УДК 517.937

Л. М. Герштейн

Об одной связанной системе дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

В настоящей работе предлагается новый подход к исследованию разрешимости систем дифференциальных уравнений, возникающих в задачах термоупругости [1]. Подобные системы могут быть представлены в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами следующего вида:

$$u' + A_1 u + B_1 v' = f, \tag{1}$$

$$v'' + A_2 v + B_2 u = g, \tag{2}$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_1. \tag{3}$$

Здесь u, v — функции, определенные на отрезке $[0, 1]$ со значениями в банаховом пространстве E; A_k, B_k, $k = 1, 2$,— линейные операторы, действующие в пространстве E; f, g — известные функции со значениями в пространстве E, u_0, v_0 и v_1 — элементы этого пространства.

Задача (1)—(3) изучалась в гильбертовом пространстве в работах [2, 3]. Методами, изложенными в [4], установлено существование обобщенного в определенном смысле решения этой задачи и его регулярность по переменной t.

В настоящей работе доказывается существование и единственность решения задачи (1)—(3) в банаховом пространстве. При этом под решением задачи (1)—(3) будем понимать пару функций (u, v), определенных на отрезке $[0, 1]$ со значениями в пространстве E, удовлетворяющих равенствам (1)—(3) и таких, что функции u, u', A_1u, B_2u, v, v'', A_2v, B_1v' определены и непрерывны на всем отрезке $[0, 1]$. При доказательстве используется идея «метода коммутанта» [5, 6]. Абстрактные результаты иллюстрируются на примере начально-краевой задачи для системы уравнений термоупругости в случае одного пространственного переменного.

Относительно операторов A_k, B_k, $k = 1, 2$, сделаем следующие предположения:

I. Области определения операторов A_k, B_k удовлетворяют соотношениям: $D(A_1) = D(A_2) = D_2$, $D(A_1^2) = D(A_2^2)$; $D(B_1) = D(B_2) = D_1$; $\overline{D}_1 = \overline{D}_2 = E$.

II. Оператор A_1 сильно позитивен в пространствах E и D_2.

III. Оператор $A = A_2^{1/2}$ таков, что оператор iA порождает в пространстве E сильно непрерывную группу операторов.

Условия II и III означают, что для операторов A_k определены дробные степени, оператор $-A_1$ порождает аналитическую полугруппу операторов, а оператор A_2 — операторные косинус- и синус-функции.

Если решение задачи (1)—(3) существует, то из уравнения (2) и условия (3) вытекает равенство

$$v(t) = \cos Atv_0 + A^{-1} \sin Atv_1 + \int_0^t A^{-1} \sin A(t-s)[g(s) - B_2u(s)]\, ds. \qquad (4)$$

Так как функция v гладкая и $v(t) \in D_1$, то из (4) следует соотношение

$$B_1v'(t) = -B_1 \sin At \cdot Av_0 + B_1 \cos Atv_1 + \int_0^t B_1 \cos A(t-s)\, g(s)\, ds -$$
$$- \int_0^t B_1 \cos A(t-s) B_2u(s)\, ds = v_{01}(t) + \tilde{g}(t) - \int_0^t B_1 \cos A(t-s) B_2u(s)\, ds. \qquad (5)$$

Подставим функцию B_1v' в уравнение (1) и решим для него задачу Коши. Получим равенство

$$u(t) = \exp\{-tA_1\} u_0 + \int_0^t \exp\{-(t-\tau) A_1\}[f(\tau) - v_{01}(\tau) - \tilde{g}(\tau)]\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \exp\{-(t-\tau) A_1\} \int_0^\tau B_1 \cos A(\tau - s) B_2u(s)\, ds d\tau. \qquad (6)$$

Поменяв в последнем интеграле правой части порядок интегрирования, получим интегральное уравнение относительно функции u вида

$$u(t) - \int_0^t K(t, s)\, u(s)\, ds = \varphi(t), \qquad (7)$$

где

$$K(t, s) = \int_s^t \exp\{-(t-\tau) A_1\} B_1 \cos A(\tau - s) B_2 d\tau, \qquad (8)$$

$$\varphi(t) = \exp\{-tA_1\}u_0 + \int_0^t \exp\{-(t-\tau)A_1\}[f(\tau) - v_{01}(\tau) - \tilde{g}(\tau)]\,d\tau. \quad (9)$$

Если будет показано, что уравнение (7) имеет единственное гладкое решение, то легко показать, что функция v, заданная равенством (4), также обладает нужной гладкостью, и функции (u, v) являются решением системы (1)—(3). С этой целью изучим ядро уравнения (7). Основная идея состоит в том, что в формуле (8) для ядра $K(t, s)$ можно вычислить интеграл с точностью до слагаемых, содержащих коммутанты некоторых операторов. Эти слагаемые при определенных условиях оказываются подчиненными.

