma, y)/\partial y^q = [P(i\sigma)\Delta_Y(\sigma)]^{-(1+q)} \sum_{j=0}^{q} H_{qj}(\sigma, y) \exp[(y + jY)P(i\sigma)],$$

где $H_{qj}(\sigma, y)$ — полином по σ. Отсюда вытекает справедливость (8) при $\deg P_1(\sigma) > 0$ при $P_1(\sigma) \equiv \mathrm{const}$ следует также использовать (7). Лемма доказана.

Теорема 1 *(критерий корректности задачи* (1), (2)). *Задача* (1), (2) *корректна тогда и только тогда, когда:*

а) в случае $|C| + |AB| \neq 0$ *выполнено условие* (3);

б) в случае $C = AB = 0$ *выполнено условие* (5).

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай а). Наряду с (1), (2) рассмотрим следующую задачу (с параметром $\sigma \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} dv(\sigma, y)/dy = P(i\sigma)v(\sigma, y), \\ Av(\sigma, 0) + Bv(\sigma, Y) + C\int_0^Y v(\sigma, y)\,dy = v_0(\sigma). \end{cases} \tag{9}$$

Если бы решение $u(x, y)$ и функция $u_0(x)$ в задаче (1), (2) допускали преобразование Фурье $\mathfrak{F}\{u(x, y)\} = v(\sigma, y)$ и $\mathfrak{F}\{u_0(x)\} = v_0(\sigma)$, то $v(x, y)$ было бы решением задачи (9). Решение задачи (9) при $\sigma \,\overline{\in}\, N_{\Delta_y}$ записывается в виде

$$v(\sigma, y) = R(\sigma, y)v_0(\sigma) \tag{10}$$

($R(\sigma, y)$ см. в лемме 3). На основании формулы (10) и оценки (8) факт корректности задачи (1), (2) устанавливается методом И. Г. Петровского ([5]; см. также [6]) с помощью разложения единицы.

Если условие (3) нарушено и $\Delta_Y(\sigma_0) = 0$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, то функция $u(x, y) \equiv \equiv \exp[yP(i\sigma_0) + ix\sigma_0]$ является решением (1) и удовлетворяет (2) с $u_0(x) \equiv 0$. Тогда задача (1), (2) некорректна. Теорема доказана.

2. Классификация задач. Определение 2 и теорема 1 показывают, что классификация задач (1), (2) сводится к проблеме наличия вещественных нулей у функции $\Delta_Y(\sigma)$ при малых значениях $Y > 0$ за исключением случая задачи Коши ($AB = C = 0$), которая корректна при любом $Y > 0$, если условие (5) выполнено, и некорректна $(\forall\, Y > 0)$ в противном случае. Поэтому впредь всегда $|AB| + |C| > 0$.

Пусть сначала $P(i\sigma) \equiv p = \text{const}$. Из (4) видно, что при $A + B \neq 0$ задача (1), (2) является АК-задачей, а при $A + B = 0$ имеем $\Delta_Y(\sigma) \equiv CY$, если $p = 0$ и $\Delta_Y(\sigma) \equiv [\exp(pY) - 1](B + C/P)$ при $p \neq 0$. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $P(s) \equiv p = \text{const}$, *то при* $|A + B| + |pB + C| \neq 0$ *задача* (1), (2) *является* АК-*задачей, в противном случае —* АН-*задачей.*

Впредь $\deg P(s) > 0$. Сформулируем следующие леммы.

Лемма 4. *Если* $A + B \neq 0$, *то* $\forall\, \sigma_0 > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что* $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$ *при* $Y \in\,]0, \delta[$, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\sigma_0} = \tilde{\mathbb{R}}_{\sigma_0}$.

Доказательство вытекает из равномерного относительно σ на множестве $\tilde{\mathbb{R}}_{\sigma_0}$ стремления $\Delta_Y(\sigma)$ к числу $A + B$ при $Y \to +0$.

Лемма 5. *Пусть* $r_j(\sigma) \not\equiv 0$, $j = 1, 2, 3$, *— рациональные функции,* $r_2(\sigma) > > 0$. *Тогда функция* $\rho(\sigma) \equiv r_1(\sigma) \ln r_2(\sigma) + \mu \operatorname{arctg} r_3(\sigma)$, $\mu \in \mathbb{R}$, *строго монотонна на каждом из множеств* $\mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$, $\lambda = +1$ *и* $\lambda = -1$, *при достаточно большом значении* $\sigma_0 > 0$.

