УДК 517.926.4

Е. В. Воскресенский

О некоторых отношениях эквивалентности дифференциальных уравнений

Отношения эквивалентности в различных классах обыкновенных дифференциальных уравнений вводились многими авторами (см, например, [1—6]). Когда классификация проводится на основе асимптотических свойств решений, то, как правило, соответствующее отношение называется асимптотической эквивалентностью дифференциальных уравнений. Однако наибольшая качественная однородность наблюдается в классах эквивалентности, соответствующих понятию эквивалентности В. В. Немыцкого [3, 5].

В настоящей работе кроме достаточных условий существования различных отношений эквивалентности установлены связи между ними. Для этого выделены классы уравнений, для которых все отношения [1—6] или некоторые из них совпадают. Все эти понятия порождаются асимптотическими инвариантами некоторых отображений, рассматриваемых на решениях дифференциальных уравнений определенного класса.

Рассмотрим уравнения

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \tag{1}$$

$$\partial y/dt = A(t)y, \tag{2}$$

где $A(\cdot):[T, +\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ — непрерывное отображение, $f \in C(D)$, $D = [T, +\infty) \times R^n$.

Пусть $N_0 \subseteq M \subseteq N$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $|f_j(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \lambda_j(t, |x_{j_1}|, \ldots, |x_{jq}|)$, $j_1, \ldots, j_q \in M$, $g = g(j)$, $j \in N$. Здесь $\lambda_j : [T, +\infty) \times R_+^g \to R_+^1$, $R_+^1 = [0, +\infty)$, $\lambda_j \in C([T, +\infty) \times R_+^g)$, $\lambda_j(t, r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_g) \leqslant \lambda_j(t, \bar{r}_1, \ldots \bar{r}_i, \ldots, \bar{r}_g)$, $r_i \leqslant \bar{r}_i$, $i = \overline{1, g}$ при всех $j \in N$ и любом $t \in [T, +\infty)$.

Фундаментальную матрицу $Y(t) = (y_{ij}(t))$, $i, j = \overline{1, n}$, уравнения (2) будем считать нормированной в точке $t = t_0 \in [T, +\infty)$ и $Y^{-1}(t) = (y^{ji}(t))$.

Пусть непрерывные функции $\mu_i : [t_0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $m_i : [t_0, +\infty) \to (0, +\infty)$ удовлетворяют неравенствам

$$\mu_i(t) \geqslant \max_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|, \quad T \leqslant t_0 \leqslant t < +\infty, \quad i \in M,$$

$$m_i(t) \geqslant \max_{j \in M} \{\max |y_{ij}(t)|, \quad \mu_j(t)\}, \quad T \leqslant t_0 \leqslant t < +\infty, \quad i \in M,$$

и при любом $c \geqslant 0$

$$\int_{t_0}^{+\infty} |y^{jk}(s)| \lambda_j(s, cm^j(s))\, ds < +\infty, \quad j \in N, \quad k \in N_0, \tag{3}$$

$$\int_{t}^{+\infty} \Big| \sum_{k \in M/N_0} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \Big| \lambda_j(s, cm^j(s))\, ds = o(\mu_i(t)) \tag{4}$$

при $t \to +\infty$, $i \in M$, $j \in N$,

$$\int_{t_0}^{t} \Big| \sum_{k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \Big| \lambda_j(s, cm^j(s))\, ds = o(\mu_i(t)) \tag{5}$$

при $t \to +\infty$, $i \in M$, $j \in N$, $m^j(s) = (m_{j_1}(s), \ldots, m_{jq}(s))$, $g = g(j)$, $j_1, \ldots, j_q \in M$, $M = N \setminus B$.

Рассмотрим множество $Q = \{(x_1, \ldots, x_n) : x \in R^n, \ x_j = 0, \ j \in M\}$. Пусть выполняются условия (3)—(5). В работе [5] доказано, что в этом случае при достаточно большом $\tau \in R$, $\tau > T$ и всех $t_0 \geqslant \tau$ существуют $S \subseteq Q$, $S \neq \varnothing$ и такая сюръекция $P : Q \to S$, что $y_i(t : t_0, y_0) = x_i(t : t_0, Py_0) + o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$, где $i \in M$, $x(t : t_0, Py_0) = \mathrm{colon}(x_1(t : t_0, Py_0), \ldots, x_n(t : t_0, Py_0))$ — решение уравнения (1), $x(t_0 : t_0, Py_0) = Py_0$, $y(t : t_0, y_0) = \mathrm{colon}(y_1(t : t_0, y_0), \ldots, y_n(t : t_0, y_0))$ — решение уравнения (2), $y(t_0 : t_0, y_0) = y_0$. Кроме того, если $Py_0 = x_0$, то при всех $k \in M$