Справедливо равенство

$$K(t, s) = \int_s^t B_1 \exp\{-(t-\tau)A_1\}\cos A(\tau - s) B_2 d\tau - \int_s^t \Delta(B_1, \exp\{-(t-\tau)\times$$

$$\times A_1\})\cos A(\tau - s) B_2 d\tau = K_1(t, s) + K_2(t, s).$$

Здесь и далее через $\Delta(P, Q)$ обозначается коммутант операторов P и Q, определяемый равенством $\Delta(P, Q) = PQ - QP$.

Условия I—III позволяют утверждать, что операторы A_1 и A_2 и их квадраты подчинены друг другу. Тогда имеют место оценки [6]

$$\| A_k^{\alpha} A_j^{-\beta} \| \leqslant M, \quad k, j = 1, 2, \quad (10)$$

при всех $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2$. Предположим дополнительно, что

IV. Операторы A_1^* и A_2^* и их квадраты подчинены друг другу. Тогда будут выполнены оценки

$$\overline{\| A_j^{-\beta} A_k^{\alpha}} \| \leqslant M, \quad 0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2, \quad k, j = 1, 2. \quad (11)$$

Относительно операторов B_k, $k = 1, 2$, потребуем, чтобы для всех $\varepsilon > 0$ выполнялись оценки

$$\| B_k A^{-(1/2+\varepsilon)} \|, \quad \| \overline{A_k^{-(1/2+\varepsilon)}} B_j \| \leqslant M, \quad k, j = 1, 2. \quad (12)$$

Наконец наложим ограничения на коммутанты.

V. Существуют такие $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1]$, что оператор $A_1^{-\alpha}\Delta(A_1, A_2)A_1^{-\beta}$ при $\alpha + \beta \geqslant 2 - \rho_1$ и оператор $A_1^{-\alpha}\Delta(B_1, A_1)A_1^{-\beta}$ при $\alpha + \beta \geqslant 3/2 - \rho_2$ допускают замыкание до ограниченных операторов в пространствах E и D_2 и справедливы оценки

$$\| A_1^{-\alpha}\Delta(A_1, A_2)A_1^{-\beta} \| \leqslant M, \quad \alpha + \beta \geqslant 2 - \rho_1,$$

$$\| A_1^{-\alpha}\Delta(B_1, A_1)A_1^{-\beta} \| \leqslant M, \quad \alpha + \beta \geqslant 3/2 - \rho_2. \quad (13)$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* I—V. *Тогда оператор-функция* $K_2(t, s)$ *допускает замыкание до ограниченного оператора при всех* $t, s \in [0, 1]$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, *и справедлива оценка* $\| \overline{K_2(t, s)} \| \leqslant M$ *в нормах пространств* E *и* D_2.

Доказательство. Оператор-функцию K_2 представим в виде

$$K_2(t, s) = \int_s^t \Delta(B_1, \exp\{-(t-\tau)A_1\}) A_2^{1/2+\varepsilon} \cos A(\tau - s) A_2^{-(1/2+\varepsilon)} B_2 d\tau. \quad (14)$$

Рассмотрим оператор $\Delta(B_1, \exp\{-(t-\tau)A_1\})$ и преобразуем его с помощью тождества Иосиды [7]. Положим $\theta(z) = \exp\{-zA_1\}B_1\exp\{-(t-\tau-z)A_1\}$. Тогда

$$\Delta(B_1, \exp\{-(t-\tau)A_1\}) = \theta(0) - \theta(t-\tau) = \int_0^{t-\tau} \exp\{-zA_1\}\Delta(A_1, B_1)\times$$

$$\times \exp\{-(t-\tau-z)A_1\}\,dz.$$

Поэтому можно записать

$$\Delta(B_1, \exp\{-(t-\tau)A_1\})A_2^{1/2+\varepsilon} = \int_0^{t-\tau} \exp\{-zA_1\} A_1^{\alpha} [A_1^{-\alpha}\Delta(A_1, B_1) A_1^{-\beta}] \times$$

$$\times A_1^{\beta+1/2+2\varepsilon} \exp\{-(t-\tau-z)A_1\} [A_1^{-1/2-2\varepsilon} A_2^{1/2+\varepsilon}]\, dz.$$