Доказательство. Из представления функции $\rho'(\sigma) = r_1'(\sigma)[\ln r_2(\sigma) + + r_4(\sigma)]$, $r_4(\sigma)$ — рациональная функция, видно, что $\rho'(\sigma)$ сохраняет знак на множествах $\mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$ $(\lambda = +1$ и $\lambda = -1)$, если σ_0 достаточно велико. Лемма доказана.

Считая $\sigma_0 > 0$ достаточно большим и $P_1(\sigma) \not\equiv 0$, рассмотрим на множестве $\mathbb{R}_{\sigma_0}$ функцию

$$\psi(\sigma) \equiv \{P_2(\sigma) \ln|(C - AP(i\sigma))/(C + BP(i\sigma))|/P_1(\sigma) - \\ - \arg[(C - AP(i\sigma))/(C + BP(i\sigma))]\}\ /2\pi. \tag{11}$$

Лемма 6. *Функция* $\psi(\sigma)$ *имеет следующие свойства в случаях:*

а) $|A| = |B|$;

б) $|A| \neq |B|$, $\deg P_2(\sigma) < \deg P_1(\sigma)$;

в) $|A| \neq |B|$, $\deg P_2(\sigma) = \deg P_1(\sigma)$, $AB \neq 0$;

существуют конечные пределы $\lim\limits_{\sigma\to+\infty} \psi(\sigma)$ *и* $\lim\limits_{\sigma\to-\infty} \psi(\sigma)$; *в случаях:*

г) $|A| \neq |B|$, $\deg P_2(\sigma) = \deg P_1(\sigma)$, $AB = 0$;

д) $|A| \neq |B|$, $\deg P_2(\sigma) > \deg P_1(\sigma)$;

справедливо соотношение $\lim\limits_{\sigma\to\infty} |\psi(\sigma)| = \infty$.

Доказательство в случаях б), в) и д) является очевидным. В случае а) при $A = B = 0$ или $C = 0$ утверждение также очевидно. Если $AC \neq 0$ (следовательно, $ABC \neq 0$), его справедливость вытекает из формулы

$$|C - AP|^2 / |C + BP|^2 = 1 - (2/|C + BP|^2) \operatorname{Re}[(A + B)\overline{C}P].$$

Наконец, в случае г), учитывая, что $\deg P(i\sigma) > 0$, а дробь $P_2(\sigma)/P_1(\sigma)$ стремится к конечному пределу (при $\sigma \to +\infty$ и при $\sigma \to -\infty$), получаем требуемое.

Следствие 1. *В случаях а) – в) леммы* 6 $\psi(\mathbb{R}_{\sigma_0}) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$ *(при достаточно большом значении* $\sigma_0 > 0$*) тогда и только тогда, когда* $\psi(\sigma) \equiv \mathrm{const} \in \mathbb{Z}$. *В случаях г) и д) при любом* $\sigma_0 > 0$ *и при* $\lambda = +1$ *и* $\lambda = -1$ *имеем* $\psi(\mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}) \cap \mathbb{Z} \neq \varnothing$.

Приступая к классификации задач (1), (2), напомним, что $\deg P(i\sigma) > 0$, $|C| + |AB| > 0$. Поэтому существует $\sigma_0 > 0$ такое, что $P(i\sigma)(C + BP(i\sigma)) \neq$ $\neq 0$ при $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$. Тогда $N_{\Delta_Y} \cap \mathbb{R}_{\sigma_0} = N_{P\Delta_Y} \cap \mathbb{R}_{\sigma_0}$ и совпадает с множеством лежащих в $\mathbb{R}_{\sigma_0}$ решений системы

$$YP_1(\sigma) = \ln|(C - AP(i\sigma))/(C + BP(i\sigma))|, \tag{12.1}$$

$$YP_2(\sigma) \in \operatorname{Arg}[(C - AP(i\sigma))/(C + BP(i\sigma))]. \tag{12.2}$$

Исследование разобьем на следующие случаи:

$$A + B = 0; \quad A + B \neq 0, \quad P_1(\sigma) \equiv 0; \quad A + B \neq 0, \quad P_2 \equiv 0;$$

$$(A + B)P_1(\sigma)P_2(\sigma) \not\equiv 0.$$

Теорема 3. *Если* $A + B = 0$, *то задача* (1), (2) *является* АК-*задачей при* $N_{C+BP} = \varnothing$ *и* $P_1(\sigma) \not\equiv 0$ *и* АН-*задачей в остальных случаях.*