$$y_k(t_0) = x_k(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} \sum_{\substack{j \in N \\ k \in M}} y^{jk}(s) f_j(s, x(s : t_0, x_0))\, ds,$$

$$x_{0i} = \begin{cases} x_k(t_0), & i = k, \quad k \in M, \\ 0, & i \neq k, \quad k \in M. \end{cases}$$

При каких условиях $S = Q$? Чтобы ответить на этот вопрос, предварительно докажем леммы, представляющие самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $\lambda \in C([\tau, +\infty) \times R^1_+, R^1_+)$. *Тогда, если при некотором* $\beta \geqslant 0$ *существует непрерывная функция* $\mathcal{T}(\cdot) : [\beta, +\infty) \to R^1_+$, $\int\limits_{\beta}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\mathcal{T}(\alpha)} = +\infty$ *и* $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\lambda(s, \alpha)}{\mathcal{T}(\alpha)} ds = l$, $0 \leqslant l < +\infty$, *равномерно по* $\alpha \in [\beta, +\infty)$, $\lambda(t, \alpha_1) \leqslant \lambda(t, \alpha_2)$ *при* $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, $\forall t \geqslant T$, *то решения уравнения*

$$\partial z / \partial t = \lambda(t, z) \tag{6}$$

равномерно ограничены на множестве $D_1 = \{z : 0 \leqslant z \leqslant r\}$ *при* $t \geqslant t_0 \geqslant \tau$, *т. е.* $z(t : t_0, z_0) \leqslant c(r)$, $z_0 \in D_1$.

Доказательство. Если $l = 0$, то $\lambda(t, \alpha) \equiv 0$ и лемма справедлива. Пусть $l > 0$. Тогда функция $q(t, \alpha) = \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\lambda(s, \alpha)}{\mathcal{T}(\alpha)} ds$ по переменной α не является убывающей. Действительно, пусть при любых $\alpha_1, \alpha_2 \in [\beta, +\infty)$ и $\alpha_1 < \alpha_2$ $q(t, \alpha_1) > q(t, \alpha_2)$ при всех $t \geqslant \tau$. Тогда, рассматривая монотонно возрастающую последовательность $\alpha_n \to +\infty$, получаем: функция $q(t, \alpha_n)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ неравномерно относительно α_n. Полученное противоречие опровергает допущение. Если функция q является неубывающей по α, то теорема верна на основании теоремы 1.2 и замечания 1.1 из работы [7]. Осталось рассмотреть случай, когда имеется бесконечное множество интервалов, на которых q является неубывающей по переменной α.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in (h, r)$ и $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Тогда $q(t, \alpha_1) \leqslant q(t, \alpha_2)$. На основании допущения числа h и r могут быть больше любого наперед заданного числа. На множестве $\Omega_n = \{(t, z) : \beta \leqslant z_0 \leqslant h < z, t \geqslant \tau\}$ рассмотрим функцию

$$V(t, z) = \exp\left(-\int\limits_{T}^{t} \frac{\lambda(s, z)}{\mathcal{T}(z)} ds\right) \int\limits_{z_0}^{z} \frac{d\alpha}{\mathcal{T}(\alpha)}.$$

Она удовлетворяет локальному условию Липшица относительно (t, z) и при достаточно большом h обладает следующими свойствами:

а) $V(t, z) \to +\infty$ при $z \to +\infty$ равномерно относительно $t \geqslant \tau$;

в) $V(t, z) \leqslant V_1(r)$ при $z \leqslant r$, $V_1(r) > 0$, $V_1 \in C([z_0, +\infty))$;

с) $\overline{V'(t, z)} \leqslant 0$ при $z \in (h, r)$, где $\overline{V'(t, z)}$ — правая верхняя производная Дини функции $V(t, z)$ в силу уравнения (6).

Свойства а) и в) очевидны. Справедливость свойства с) доказана в работе [7].

Пусть $\bar{z}_0 \in (h, r)$. Рассмотрим решение $z(t : t_0, \bar{z}_0)$, $t_0 \geqslant \tau$. Тогда $V(t, z(t : t_0, \bar{z}_0)) \leqslant V(t_0, \bar{z}_0) \leqslant V_1(r)$, $t \geqslant t_0$. Отсюда следует равномерная ограниченность решений уравнения (6) на множестве D_1.