Выберем α и β так, чтобы $\alpha + \beta = 3/2 - \rho_2$, $\beta + 1/2 + 2\varepsilon < 1$ и $\alpha < 1$. При достаточно малых $\varepsilon > 0$ это возможно. Тогда из оценок (10), условия V и последнего равенства следует оценка

$$\| \Delta(B_1, \exp\{-(t-\tau)A_1\} A_2^{1/2+\varepsilon} \| \leqslant M(t-\tau)^{-(1-\rho_2+2\varepsilon)}. \tag{15}$$

Если $\varepsilon > 0$ выбрать так, чтобы $1 - \rho_2 + 2\varepsilon < 1$, то из неравенства (15) и формулы (14) вытекает утверждение леммы.

Преобразуем теперь оператор-функцию K_1. Имеем

$$K_1(t, s) = \frac{1}{2}\int_s^t B_1 [\exp\{-(t-\tau)A_1\}\exp\{i(\tau-s)A\} + \exp\{-(t-\tau)A_1\} \times$$

$$\times \exp\{-i(\tau-s)A\}] B_2 d\tau = \frac{1}{2}\int_s^t B_1 [\exp\{-(t-\tau)A_1\}\exp\{-i(t-\tau)A\} \times$$

$$\times \exp\{i(t-s)A\} + \exp\{-(t-\tau)A_1\}\exp\{i(t-\tau)A\}\exp\{i(t-s)A\}] B_2 d\tau. \tag{16}$$

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2. *Пусть операторы A, B и $A + B$ порождают сильно непрерывные полугруппы. Тогда справедливо равенство*

$$\exp\{tA\}\exp\{tB\} = \exp\{t(A+B)\} - \int_0^t \exp\{\tau A\}\Delta(B, \exp\{(t-\tau) \times$$

$$\times (A+B)\}\exp\{\tau B\}\, d\tau. \tag{17}$$

Доказательство. Еще раз воспользуемся тождеством Иосиды. Рассмотрим функцию $\psi(\tau)$, заданную равенством $\psi(\tau) = \exp\{\tau A\} \times \exp\{(t-\tau)(A+B)\}\exp\{\tau B\}$. Тогда имеем

$$\psi(t) - \psi(0) = \exp\{tA\}\exp\{tB\} - \exp\{t(A+B)\} = \int_0^t \psi'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \exp\{\tau A\} [\exp\{(t-\tau)(A+A)\} B -$$

$$- B\exp\{(t-\tau)(A+B\}] \exp\{\tau B\}\, d\tau.$$

Отсюда следует равенство (17).

Из условий I—IV следует, что оператор iA вполне подчинен оператору A_1. Поэтому [8] можно утверждать, что операторы $A_1 \pm iA$ сильно позитивны. Положим в равенстве (17) $A = -A_1$, $B = iA$ (или $-iA$). После подстановки полученных равенств в формулу (16) получаем

$$K_1(t, s) = \frac{1}{2}\int_s^t B_1 [\exp\{-(t-\tau)(A_1 + iA)\}\exp\{i(t-s)A\} +$$

$$+ \exp\{-(t-\tau)(A_1 - iA)\}\exp\{-i(t-s)A\}] B_2 d\tau -$$

$$- \frac{i}{2}\int_s^t B_1 \Big[\int_0^{t-\tau} \exp\{-zA_1\}\Delta(A, \exp\{-(t-z)(A_1 + iA)\} \times$$

$$\times \exp\{-izA\}\,dz\Big]\exp\{i(t-s)A\}B_2 d\tau + \frac{i}{2}\int\limits_s^t B_1\Big[\int\limits_0^{t-\tau}\exp\{-zA_1\}\times$$

$$\times\Delta(A, \exp\{-(t-z)(A_1-iA)\})\exp\{izA\}\,dz\Big]\exp\{-i(t-s)A\}B_2 d\tau =$$

$$= K_{11}(t, s) - K_{12}(t, s) + K_{13}(t, s).$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* I—IV. *Тогда оператор-функция* $K_{11}(t, s)$ *допускает замыкание до ограниченного при каждых* $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ *оператора* $\overline{K_{11}(t, s)}$ *и справедлива оценка* $\|\overline{K_{11}(t, s)}\| \leqslant M(t-\tau)^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *в нормах пространств* E *и* D_2.