Доказательство. В рассматриваемом случае

$$\Delta_Y(\sigma) = [\exp(P(i\sigma)Y) - 1][BP(i\sigma) + C]/P(i\sigma),\ \sigma \in N_p;\ \Delta_Y(\sigma) = CY,\ \sigma \in N_p.$$

Если $N_{BP(i\sigma)+C} = \varnothing$ и $P_1(\sigma) \not\equiv 0$, то, поскольку множество $P_2(N_{p_1})$ конечно, при достаточно малых значениях Y получаем $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Следовательно, (1), (2) — АК-задача. Если $N_{BP(i\sigma)+C} \neq \varnothing$, то $\Delta_Y(\sigma) = 0$ при $\sigma \in N_{BP(i\sigma)+C}$, а если $P_1(\sigma) \equiv 0$, то при любом Y получаем $\Delta_Y(\sigma) = 0$, если $\sigma \in \{\sigma \in \mathbb{R} : P_2(\sigma)Y/2\pi \in \mathbb{Z}\}$. В силу теоремы 1 получаем требуемое.

Теорема 4. *Пусть* $A+B \neq 0$, $P_1(\sigma) \equiv 0$. *Тогда задача* (1), (2) *является* АК-*задачей, если* $|A| \neq |B|$ *или* $\operatorname{Im}[\overline{C}(A+B)] \neq 0$; *в остальных случаях она является* АН-*задачей.*

Доказательство. В этом случае уравнение (12.1) не имеет решений в $\mathbb{R}_{\sigma_0}$ (с достаточно большим $\sigma_0 > 0$), если

$$|C-AP(i\sigma)|^2 - |C+BP(i\sigma)|^2 \equiv (|A|^2-|B|^2)P_2(\sigma) + 2\operatorname{Im}[\overline{C}(A+B)] \not\equiv 0.$$

При $\sigma \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{R}_{\sigma_0}$ имеем $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$ при достаточно малых $Y>0$ (см. лемму 4). Отсюда вытекает первое утверждение теоремы. Если же $|A| = |B|$ и $\operatorname{Im}[\overline{C}(A+B)] = 0$, то уравнению (12.1) удовлетворяет любое $\sigma \in \mathbb{R}$, а условие (12.2) принимает вид $\{YP_2(\sigma) - \arg[(C-AP(i\sigma))/(C+BP(i\sigma))]\}/2\pi \in \mathbb{Z}$, и при любом $Y>0$ и любом $\sigma_0>0$ разрешимо при некоторых $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$. Отсюда следует второе утверждение теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $A+B \neq 0$, $P_2(\sigma) \equiv 0$. *Тогда задача* (1), (2) *является* АН-*задачей в случаях:*

а) $AB = 0$, $\operatorname{Im}[\overline{C}(A+B)] = 0$, $\operatorname{Re}[\overline{C}(A+B)] \neq 0$, $(|A|-|B|)P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$;

б) $ABC \neq 0$, $\operatorname{Im}(A\overline{B}) = 0$, $\operatorname{Re}(A\overline{B}) < 0$, $\operatorname{Im}[\overline{C}(A+B)] = 0$ *и либо* $(|A|-|B|)P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$, *либо* $|A| = |B|$, *либо* $\operatorname{Re}[\overline{C}(A+B)] < 0$;

в) $C = 0$, $\operatorname{Re}(A\overline{B}) < 0$, $\operatorname{Im}(A\overline{B}) = 0$, $(|A|-|B|)P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$.

В остальных случаях (1), (2) *является* АК-*задачей.*

Доказательство. *Случай а).* Поскольку $AB = 0$, то

$$(|A|-|B|)\ln|(C-AP(i\sigma))/(C+BP(i\sigma))| > 0, \quad |\sigma| \to \infty,$$

поэтому условие $(|A|-|B|)P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$, является необходимым и достаточным для разрешимости (12.1) при некотором $\sigma \in \mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$ и любом достаточно малом $Y>0$. Условие (12.2) принимает вид

$$\arg[|C|^2 + (C\overline{B} - A\overline{C})P_1(\sigma)] = 0, \quad \sigma \to \lambda\infty,$$

что равносильно требованию

$$\operatorname{Im}[\overline{C}(A+B)] = 0, \quad P_1(\sigma)\operatorname{Re}[\overline{C}(B-A)] > 0, \quad \sigma \to \lambda\infty.$$

Учитывая условие разрешимости (12.1), можем заменить последнее неравенство неравенством $\operatorname{Re}[\overline{C}(A+B)] < 0$. Итак, в случае а) условие (12.1), (12.2) выполняется при любом значении $Y>0$ и некотором $\sigma \in \mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$ и, значит, $\Delta_Y(\sigma) = 0$.

