УДК 517.9

Ю. В. ТЕПЛИНСКИЙ, П. И. АВДЕЮК, кандидаты физ.-мат. наук
(Каменец-Подол. пед. ин-т)

Редукция задачи о существовании инвариантного тора бесконечной дифференциальной системы к конечномерному случаю

Рассмотрены примеры, показывающие, что для дифференциальных систем в пространстве ограниченных числовых последовательностей при различных порядках укорочения может существовать неединственная функция Грина задачи об инвариантном торе (ФГ), а в некоторых случаях эта функция вообще отсутствует. Предложены условия, при которых, несмотря на это, исходная система уравнений имеет инвариантный тор.

Розглянуто приклади, які показують, що для диференціальних систем у просторі обмежених числових послідовностей при різних порядках вкорочення може існувати неєдина функція Гріна задачі про інваріантний тор (ФГ), а в деяких випадках ця функція взагалі відсутня. Запропоновано умови, при яких, не зважаючи на це, вихідна система рівнянь має інваріантний тор.

Для изучения свойств инвариантных торов линейных дифференциальных систем в пространстве $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей часто применяют метод укорочения исходной системы [1, 2].

Обычно рассматривается стандартная система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + c(\varphi); \qquad \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \tag{1}$$

такая, что у линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = P(\varphi)x; \qquad \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) \tag{2}$$

существует матрицант и каждая укороченная система уравнений, соответствующая системе (1), имеет инвариантный тор. Оказывается, последнее предположение вовсе необязательно. Здесь $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in R^m$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathfrak{M}$, $P(\varphi)$ — бесконечная матрица, $a(\varphi)$ и $c(\varphi)$ — бесконечные вектор-функции, причем $P(\varphi)$, $c(\varphi)$, $a(\varphi)$ — 2π-периодичны по φ_i, $i = \overline{1, m}$.

Под областью H будем понимать декартово произведение $R^1 \times \mathfrak{M}$, а под точкой из H — пару (t, x), где $t \in R^1$, $x \in \mathfrak{M}$, т. е.

$$H = \{(t, x) \mid t \in (-\infty, +\infty),\ x \in \mathfrak{M}\}. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала два примера.

Пример 1. Пусть задана система уравнений

$$\begin{aligned}
\dot\varphi &= \sin\varphi,\\
\dot x_1 &= x_1\cos\varphi,\\
\dot x_2 &= \lambda_{21}x_1 - x_2\cos\varphi,\\
\dot x_3 &= x_3\cos\varphi,\\
\dot x_4 &= \lambda_{43}x_3 - x_4\cos\varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4}$$

для которой матрица $P(\varphi)$ имеет блочно-диагональный вид

$$P(\varphi)=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0\\ \lambda_{21} & -\cos\varphi\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\cos\varphi & 0\\ \lambda_{43} & -\cos\varphi\end{bmatrix}, \dots\right\}.$$

Если $\sup\{|\lambda_{21}|, |\lambda_{43}|, |\lambda_{65}|, \dots\}\leqslant\lambda=\text{const}<\infty$, то

$$\|P(\varphi)\|=\|[p_{ij}(\varphi)]_{i,j=1}^{\infty}\|=\sup\sum_{j=1}^{\infty}|p_{ij}(\varphi)|<1+\lambda,$$

а значит, для системы уравнений (4) в области (3) справедлива теорема Коши и существует матрицант. Известно, вопрос существования инвариантного тора системы уравнений вида (1) сводится к существованию функции Грина задачи об инвариантных торах системы уравнений (2), которая в рассматриваемом примере имеет вид (4).

Пример 2. Рассмотрим такую систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot\varphi=\sin\varphi,\\
&\dot x_1=-x_1\cos\varphi+x_2,\\
&\dot x_2=x_2\cos\varphi,\\
&\dot x_3=-x_3\cos\varphi+x_4,\\
&\dot x_4=x_4\cos\varphi.\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь матрица $P(\varphi)$ также имеет блочно диагональный вид

$$P(\varphi)=\operatorname{diag}\left\{\begin{bmatrix}-\cos\varphi & 1\\ 0 & \cos\varphi\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-\cos\varphi & 1\\ 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}, \dots\right\}$$

и ограничена по норме $\|\cdot\|$, что приводит к существованию матрицанта для системы уравнений (5).

Из [3] следует, что функция Грина задачи об инвариантных торах укороченной системы до любого четного порядка уравнений (4) существует и единственна, а укороченной до любого нечетного порядка — не единственна. Из этой же работы вытекает, что при любом четном порядке укорочения системы уравнений (5) функция Грина существует и единственна, а при любом нечетном — функция Грина не существует вообще.

Таким образом, из примеров 1, 2 вытекает, что, зная о существовании и единственности функции Грина укороченной до любого порядка системы (2), ничего не может сказать о функции Грина самой системы уравнений. Ясность в этот вопрос вносит теорема, которую докажем далее.

