УДК 517.075

Р. С. Дахия, М. Эгвурубе

Двумерные преобразования Лапласа: теоремы и приложения

1. Обобщение известного преобразования Лапласа

$$L[f(t); s] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

на случай двумерного преобразования Лапласа задается следующей формулой:

$$L_2[f(t_1, t_2); s_1, s_2] = \int_0^\infty e^{-s_1t_1 - s_2t_2} f(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2. \tag{2}$$

Преобразования функций вида $\sqrt{\dfrac{t_2}{t_1}} \dfrac{1}{t_1+t_2} F\left[\dfrac{t_1+t_2}{4t_1t_2}\right]$, $\sqrt{\dfrac{t_1}{t_2}} \dfrac{1}{t_1+t_2} \times F\left[\dfrac{t_1+t_2}{4t_1t_2}\right]$ и $\dfrac{1}{\sqrt{t_1t_2}} F\left[\dfrac{t_1+t_2}{4t_1t_2}\right]$ приведены в работе [3, с. 52—54].

Докажем две теоремы относительно двумерного преобразования Лапласа и используем эти теоремы для вычисления новых двумерных преобразований Лапласа функций вида $\dfrac{\sqrt{t_1t_2}}{\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)^{3/2}} F\left[\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right]$ и $\sqrt{t_1t_2} \times F\left[\sqrt{\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}}\right]$. Кроме того, применим двумерное преобразование Лапласа для решения краевых задач.

2. Теорема 1. *Пусть* 1) $L[f(t); s] = \Phi(s)$; 2) $L\left[F\left(\dfrac{1}{t}\right); s\right] = \Phi(\sqrt{s})$; 3) $L\left[t^j f\left(\dfrac{1}{t}\right); s\right] = H_j(s)$, $j = 1, 2, 3$, *и пусть* $f(t)$, $F\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $t^j f(t)$ *непрерывны и абсолютно интегрируемы на* $(0, \infty)$. *Тогда*

$$L_2\left[\frac{\sqrt{t_1t_2}}{\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)^{3/2}} F\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right); s_1, s_2\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{8}(s_1s_2)^{-3/2}[H_1(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}) +$$

$$+ (\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}) H_2(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}) + \sqrt{s_1s_2} H_3(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})] \tag{3}$$

при условии, что интеграл в правой части существует как абсолютно сходящийся интеграл по каждой из двух переменных.

Доказательство. Из условия 1 получаем

$$\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{4}$$

Используя формулу (48) из [4], получаем

$$\Phi(\sqrt{s}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} L\left[t^{-3/2}\int_0^\infty ue^{-u^2/(4t)} f(u)\,du, s\right]. \qquad (5)$$

Из (5) и условия 2 имеем

$$F\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2}\int_0^\infty ue^{-u^2/(4t)} f(u)\,du. \qquad (6)$$

Соотношение (6) можно представить в виде

$$\frac{F(1/t_1 + 1/t_2)}{(1/t_1 + 1/t_2)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u\exp\left[-\frac{u^2}{4}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)\right] f(u)\,du. \qquad (7)$$

Умножая теперь обе части соотношения (7) на $\sqrt{t_1t_2}\exp(-s_1t_1 - s_2t_2)$ и интегрируя по t_1 и t_2 в положительном квадранте, получаем

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-s_1t_1 - s_2t_2)\sqrt{t_1t_2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)^{-3/2} f\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) dt_1dt_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \int_0^\infty\int_0^\infty \sqrt{t_1t_2}\exp(-s_1t_1 - s_2t_2)\left\{\int_0^\infty u\exp\left[-\frac{u^2}{4}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right) f(u)\,du\right]\right\} dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty uf(u)\left\{\int_0^\infty \sqrt{t_1}\exp\left(-\frac{1}{4}\,\frac{u^2}{t_1} - s_1t_1\right)dt_1 \times\right.$$

$$\left.\times \int_0^\infty \sqrt{t_2}\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{u^2}{t_1} - s_2t_2\right)dt_2\right\} du. \qquad (8)$$

Вычисляя внутренние интегралы в правой части согласно [4, с. 22] и используя условие 3, получаем равенство (3).