Случай б). Учитывая, что неравенство $|C-AP(i\sigma)| \gtrless |C+BP(i\sigma)|$ равносильно неравенству $(|A|^2-|B|^2)P_1^2(\sigma) - 2\operatorname{Re}[\overline{C}(A+B)P_1(\sigma)] \gtrless 0$, замечаем, что необходимым и достаточным условием разрешимости (12.1) при достаточно малых $Y>0$ на множестве $\mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$ является условие $(|A|-|B|)P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$, при $|A| \neq |B|$ и условие $\operatorname{Re}[\overline{C}(A+B)] < 0$ при $|A| = |B|$. Условие (12.2) принимает вид $\gamma_0 + \operatorname{arctg}\varphi(\sigma) + 2k\pi \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}$, где

$$\gamma_0 = \arg(-A\overline{B}), \quad \varphi(\sigma) \equiv [\operatorname{Im}(1 - C/AP_1(\sigma))(1 +$$

$$+ C/BP_1(\sigma))]/[\operatorname{Re}(1 - C/AP_1(\sigma))(1 + C/BP_1(\sigma))] = o(1) \quad |\sigma| \to \infty;$$

последнее уравнение имеет решение лишь при условии $\gamma_0 = 0$, $\varphi(\sigma) \equiv 0$, $k = 0$, откуда $\operatorname{Im}(A\overline{B}) = 0$, $\operatorname{Re}(A\overline{B}) < 0$, $\operatorname{Im}[\overline{C}(A+B)] = 0$. В сочетании с требованием разрешимости (12.1) получаем результат теоремы для случая б).

Случай в). Уравнение (12.1) принимает вид $YP_1(\sigma) = \ln|A/B|$, и его разрешимость в $\mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$ при малых $Y > 0$ равносильна требованию $(|A|-|B|)P_1(\sigma) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$. Условие (12.2) имеет вид $0 \in \operatorname{Arg}(-A/B)$, откуда $\operatorname{Re}(A\overline{B}) < 0$, $\operatorname{Im}(A\overline{B}) = 0$.

Если же условия а) – в) не выполняются, то при $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$ система (12.1), (12.2) неразрешима и, значит, $\Delta_Y(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$; учитывая лемму 4, заключаем, что (1), (2) — АК-задача.

Теорема 6. *Пусть* $(A+B)P_1(\sigma)P_2(\sigma) \not\equiv 0$, $\deg P(i\sigma) > 0$, $|C| + |AB| > 0$. *Тогда задача* (1), (2) *является:*

i) АН-*задачей в случае*

$$C = 0,\ |A| \neq |B|,\ P_1(\sigma)(|A| - |B|) > 0, \quad \sigma \to \lambda\infty,\ P_2(\sigma) \equiv \gamma P_1(\sigma),$$

$$[\gamma \ln|A/B| - \arg(-A/B)]/2\pi \in \mathbb{Z};$$

ii) АС-*задачей в случае* $|A| \neq |B|$, $P_1(\sigma)(|A|-|B|) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$, *и либо* $\deg P_2(\sigma) > \deg P_1(\sigma)$, *либо* $\deg P_2(\sigma) = \deg P_1(\sigma)$ *и* $AB = 0$;

iii) АК-*задачей в остальных случаях.*

Доказательство. В случае i), очевидно, $AB \neq 0$, уравнение (12.1) имеет вид $YP_1(\sigma) = \ln|A/B|$ и условие $P_1(\sigma)(|A|-|B|) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$, гарантирует его разрешимость при любом достаточно малом $Y > 0$ и некотором $\sigma_Y \in \mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$. Условие (12.2) принимает вид $Y\gamma P_1(\sigma) \in \operatorname{Arg}(-A/B)$ или (при $\sigma = \sigma_Y$) $\gamma \ln|A/B| \in \operatorname{Arg}(-A/B)$, что в случае i) выполнено. Поэтому $\Delta_Y(\sigma_Y) = 0$, и задача (1), (2) является АН-задачей.