Рассмотрим последовательность дифференциальных систем вида (2)

$$\frac{dx^{(k)}}{dt}=P^{(k)}(\varphi_t(\varphi))\,x^{(k)};\qquad \frac{d\varphi_t(\varphi)}{dt}=a(\varphi_t(\varphi)),\quad k=1,2,3,\dots.\tag{6}$$

Обозначим $\overset{(k)}{\Omega}{}^0_\tau(\varphi)$ и $\Omega^0_\tau(\varphi)$ матрицанты систем уравнений (6) и (2) соответственно, а их элементы — $w_{ij}^{(k)}(\tau,\varphi)$ и $w_{ij}(\tau,\varphi)$, $i,j=1,2,\dots$.

Теорема 1. *Пусть последовательность систем уравнений* (6) *такова, что выполняются условия:*

1) *каждая из них имеет функцию Грина*

$$G^{(k)}(\tau,\varphi)=\begin{cases}\overset{(k)}{\Omega}{}^0_\tau(\varphi)\,\overset{(k)}{C}(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при } \tau<0,\\ \overset{(k)}{\Omega}{}^0_\tau(\varphi)\,[C^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi))-E] & \text{при } \tau>0,\end{cases}$$

удовлетворяющую неравенству $\|G_0^{(k)}(\tau,\varphi)\|\leqslant Ne^{-\gamma|\tau|}$ *равномерно по* k;

2) *матрицы* $C^{(k)}(\varphi)$ *ограничены по норме в совокупности константой* C^0;

3) *ряды* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |w_{ij}^{(k)}(\tau, \varphi)|$ *сходятся равномерно по* k *при* $i = 1, 2, 3, \ldots$;

4) *при* $k \to \infty$ *в слабом смысле* $\overset{(k)}{\Omega}{}_\tau^0(\varphi) \to \Omega_\tau^0(\varphi)$, $\overset{(k)}{C}(\varphi) \to C(\varphi)$, *где* $C(\varphi)$ — 2π-*периодическая по* φ_i, $i = \overline{1, m}$, *непрерывная по* φ *бесконечная матрица.*

Тогда система уравнений (2) *имеет функцию Грина.*

Для доказательства теоремы достаточно показать справедливость оценок

$$\| \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi) \| \leqslant N e^{\gamma\tau} \quad \text{при } \tau < 0,$$
$$\| \Omega_\tau^0(\varphi) [C(\varphi) - E] \| \leqslant N e^{-\gamma\tau} \quad \text{при } \tau > 0 \tag{7}$$

и положить в качестве искомой функции Грина функцию

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi_\tau(\varphi)) & \text{при } \tau < 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi) [C(\varphi_\tau(\varphi)) - E] & \text{при } \tau > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $\tau < 0$. Обозначив

$$G_0(\tau, \varphi) = [g_{ij}(\tau, \varphi)]_{i,j=1}^{\infty}, \quad G_0^{(k)}(\tau, \varphi) = [g_{ij}^{(k)}(\tau, \varphi)]_{i,j=1}^{\infty},$$

запишем равенство

$$\lim_{k\to\infty} g_{is}^{(k)}(\tau, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij}^{(k)}(\tau, \varphi)\, c_{js}^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi)), \quad i, s = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} w_{ij}^{(k)}(\tau, \varphi)\, c_{js}^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi))$ сходятся равномерно по k, так как они мажорируются равномерно по k сходящимися рядами

$$\sum_{j=1}^{\infty} |w_{ij}^{(k)}(\tau, \varphi)|\, C^0, \quad t = 1, 2, 3, \ldots.$$

Но тогда для $i, s = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij}^{(k)}(\tau, \varphi)\, c_{js}^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{k\to\infty} (w_{ij}^{(k)}(\tau, \varphi)\, c_{js}^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi))) = g_{is}(\tau, \varphi).$$

Это означает, что при $\tau < 0$ функция $G_0(\tau, \varphi)$ является слабым пределом последовательности $G_0^{(k)}(\tau, \varphi)$, а это влечет за собой справедливость первого из неравенств (7).

Случай $\tau > 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Очевидно, в качестве последовательности (6) можно выбрать любую последовательность укороченных систем уравнений (2). В этом случае для выполнения условий 1, 2, 4 теоремы 1 достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \max_{\varphi} |p_{sj}(\varphi)| = K\varepsilon(n); \quad \varepsilon(n) \to 0 \text{ при } n \to \infty, \quad s = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$K = \text{const} > 0,$$

и, кроме того, выполнялась оценка $\| \overset{(k)}{\Omega}{}_\tau^0(\varphi) \| \leqslant N e^{-\gamma|\tau|}$ равномерно относительно k для выбранной последовательности укороченных систем. В условии теоремы 1 нет необходимости.