Лемма 2. *Если для уравнения*

$$dx/dt = q(t, x), \tag{7}$$

где $q \in C([\tau, +\infty) \times R^n_+, R^n_+)$, *существуют непрерывные функции* $\mathcal{T}_j(\cdot) : R^1_+ \to R^1_+$, $j = \overline{1, n}$, *такие, что*

а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\mathcal{T}_j(\alpha)} = +\infty$, $j = \overline{1, n}$;

в) *функции* $\int\limits_{\tau}^{t} \frac{q_j(s, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)}{\mathcal{T}_j(\alpha_j)} ds$, $q_j(s, \alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$ *являются неубывающими по переменной* α_j, $j = \overline{1, n}$, *то его решения равномерно ограничены на множестве* $D_2 = \{x : x \in R^n, \|x\| \leqslant R\}$, *т. е.* $\|x(t : t_0, x_0)\| \leqslant c(R)$ *при* $t \geqslant t_0$ *и* $x_0 \in D_2$.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $V: R_+^1 \times R_+^n \to R_+^n$, где $V_i(t, z) = \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{g_i(s, z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)}{\mathcal{G}_i(z_i)} ds\right) \int\limits_{z_{0i}}^{z_i} \frac{d\alpha}{\mathcal{G}_i(\alpha)}$, $i = \overline{1, n}$, $z_0 = \operatorname{colon}(z_{01}, \dots, z_{0i}, \dots z_{0n})$, $z = \operatorname{colon}(z_1, \dots, z_i, \dots, z_n)$. Здесь $V(t, z) \to \infty$ при $z \to \infty$ равномерно относительно $t \geqslant \tau$; $V(t, z) \leqslant V_1(r)$, $V_1(r) = \operatorname{colon}\left(\int\limits_{z_{01}}^{z_1} \frac{d\alpha}{\mathcal{G}_1(\alpha)}, \dots, \int\limits_{z_{0n}}^{z_n} \frac{d\alpha}{\mathcal{G}_n(\alpha)}\right)$, $z \leqslant r$, $r = \operatorname{colon}(r_1, \dots, r_n)$.

Кроме того, $\overline{V'(t, z)} \leqslant 0$, где правая верхняя производная Дини вектор-функции $V(t, z)$ вычислена в силу уравнения (7). Заметим, что здесь R^n рассматривается как частично упорядоченное пространство. Отсюда на основании теоремы сравнения [8, с. 245] имеем $V(t, z(t: t_0, z_0)) \leqslant c$, где $\| z(t: t_0, z_0) \| \leqslant c(r)$, $z_0 \in D_2$.

Теорема 1. *Если при условиях* (3)—(5) *для уравнения*

$$dz/dt = \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(t)| \lambda_j(t, zm^j(t)), \quad z \in R_+^1, \tag{8}$$

выполняются условия леммы 1, *то* $S = Q$.

Доказательство. Рассмотрим решение уравнения (1) $x(t: t_0, x_0)$, $x_0 \in Q$. Докажем, что $|x_i(t: t_0, x_0)| \leqslant c(R) m_i(t)$, $i \in M$, $c(r) > 0$, $\|x_0\| \leqslant R$.

Рассмотрим неравенства

$$|x_i(t)| \leqslant m_i(t) \sum_{j \in M} |\gamma_j| + \int\limits_{t_0}^{t} \Big| \sum_{\substack{k \in B \\ j \in N}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, x(s)) \Big| ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \Big| \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, x(s)) \Big| ds, \quad i \in M.$$

Пусть $x_i(t) = u_i(t) m_i(t)$, $i \in M$. Тогда

$$|u_i(t)| \leqslant \bar{c} + \frac{1}{\mu_i(t)} \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in B \\ j \in N}} |y_{ik}(t) y^{jk}(s)| \lambda_j(s, \|u(s)\| m^j(s)) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(s)| \lambda_j(s, \|u(s)\| m^j(s)) ds,$$

где $\bar{c} = \sum_{j \in \mu} |\gamma_j|$, $\|u(s)\| m^j(s) = \operatorname{colon}(\|u(s)\| m_{j_1}(s), \dots, \|u(s)\| m_{jg}(s))$.