В случае ii) из условий $|A| \neq |B|$, $\deg P_2 > \deg P_1$ или $\deg P_2 = \deg P_1$, $AB = 0$, следует $|\psi(\sigma)| \to \infty$, $|\sigma| \to \infty$. Произвольно фиксируя $\delta_0 > 0$ и пользуясь тем, что при $|A| \neq |B|$ требование $P_1(\sigma)(|A|-|B|) > 0$, $\sigma \to \lambda\infty$, $\deg P_1 > 0$, равносильно условию

$$[\ln|(C - AP(i\sigma))/(C + BP(i\sigma))|]P_1(\sigma) \to +0,\ \sigma \to \lambda\infty, \tag{13}$$

можем найти такое $\sigma_0 > 0$, что при $\sigma \in \mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$ (а если (13) выполняется как при $\lambda = +1$, так и при $\lambda = -1$, то и $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$) справедливо неравенство

$$0 < [\ln|(C - AP(i\sigma))/(C + BP(i\sigma))|]/P_1(\sigma) < \delta_0.$$

Далее находим $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что уравнение $\psi(\sigma) = k$ (или уравнение $\psi(\sigma) = -k$) имеет (единственное) решение $\sigma^{\lambda}_k \in \mathbb{R}^{\lambda}_{\sigma_0}$. Пусть

$$Y_k^{\lambda} = [\ln|(C - AP(i\sigma_k^{\lambda}))/(C + BP(i\sigma_k^{\lambda}))|]/P_1(\sigma_k^{\lambda}).$$

Последовательность $Y_j = Y_j^{\lambda} \to +0$ $(|j| \to \infty)$ и монотонна. Если (13) справедливо как при $\lambda = +1$, так и при $\lambda = -1$, то из последовательностей Y_k^{+1} и Y_k^{-1} образуем единую монотонную последовательность $Y_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$. Ясно, что при $Y = Y_j$ система (12) имеет решение σ_j и поэтому задача (1), (2) некорректна. При $Y = Y_j' \in \,]Y_{j+1}, Y_j[$ для решений σ_j' уравнения

$$Y_j' P_1(\sigma) = \ln|(C - AP(i\sigma))/(C + BP(i\sigma))|$$

не выполняется условие (12.2), так как $\psi(\sigma_j') \overline{\in} \mathbb{Z}$. Значит, $\Delta_{Y_j'}(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \in \mathbb{R}_{\sigma_0}$. При $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\sigma_0}$ используем лемму 4; объединяя, получаем $\Delta_{Y_j'}(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $Y_j' > 0$ достаточно мало. Значит, задача (1), (2) корректна при $Y = Y_j'$. В целом получаем, что в случае ii) задача (1), (2) является АС-задачей.

В случае iii) сначала предположим $|A| \neq |B|$. Если условие (13) не выполняется, то уравнение (12.1) неразрешимо, в силу чего, как и прежде, (1), (2) является АК-задачей. Условие (13) равносильно (при $|A| \neq |B|$) требованиям

$$\deg P_1(\sigma) > 0, \quad P_1(\sigma)(|A| - |B|) > 0, \quad \sigma \to \lambda\infty. \tag{14}$$

При выполнении (14) можно в силу леммы 6 и условий iii) утверждать, что $\psi(\sigma) = o(1)$ при $|\sigma| \to \infty$. Этот же факт верен при $|A| = |B|$. Из следствия 1 теперь заключаем, что условие (12.2) выполняется лишь при $\psi(\sigma) \equiv \psi_0 \in \mathbb{Z}$. Но отсюда в случае $|A| \neq |B|$ вытекает случай i), а при $|A| = |B|$ — требование $\operatorname{Re}(A\overline{B}) < 0$, $\operatorname{Im}(A\overline{B}) = 0$, откуда $A + B = 0$. Итак, условие (12.2) нарушается, что приводит к справедливости теоремы в случае iii). Теорема доказана.

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739–740.
2. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292–296.
5. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. ун-та. Секция А. – 1938. – **1**, № 7. – С. 1–72.
6. *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные краевые задачи в слое // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 1. – С. 20–25.
7. *Фардигола Л. В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральным условием // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.
8. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.

Получено 17.07.92