Доказательство. В силу позитивности операторов $A_1 \pm \pm iA$ для них определены дробные степени. Поэтому после интегрирования получаем ($x \in D_2$)

$$K_{11}(t, s)x = -\frac{1}{2}[B_1(A_1+iA)^{-1}\exp\{-(t-s)(A_1+iA)\}\exp\{i(t-s)A\}\times$$

$$\times B_2 x + B_1(A_1-iA)^{-1}\exp\{-(t-s)(A_1-iA)\}\exp\{-i(t-s)A\}B_2 x] =$$

$$= -\frac{1}{2}[B_1(A_1-iA)^{-1/2-\varepsilon}(A_1-iA)^{3\varepsilon}\exp\{-(t-s)(A_1-iA)\}\times$$

$$\times(A_1+iA)^{-1/2-2\varepsilon}A^{1+\varepsilon}\exp\{-i(t-s)A\}A_2^{-1/2-\varepsilon}B_2 x +$$

$$+ B_1(A_1+iA)^{-1/2-\varepsilon}(A_1+iA)^{3\varepsilon}\exp\{-(t-s)(A_1+iA)\}\times$$

$$\times(A_1+iA)^{-1/2-2\varepsilon}A^{1+\varepsilon}\exp\{i(t-s)A\}A_2^{-1/2-\varepsilon}B_2 x. \qquad (18)$$

Для операторов $(A_1 \pm iA)\exp\{-(t-s)(A_1 \pm iA)\}$ справедливы оценки $\|(A_1 \pm iA)^{3\varepsilon}\exp\{-(t-s)(A_1 \pm iA)\}\| \leqslant M(t-s)^{-3\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$. Остальные операторы в правой части равенства (18) или ограничены, или допускают замыкание до ограниченных при всех $\varepsilon > 0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Прежде, чем будет установлена подобная оценка для оператор-функций $K_{1j}(t, s)$, $j = 2, 3$, изучим связь между коммутантами $\Delta(A_1, A_2)$ и $\Delta(A_1, A) = \Delta(A_1, A_2^{1/2})$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* I—V. *Тогда справедлива оценка*

$$\|A_1^{-\alpha}\Delta(A_1, A_2^{\gamma})A_1^{-\beta}\| \leqslant M \qquad (19)$$

для всех $\gamma \in (0, 1]$, $\alpha + \beta \geqslant 1 + \gamma - \rho_3$ *и* $0 < \rho_3 < \rho_1$.

Доказательство. Утверждение вытекает из формулы для дробных степеней оператора и тождества

$$A_1 A_2(\lambda I + A_2)^{-1} - (\lambda I + A_2)^{-1}A_2 A_1 = \lambda R_{A_2}(\lambda)\Delta(A_1, A_2)R_{A_2}(\lambda).$$

Имеем ($x \in D_2$)

$$A_1^{-\alpha}\Delta(A_1, A_2^{\gamma})A_1^{-\beta} = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\lambda^{\gamma}[A_1^{-\alpha}A_2^{\alpha-\varepsilon}]A_2^{1-\gamma}R_{A_2}(\lambda)\times$$

$$\times[A_2^{-\alpha+\gamma+\varepsilon-1}\Delta(A_1, A_2)A_2^{-\beta+\varepsilon}]A_2^{\beta-\varepsilon}R_{A_2}(\lambda)A_2 A_1^{-\beta}x\,d\lambda. \qquad (20)$$

Оператор $A_2^{-\alpha+\gamma+\varepsilon-1}\Delta(A_1, A_2)A_2^{-\beta+\varepsilon}$ запишем в виде

$$A_2^{-\alpha+\gamma+\varepsilon-1}A_1^{\alpha-\gamma-2\varepsilon-1}[A_1^{-\alpha+\gamma+2\varepsilon-1}\Delta(A_1, A_2)A_1^{-\beta+2\varepsilon}]A_1^{-\beta-2\varepsilon}A_2^{-\beta+\varepsilon}.$$

Из условия V следует, что при $\alpha + \beta \geqslant 1 + \gamma - \rho_3$, где $\rho_3 \geqslant \rho_1 + 4\varepsilon$, выполняется неравенство $(\alpha - \gamma - 2\varepsilon + 1) + (\beta - 2\varepsilon) \geqslant 2 - \rho_1$ и оператор в квадратных скобках последней формулы допускает замыкание до ограниченного. Тогда интеграл в равенстве (20) сходится. Отсюда следует оценка (19).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* I—V. *Тогда оператор-функции* K_{12} *и* K_{13} *при всех* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ *допускают замыкание до ограниченных операторов в пространствах* E *и* D_2 *и справедливы оценки* $\| \overline{K_{1j}(t, s)} \| \leqslant M$, $j = 2, 3$.