Рассмотрим уравнения

$$x_i(t) = \sum_{j \in M} y_{ij}(t) \gamma j + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in B \\ j \in N}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \psi(\|u(s)\|) x) ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \psi(\|u(s)\|) x) ds,$$

где $\psi(\|u(t)\|) = \begin{cases} \min\left(1, \dfrac{T_2}{\|u(t)\|}\right), & u(t) \neq 0, \\ 1, & u(t) = 0, \end{cases}$ $i \in M$, $T_2 > \bar{c}$.

Отсюда

$$|u_i(t)| \leqslant \bar{c} + \frac{1}{\mu_i(t)} \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in B \\ j \in N}} |y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)|\, \lambda_j(s, \psi(\|u(s)\|)\, \|u(s)\|\, m^j(s))\, ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(s)|\, \lambda_j(s, \psi(\|u(s)\|)\, \|u(s)\|\, m^j(s))\, ds.$$

На основании условия (5) и условий леммы 1 получим

$$|u_i(t)| \leqslant \bar{\bar{c}} + \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(s)|\, \lambda_j(s, \|u(s)\|\, m^j(s))\, ds,$$

где $t_0 \in [\tau, +\infty)$, $\bar{\bar{c}} = \bar{c}(t_0)$.

Так как для уравнения $dz/dt = \sum_{\substack{k \in M \\ j \in N}} |y^{jk}(s)|\, \lambda_j(s, zm^j(s))$ выполняются условия леммы 1, то, применяя теорему сравнения, получаем $|u_i(t)| \leqslant c(R)$, $\|u(t_0)\| \leqslant R$. Отсюда $S = Q$.

Вместо условий леммы 1 можно потребовать лишь ограниченность всех решений уравнения (8). И в этом случае $S = Q$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (3) — (5), $W \in C([\tau, +\infty) \times R^n, R_+^n)$, $g \in C([\tau, +\infty) \times R_+^n, R_+^n)$, $W(\cdot)$ — *локально липшицева по второй переменной при любом* $t \in [\tau, +\infty)$, g — *квазимонотонно возрастающая и*:

1) $W_i(t + \delta, x_1, \ldots, x_i + \delta \sum_{j=1}^{n} y^{ji}(t)\, f_j(t, Y(t)\, x), \ldots, x_n) \leqslant W_i(t, x) + \delta g_i(t, W_1, \ldots, W_n) + o(\delta)$ *при* $\delta \to 0$, $i = \overline{1, n}$;

2) $|x_i| \leqslant W_i(t, x)$, $i \in M$.

Тогда, если уравнение

$$dx/dt = q(t, x) \tag{9}$$

удовлетворяет условиям леммы 2, q является квазимонотонно возрастающей и $g(t, x) \leqslant q(t, x)$, *то* $S = Q$.

Доказательство. Пусть $x(t) = Y(t)\, z(t)$. Тогда получим уравнение

$$dz/dt = Y^{-1}(t)\, f(t, Y(t)\, z). \tag{10}$$

Из условий теоремы вытекает

$$dW/dt \leqslant g(t, W), \tag{11}$$

где dW/dt — правая верхняя производная Дини функции W в силу уравнения (10). На основании теоремы сравнения [8, с. 245] и условий леммы 2 получим $|z_i(t)| \leqslant c(R)$, $\|z(t_0)\| \leqslant R$. Следовательно, $|x_i(t : t_0, x_0)| \leqslant dm_i(t)$, $i \in M$, $t \geqslant t_0$, $d > 0$. Поэтому $S = Q$.

Рассмотрим частный случай: $N_0 = M = N$, $m_j(t) = c$, $c = \text{const}$, $\lambda_i(s, |x_{j_1}|, \ldots, |x_{j_q}|) = \psi(s)\, \|x\|$, $j = \overline{1, n}$. При таких условиях в работе [2] доказано, что для каждого решения уравнения (1) $x(t)$ существует решение уравнения (2) $y(t)$ такое, что

$$x(t) = y(t) + o(1), \quad t \to +\infty. \tag{12}$$

И наоборот: для каждого решения $y(t)$ уравнения (2) существует решение уравнения (1) такое, что справедливо соотношение (12). Из теоремы 1 вытекает, что в этом случае асимптотическая эквивалентность индуцируется сюръекцией P.