3. Примеры. Пусть $f(t) = \delta(t-1)$, так что $\Phi(s) = e^{-ax}$, $a \geqslant 0$,

$$F\left(\frac{1}{t}\right) = L^{-1}[e^{-a\sqrt{s}};\, t] = \frac{ae^{-a^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}},$$

$$H_1(s) = L[tf(t); s] = (-1)\frac{d}{ds}\Phi(s) = ae^{-as},$$

$$H_2(s) = L[t^2f(t); s] = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\Phi(s) = a^2e^{-as},$$

$$H_3(s) = L[t^3f(t); s] = (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\Phi(s) = a^3e^{-as}.$$

Отсюда и из (3) получаем

$$L_2[\sqrt{t_1t_2}e^{-a^2/4(1/t_1+1/t_2)};\, s_1, s_2] =$$

$$= \frac{\pi}{4}(s_1s_2)^{-3/2}e^{-a(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}\{1 + a(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2}) + a^2\sqrt{s_1s_2}\} \qquad (9)$$

Этот пример подтверждает справедливость теоремы.

Аналогично, если выбрать $f(t)$ равной t^v, te^{-at}, $\sin at$, и $t^{v/2}J_v(a\sqrt{t})$, то на основании теоремы 1 можно получить следующие результаты:

$$L_2[\sqrt{t_1t_2}(1/t_1 + 1/t_2)^{-1-v/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\varkappa}\,\frac{r((v+1)/2)}{r(v+1)}(s_1s_2)^{-3/2}\left[\frac{\Gamma(v+2)\,\Gamma(v+3)}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^{v+2}} +\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(v+4)\sqrt{s_1s_2}}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^{v+4}}\right],\quad \operatorname{Re} v > -1, \qquad (10)$$

$$L_2\left[\frac{\sqrt{t_1t_2}}{(1/t_1+1/t_2)^2}\right]=\frac{\pi}{16}(s_1s_2)^{-3/2}\frac{15}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^4}+\frac{60}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^6} \qquad (11)$$

при $v=2$ в (10),

$$L_2\left[\frac{\sqrt{t_1t_2}}{(1/t_1+1/t_2)^{3/2}}\left\{\left(1-\frac{2a}{\sqrt{\pi}}(1/t_1+1/t_2)^{-1/2}\right)+(1-2a^2(1/t_1+1/t_2)^{-1})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\exp(a^2(1/t_1+1/t_2)^{-1})\,Erf\,(a(1/t_1+1/t_2)^{-1/2}-1)\right\}\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{4}(s_1s_2)^{-3/2}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+a)^3}+\frac{3(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+a)^4}+\frac{12\sqrt{s_1s_2}}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+a)^5}\right],\quad \mathrm{Re}\,a>0, \qquad (12)$$

$$L_2\left[\frac{\sqrt{t_1t_2}}{(1/t_1+1/t_2)^{3/2}}\exp(-a^2(1/t_1+1/t_2)^{-1});\ s_1,s_2\right]=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{(s_1s_2)^{-3/2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}{[(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2+a^2]^2}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{(3(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2-a^2)}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2+a^2}+\frac{12\sqrt{s_1s_2}((\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2-a^2)}{((\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2+a^2)^2}\right\}, \qquad (13)$$

$$L_2\left[\sqrt{t_1t_2}\int_0^\infty u^{(v+2)/2}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\right)J_v(a\sqrt{u})\,du;\ s_1,s_2\right]=$$

$$=\frac{\pi(s_1s_2)^{-3/2}a^v}{2^{v+2}\Gamma(v+1)(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^{v+2}}\left\{\Gamma(v+2)\,{}_1F_1\left(v+2;\ v+1\ \frac{-a^2}{4(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}\right)+\right.$$

$$+\Gamma(v+3)\,{}_1E_1\left(v+3;\ v+1;\ \frac{-a^2}{4(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}\right)+\frac{\Gamma(v+4)\sqrt{s_1s_2}}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2}\,{}_1F_1\left(v+4;\ v+1;\right.$$

$$\left.\left.\frac{-a^2}{4(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}\right)\right\}. \qquad (14)$$

4. Теорема 2. *Пусть* 1) $L[f(t);s]=\Phi(s)$; 2) $L[f(t^2);s]=\sigma(s)$; 3) $L[t^{-j}\Phi(t^{-2});s]=G_j(s)$, $j=0,1,2$. *Тогда*

$$L_2[\sqrt{t_1t_2}\sigma(\sqrt{1/t_1+1/t_2});s_1,s_2]=\frac{\sqrt{\pi}}{4}(s_1s_2)^{-3/2}[\sqrt{s_1s_2}G_0(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})+$$

$$+(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})\,G_1(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})+G_2(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})] \qquad (15)$$

при условии, что интеграл в левой части существует как абсолютно сходящийся интеграл по каждой из переменных.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, и поэтому мы его опускаем.