Доказательство. Рассмотрим оператор-функцию K_{12} и запишем ее в виде $(x \in D_2)$

$$K_{12}(t, s)\, x = \frac{i}{2} \int_s^t B_1 A_1^{-1/2-\varepsilon} \int_0^{t-\tau} A_1^{1-\varepsilon} \exp\{-zA_1\} [A_1^{-1/2+2\varepsilon} \Delta (A, \exp\{-(t-z) \times$$

$$\times (A_1 + iA)\}) A_1^{1/2+2\varepsilon}]\, dz\, A_1^{-1/2-2\varepsilon} A_2^{1/2+\varepsilon} \exp\{i(t-s)A\} A_2^{-1/2-\varepsilon} B_2 x d\tau. \quad (21)$$

Здесь ε — произвольное число, большее нуля. Так же, как в лемме 1, устанавливается оценка

$$\| A_1^{-1/2+2\varepsilon} \Delta (A, \exp\{-(t-z)(A_1 + iA)\} A_1^{1/2+2\varepsilon} \| \leqslant M (t-z)^{-(1-\rho_1+3\varepsilon)}. \quad (22)$$

Выберем ε так, чтобы $\rho_4 = \rho_1 - 3\varepsilon > 0$. Тогда из равенства (21), оценки (22) и неравенств (10), (11) следует оценка

$$\| K_{12}(t, s)\, x \|_E \leqslant M \| x \|_E \int_s^t \int_0^\tau \frac{dz d\tau}{z^{1-\varepsilon} (t-z)^{1-\rho_4}} \leqslant M_1 \| x \|_E.$$

Аналогично устанавливается оценка для K_{13} в пространстве E. Оценки для этих операторов в нормах пространства D_2 вытекают из неравенств (10), (11) и условия V в пространстве D_2.

Леммы 1—5 позволяют утверждать, что ядро уравнения (7) допускает при всех $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ замыкание до ограниченного оператора $\overline{K(t, s)}$ в пространствах E и D_2 и справедлива оценка

$$\| \overline{K(t, s)} \| \leqslant M (t-s)^{-1+\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \quad (23)$$

На основании этой оценки методами работы [9] устанавливается однозначная разрешимость интегрального уравнения

$$u(t) - \int_0^t \overline{K(t, s)}\, u(s)\, ds = \varphi(t). \quad (24)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* I—V *и условия*:

VI. $u_0 \in D_2$, $v_0 \in D_2$, $v_1 \in D_1$.

VII. *Функция* f *удовлетворяет условию Гельдера, функция* $B_2 g$ *определена и непрерывна на отрезке* [0, 1].

Тогда существует единственное решение и уравнения (24), *для которого определены и непрерывны на отрезке* [0, 1] *функции* u', $A_1 u$, $B_2 u$.

Найденное решение u уравнения (24), обладая нужной гладкостью, является одновременно и решением уравнения (7). Подставив его в равенство (4), получим функцию v. Далее, используя гладкость функции u и формулу (4), доказываем, что на отрезке [0, 1] определены и непрерывны функции v'', $A_2 v$, $B_1 v'$. Остается воспользоваться связью между гладкими решениями интегральных уравнений (4), (7) и решениями системы (1)—(3), о которой упоминалось выше. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существует единственное решение* (u, v) *задачи* (1)—(3).

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a_1(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + K_1(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = f(t, x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2(x)\frac{\partial \theta}{\partial x} = g(t, x), \qquad (25)$$

$$\theta(t, 0) = \theta(t, l) = 0, \; u(t, 0) = u(t, l) = 0,$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x), \; u(0, x) = u_0(x), \; u'_t(0, x) = u_1(x),$$

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Система (25) описывает деформации, возникающие в неоднородном стержне под действием неоднородного поля температур.