Рассмотрим вопрос об асимптотической эквивалентности по Левинсону [1] уравнений (1) и (2). Пусть выполняются условия теоремы 1 или теоремы 2 и $x_i(t:t_0, x_0) - x_i(t:t_0, \bar{x}_0) = u_i(t)\mu_i(t)$, $i \in M$, $x_0, \bar{x}_0 \in Q$. Тогда

$$u_i(t)\mu_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))]\, ds -$$

$$- \int_{t}^{+\infty} \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))]\, ds.$$

Будем считать, что

$$|f_j(t, x_1) - f_j(t, x_2)| \leqslant \lambda_j^1(t, |x_{j_1}^{(1)} - x_{j_1}^{(2)}|, \ldots, |x_{j_q}^{(1)} - x_{j_q}^{(2)}|) \tag{13}$$

при любых $x_1, x_2 \in R^n$, $\lambda_j^1 \in C([\tau, +\infty) \times R_+^q)$, $j \in N$ и

$$\int_{\tau}^{+\infty} \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} |y^{jk}(s)|\, \lambda_j^1(s, c\,\|\mu(s)\|)\, ds < +\infty \quad \forall c \geqslant 0. \tag{14}$$

В этом случае

$$u_i(t) \geqslant \frac{1}{\mu_i(t)} \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}} y_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))]\, ds -$$

$$- \int_{t}^{+\infty} \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} |y^{jk}(s)|\, \lambda_j^1(s, \|u(s)\|\, \|\mu(s)\|)\, ds,$$

$\|\cdot\|$ — любая норма в R^q. Предположим, что

$$V_i(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}} \varphi_{ik}(t)\, y^{jk}(s)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))]\, ds -$$

$$- \int_{t}^{+\infty} \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} |y^{jk}(s)|\, \lambda_j^1(s, \|u(s)\|\, \|\mu(s)\|)\, ds, \quad \varphi_{ik}(t) = \frac{y_{ik}(t)}{\mu_i(t)}, \quad \mu_i \in C^1([\tau, +\infty)).$$

Тогда

$$V_i'(t) = \int_{t_0}^{t} \sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}} \varphi_{ik}'(t)\, y^{jk}(s)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))]\, ds +$$

$$+ \sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}} \varphi_{ik}(t)\, y^{jk}(t)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))] + \sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}} |y^{jk}(t)|\, \lambda_j^1(t, \|u(t)\|\, \|\mu(t)\|).$$

Пусть количество элементов в M и B одинаково. Перенумеруем их индексами $1, 2, \ldots, q$. Введем обозначения:

$$z = \operatorname{colon}\Big(\int_{t_0}^{t} \sum_{j\in N} y^{j1}(s)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))]\, ds, \ldots,$$

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{j\in N} y^{jq}(s)\,[f_j(s, x(s)) - f_j(s, \bar{x}(s))]\, ds\Big), \quad V = \operatorname{colon}(V_1, \ldots, V_n),$$

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1q} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_{q1} & \cdots & \varphi_{qq} \end{pmatrix},$$

$$b=\operatorname{colon}\Big(V_1+\int\limits_t^{+\infty}\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}}|y^{jk}(s)|\lambda_j^1(s,\|u(s)\|\|\mu(s)\|)\,ds,\ \ldots,$$
$$V_q+\int\limits_t^{+\infty}\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}}|y^{jk}(s)|\lambda_j^1(s,\|u(s)\|\|\mu(s)\|)\,ds\Big).$$

Так как $\det A\neq 0$, то уравнение $Az=b$ имеет единственное решение $z=A^{-1}b$.

Пусть $\overline{b}=\operatorname{colon}\Big(V_1+\int\limits_t^{+\infty}\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}}|y^{jk}(s)|\lambda_j^1(s,\|V\|\|\mu(s)\|)\,ds,\ldots,\quad V_q+$
$+\int\limits_t^{+\infty}\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}}|y^{jk}(s)|\lambda_j^1(s,\|V\|\|\mu(s)\|)\,ds\Big)$. Тогда

$$V'(t)\geqslant A'A^{-1}\overline{b}-\sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}}|\varphi_{ik}(t)||y^{jk}(t)|\lambda_j^1(t,\|V\|\|\mu(s)\|)+$$
$$+\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}}|y^{jk}(t)|\lambda_j^1(t,\|V\|\|\mu(s)\|)$$

и

$$V'\geqslant F(t,V),\tag{15}$$

где $F(t,V)=A'A^{-1}\overline{b}-\sum_{\substack{k\in B\\ j\in N}}|\varphi_{ik}(t)||y^{jk}(t)|\lambda_j^1(t,\|V\|\|\mu(s)\|)+\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}}|y^{jk}(t)|\times$
$\times\lambda_j^1(t,\|V\|\|\mu(t)\|)$.