Легко убедиться, что для систем уравнений, рассмотренных в *примерах* 1 и 2, существуют последовательности укороченных систем уравнений, для которых справедливы условия теоремы 1. Это значит, что для систем уравнений (4) и (5) существуют функции Грина, о единственности которых говорить нельзя.

Рассмотрим последовательность систем уравнений вида (1)

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = P^{(k)}(\varphi)\, x^{(k)} + c^{(k)}(\varphi); \qquad \frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{8}$$

Обозначим инвариантные торы систем уравнений (1) и (8) $u(\varphi)$ и $u^{(k)}(\varphi)$ соответственно.

Теорема 2. *Пусть системы уравнений* (1) *и* (8) *при любом* $k = 1, 2, \ldots$ *имеют функции Грина* $G_0(\tau, \varphi)$ *и* $G_0^{(k)}(\tau, \varphi)$ *соответственно, причем в слабом смысле*

$$\lim_{k\to\infty} G_0^{(k)}(\tau, \varphi) = G_0(\tau, \varphi).$$

Предположим, что выполняются условия:

1) *функция* $a(\varphi)$, $c(\varphi)$ *и матрица* $P(\varphi)$ — 2π-*периодичны по* φ_i, $i = \overline{1, m}$;

2) *в слабом смысле* $c^{(k)}(\varphi) \to c(\varphi)$ *при* $k \to \infty$; $\| c^{(k)}(\varphi) \| \leqslant C_0 = \mathrm{const} < \infty$ *при* $k = 1, 2, 3, \ldots$;

3) $\| G_0^{(k)}(\tau, \varphi) \| \leqslant N e^{-\gamma|\tau|}$ *равномерно по* $k = 1, 2, 3, \ldots$;

4) *ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} | g_{si}^{(k)}(\tau, \varphi) |$ *сходятся равномерно по* k, $s = 1, 2, \ldots$.

Тогда $u(\varphi) = \lim\limits_{k\to\infty} u^{(k)}(\varphi)$, *где предельный переход понимается также в слабом смысле.*

Доказательство. Условие 4 сформулированной теоремы приводит к тому, что в слабом смысле

$$\lim_{k\to\infty} G_0^{(k)}(\tau, \varphi)\, c^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi)) = G_0(\tau, \varphi)\, c(\varphi_\tau(\varphi)).$$

Учитывая интегральное представление инвариантного тора, остается лишь доказать справедливость равенства

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0^{(k)}(\tau, \varphi)\, c^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi))\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{k\to\infty} \{G_0^{(k)}(\tau, \varphi)\, c^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi))\}\, d\tau. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$G_0^{(k)}(\tau, \varphi)\, c^{(k)}(\varphi_\tau(\varphi)) = z^{(k)}(\tau, \varphi) = \{z_1^{(k)}(\tau, \varphi), z_2^{(k)}(\tau, \varphi), \ldots\},$$

$$G_0(\tau, \varphi)\, c(\varphi_\tau(\varphi)) = z(\tau, \varphi) = \{z_1(\tau, \varphi), z_2(\tau, \varphi), \ldots\},$$

A — как угодно большое положительное число.

Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем соотношение, справедливое при любом $i = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-A}^{+\infty} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau = \int_{-A}^{A} \lim_{k\to\infty} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau = \int_{-A}^{A} z_i(\tau, \varphi)\, d\tau.$$

Обозначим

$$\int_{-A}^{A} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau = F(k, A).$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} F(k, A) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau,$$

а

$$\lim_{A\to\infty} F(k, A) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau,$$

причем последний предельный переход равномерен относительно k. Действительно,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau - \int_{-A}^{A} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau\right| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{A} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau\right| + \left|\int_{A}^{+\infty} z_i^{(k)}(\tau, \varphi)\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{-A} C_0 N e^{\gamma\tau} d\tau + \int_{A}^{+\infty} C_0 N e^{-\gamma\tau} d\tau \leqslant \frac{2C_0 N}{\gamma} e^{-\gamma A} < \varepsilon$$

для всех $k = 1, 2, 3, \ldots$, если только $A > \frac{1}{\gamma} \ln \frac{\varepsilon\gamma}{2C_0 N}$.

В таком случае по теореме о перестановке двух предельных переходов получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{A\to\infty} (F\, k, A) = \lim_{A\to\infty} \lim_{k\to\infty} F(k, A),$$

из которого следует соотношение (9), что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Естественно, в качестве последовательности (8) можно взять любую последовательность укороченных систем уравнений, соответствующую системе уравнений (1). Тогда случай только упрощается.

1. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В., Цыгановский Н. С.* Об инвариантных торах счетных систем.— Киев, 1983.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.30).
2. *Теплинский Ю. В.* Об инвариантных торах линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве $\mathfrak{M}$ // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 2.— С. 194—199.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.— Киев: Наук. думка, 1990.— 240 с.

Получено 29.01.91