Если положить в условии теоремы 2 t равным t^v, $\sqrt{t}\cos\sqrt{t}$ и $t^{v/2}J_v(a\sqrt{t})$, то получим следующие результаты:

$$L_2[\sqrt{t_1t_2}(1/t_1+1/t_2)^{-v-1/2};s_1,s_2]=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(v+1)(s_1s_2)^{-3/2}}{4\Gamma(2v+1)(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^{2v}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma(2v+1)+\Gamma(2v+2)}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})}+\frac{\Gamma(2v+3)\sqrt{s_1s_2}}{(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^3}\right\},\quad \mathrm{Re}(v)>-\frac{1}{2}, \qquad (16)$$

$$L_2[\sqrt{t_1t_2}(1/t_1+1/t_2+1)^{-1}\cos\{2\tan^{-1}(1/t_1+1/t_2)^{-1/2}\};s_1s_2]=$$

$$=\frac{\pi}{4}(s_1s_2)^{-3/2}\exp\left[\frac{1}{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})^2\right]+\{D_{-2}[\sqrt{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})]-$$

$$-6D_{-4}[\sqrt{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})]+12\sqrt{s_1s_2}(D_{-4}[\sqrt{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})]-$$

$$-20D_{-6}[\sqrt{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})])+\sqrt{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})(2D_{-3}[\sqrt{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})]-$$

$$-24D_{-5}[\sqrt{2}(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2})])\}, \qquad (17)$$

где $D_v(x)$ — параболическая цилиндрическая функция,

$$L_2[\sqrt{t_1 t_2}(1/t_1 + 1/t_2 + a^2)^{-v-1/2}; s_1, s_2] =$$

$$= \frac{\pi (s_1 s_2)^{-3/2} \exp\left[\frac{1}{4a}(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2\right]}{2^{v+3/2} a^{2v+3} \Gamma(v+1/2)} \left\{ a^2 \Gamma(2v+1) D_{-2v-1}\left[\frac{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}}{2\sqrt{2}a}\right] + \right.$$

$$+ \sqrt{2} a \Gamma(2v+2)(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}) D_{-2v-1}\left[\frac{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}}{2\sqrt{2}a}\right] +$$

$$\left. + 2\Gamma(2v+3)\sqrt{s_1 s_2} D_{-2v-3}\left[\frac{\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}}{2\sqrt{2}a}\right]\right\}, \quad \mathrm{Re}\, v > -\frac{1}{2}. \tag{18}$$

5. Приложение к краевым задачам. Решим следующие граничные задачи:

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad u(0, t) = 1, \quad u_x(0, t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

$$u(x, 0) = 0, \tag{19}$$

$$u_t + u_x - u = 2e^{x+t}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad u(x, 0) = 1,$$

$$u(0, t) = 1. \tag{20}$$

Пусть $L_2[u(x, t); s_1, s_2] = U(s_1, s_2)$. Тогда, применяя двойное преобразование Лапласа к (19), получаем

$$U(s_1, s_2) = \frac{s_1/s_2 - 1/\sqrt{s_2}}{s_1^2 - s_2} = \frac{1}{s_2(s_1 + \sqrt{s_2})}. \tag{21}$$

Отсюда с помощью обратного двойного преобразования Лапласа в свою очередь находим

$$u(x, t) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{s_1 x + s_2 t}}{s_2(s_1+\sqrt{s_2})} ds_1 ds_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{s_2 t - x\sqrt{s_2}} \frac{ds_2}{s_2} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}x\sqrt{t}} e^{-z^2} dz = \mathrm{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{22}$$

Аналогично приходим к преобразованному уравнению из (20) вида

$$U(s_1, s_2) = \frac{2}{(s_1-1)(s_2-1)(s_1+s_2-1)} + \frac{s_1+s_2}{s_1 s_2 (s_1+s_2-1)}, \tag{23}$$

откуда определяем решение

$$u(x, t) = \begin{cases} 2e^x(e^t - 1) + e^t & \text{при } x > t, \\ 2e^t(e^x - 1) + e^x & \text{при } x < t. \end{cases} \tag{24}$$

1. *Dahiya R. S.* Computation of two-dimensional Laplace transforms // Rend. mat.— 1975.— 8.— Ser. VI.— P. 805—813.
2. *Дахия Р. С.* Функциональные соотношения для специальных функций // Укр. мат. журн.— 1976.— 28, № 3.— С. 11—18.
3. *Диткин В. А., Прудников А. Н.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М.: Физматгиз, 1960.— 264 с.
4. *Roberts G. E., Kaufman H.* Table of Laplace Transforms.— W. B. Saunders Company, 1966.

Ун-т штата Айова, США
Ун-т Мэйдугури, Нигерия

Получено 21.02.86