Теорема 3. *Если уравнение*

$$dx/dt=F(t,x),\quad x\in R^q,\quad F(t,0)\equiv 0\tag{16}$$

не имеет 0-*кривых, отличных от состояния равновесия* $x=0$, *то уравнения* (1) *и* (2) *асимптотически эквивалентны по Левинсону на многообразии* Q *относительно функций* $\mu_i(t)$, $i\in M$ [5].

Доказательство. Так как $V'(t)\geqslant F(t,V)$ и F — квазимонотонно возрастающая функция, то на основании теоремы сравнения [8, с. 245] $u(t)\geqslant 0$. Если при некотором $t_1\in[\tau,+\infty)$ $u(t_1)\neq 0$, то получим $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)\neq 0$. Это невозможно. Отсюда $u(t)\equiv 0$. Теорема доказана.

Случай, когда $M=N$, сводится к существованию интегралов $\int\limits_\tau^{+\infty}\sum_{\substack{k\in M\\ j\in N}}|y^{jk}(s)|\lambda_j^1(s,c\|\mu(s)\|)\,ds<+\infty\quad\forall c\geqslant 0$ и $\lambda_j^1(t,0)\equiv 0,\quad j\in N$.

Теорема 3 существенно усиливает теорему 5 из работы [5].

Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда P — биекция Q на Q. При каких условиях P — гомеморфизм?

Теорема 4. *Если решения уравнения* (1) *непрерывно зависят от начальных данных, то* P — *гомеоморфизм.*

Доказательство. Так как

$$\sum_{k\in M}y^{ik}(t)x_k(t)=\gamma_i+\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in B}}y^{jk}(s)f_j(s,x(s))\,ds-\int\limits_t^{+\infty}\sum_{\substack{j\in N\\ k\in M}}y^{jk}(s)f_j(s,x(s))\,ds,\ i\in M,$$

то это равенство можно записать так:

$$F_1(t,x_0)=\overline{P}x_0+\varphi(t,x_0),\tag{17}$$

где F_1 — непрерывная по компонентам вектора $x_0\in Q$ при фиксированном t вектор-функция, φ равномерно по x_0 стремится к нулю при $t\to+\infty$,

$\overline{P}x_0 = \text{colon}\,(\overline{P}_1 x_0, \ \ldots, \ \overline{P}_q x_0)$, $Px_0 = \text{colon}\,(P_1 x_0, \ \ldots, \ P_q x_0)$. Известно, что в этом случае $\overline{P}$ — непрерывное отображение. Тогда из леммы 34.5.1 [3, с. 448] вытекает непрерывность $\overline{P}^{-1}$. Следовательно, P — гомеоморфизм.

Если в условиях теоремы 1 вместо условий леммы 1 требуется ограниченность всех решений уравнения (8), то вектор-функция $\varphi(t, x_0)$ при $t \to +\infty$ может стремиться к нулю неравномерно по координатам точки $x_0 \in Q$. Б этом случае для гомеоморфности P недостаточно условий теоремы 4.

1. *Levinson N.* The asymptotic behavior of system of linear differential equations // Amer. J. Math.— 1946.— **68**.— P. 1—6.
2. *Braner F.* Nonlinear differential equations with forcing terms // Proc. Amer. Math. Soc.— 1964.— **15**.— P. 758—765.
3. *Теория* показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / В. Ф. Былов, Р. Э. Виноградов, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
4. *Гробман Д. М.* Системы дифференциальных уравнений, аналогичные линейным // Докл. АН СССР.— 1952.— **36**, № 1.— С. 19—22.
5. *Воскресенский Е. В.* Покомпонентная асимптотика и гомеоморфизм дифференциальных уравнений на многообразиях // Czech. Math. J.— 1985.— **35**.— P. 455—466.
6. *Onuchie N., Cassago H.* Asymptotic behavior at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations // J. Math. Anal. and Appl.— 1984.— **102**, N 2.— P. 348—362.
7. *Воскресенский Е. В.* Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений с линейным автономным первым приближением // Comment. math. Univ. Carol.— 1983.— **24**, N 1.— P. 31—50.
8. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М. : Мир, 1980.— 300 с.

Морд. ун-т, Саранск

Получено 08.10.86