Введем в пространстве $E = L_p(0, l)$ операторы A_j и B_j, $j = 1, 2$, действующие по формулам $(A_j v)(x) = -a_j(x) v''(x)$, $(B_j v)(x) = K_j(x) v'(x)$, с областями определения соответственно $D_2 = D(A_j) = \{v \in W_p^2(0, l) \mid v(0) = v(l) = 0\} = \overset{0}{W}{}_p^2$, $D_1 = D(B_j) = W_p^1(0, l)$. Задача (25) может быть записана тогда в виде (1)—(3).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия*:

1) $a_j, K_j \in C^4(0, l)$ *и существуют такие положительные константы* d_j, $j = 1, 2$, *что* $a_j(x) \geqslant d_j \, \forall x \in [0, l]$;

2) $\| f(t, x) - f(\tau, x)\|_{L_p} \leqslant M_1 |t - \tau|^{\alpha_1}$, $\| g'_x(t, x) - g'_x(\tau, x)\|_{L_p} \leqslant M_2 |t - \tau|^{\alpha_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$;

3) $\theta_0 \in \overset{0}{W}{}_p^2$, $u_0 \in \overset{0}{W}{}_p^2$, $u_1 \in W_p^1$.

Тогда существует единственное решение (θ, u) *задачи* (25) *такое, что все производные, входящие в уравнение, непрерывны по* $t \in [0, 1]$ в *норме пространства* L_p.

Доказательство теоремы сводится к проверке условий I—VII для введенных выше операторов A_j, B_j и входных данных задачи (25). Из условия 1 и результатов работы [10] вытекает, что оператор A_1 сильно позитивен в пространстве $E = L_p$. Гладкость коэффициентов a_j позволяет рассмотреть операторы A_j в пространстве $D_2 = \overset{0}{W}{}_p^2$ с областью определения $D(A_j^2) = \{v \in W_p^4(0, l) \mid v(0) = v(l) = v''(0) = v''(l) = 0\}$. Из той же работы [10] следует, что оператор A_1 сильно позитивен в пространстве D_2. Таким образом, условие II для оператора A_1 выполнено. Задание операторов A_j, B_j и их областей определения позволяет проверить условие I. Оператор A_2 сильно позитивен в пространстве $E = L_p$, и оператор $-A_2$ порождает аналитическую полугруппу нулевого типа [7, 11 с. 320]. Поэтому оператор $-A = -A_2^{1/2}$ порождает полугруппу с аналогичными свойствами [12, с. 300]. Отсюда следует, что оператор A удовлетворяет условиям теоремы 17.9.2. из [11, с. 515], на основании которой можно утверждать, что оператор iA порождает сильно непрерывную группу, т. е. выполнено условие III. Неравенство (10) и условие IV для эллиптических операторов установлены в [12]. Условия V относительно коммутантов операторов A_j и B_j подробно проверялись в [9]. Неравенства (13) из этого условия имеют место для данных операторов при $\rho_1 = \rho_2 = 1/2$. Наконец, условия 2 и 3 теоремы 3 обеспечивают выполнение условий VI и VII.

Итак, условия I—VII проверены, поэтому из теоремы 2 и определения решения абстрактной задачи (1)—(3) вытекает утверждение теоремы 3.

1. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек.— Киев : Наук. думка, 1978.— 343 с.
2. *Боценюк А. Н., Панков А. А.* Некоторые сцепленные системы абстрактных дифференциальных уравнений типа уравнений термоупругости // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1982.— № 10.— С. 6—8.
3. *Боценюк А. Н., Панков А. А.* Регулярность решений связанных систем абстрактных дифференциальных уравнений типа уравнений термоупругости и двойственных к ним // 17 Воронеж. зим. мат. школа.— Воронеж, 1984.— Ч. 1.— С. 37—39. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 3 июля 1984 г. № 4585-84 Деп.)
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— Т. 1.— 371 с.

5. *Герштейн Л. М., Соболевский П. Е.* Об одном новом подходе к исследованию разрешимости эволюционных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 10.— С. 9—12.
6. *Герштейн Л. М.* Метод коммутанта исследования новых классов дифференциальных уравнений с частными производными // Общая теория граничных задач: Сб. науч. тр.— Киев : Наук. думка, 1983.— С. 258.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1967.— 624 с.
8. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
9. *Герштейн Л. М., Соболевский П. Е.* Об одном новом подходе к исследованию разрешимости дифференциальных уравнений эволюционного типа // Некоторые вопросы высшей математики и ее приложений: Сб. ст.— Воронеж: ВВВАИУ, 1983.— С. 3—18.
10. *Соломяк М. З.* Аналитичность полугруппы, порожденной эллиптическим оператором в пространствах // Докл. АН СССР.— 1959.— **127**, № 1.— С. 37—39.
11. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 829 с.
12. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций // М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М. : Наука, 1966.— 499 с.

Воронеж. высш. воен. авиац. инж. уч-ще

Получено 16.06.86