УДК 517.927.4

А. М. САМОЙЛЕНКО, чл.-корр. АН Украины, С. В. МАРТЫНЮК, асп.
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Обоснование численно-аналитического метода последовательных приближений для задач с интегральными краевыми условиями

Приводится обоснование применения численно-аналитического метода последовательных приближений для исследования и приближенного построения решений дифференциальных уравнений с интегральными краевыми условиями.

Наводиться обгрунтування застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень для дослідження і наближеної побудови розв'язків диференціальних рівнянь з інтегральними крайовими умовами.

В данной работе обобщены результаты, относящиеся к обоснованию численно-аналитического метода последовательных приближений [1] для нелинейных дифференциальных уравнений с интегральными краевыми условиями.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

с краевыми условиями, заданными функционалом

$$\int_0^T x(s)\, ds = d, \tag{2}$$

где x, f, d — точки n-мерного евклидова пространства E_n.

Предположим, что функция $f(t, x)$ определена и непрерывна в области

$$(t, x) \in [0, T] \times D, \tag{3}$$

где D — замкнутая ограниченная область E_n.

Кроме того, правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию ограниченности вектором $M = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$ и условию Липшица с матрицей K, составленной из неотрицательных элементов

$$K = \{K_{ij},\ i, j = 1, 2, \ldots, n\}, \quad |f(t, x)| \leqslant M,$$
$$|f(t, x') - f(t, x'')| \leqslant K\, |x' - x''| \tag{4}$$

для всех $t \in [0, T]$; x, x', $x'' \in D$ и неравенство между векторами понимается покомпонентно.

Среди краевых задач (1), (2) выберем класс таких, для которых параметры M, K, величина d, входящая в краевые условия (2), область определения (3) удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, а именно:

а) множество D_β точек $x_0 \in E_n$, содержащихся в области D вместе со своей β-окрестностью, где $\beta = \frac{T}{2} M + \beta_1(x_0)$, $\beta_1(x_0) = \left| \frac{2}{T} d - 2x_0 \right| + \frac{2}{3} TM$, непусто:

$$D_\beta \neq \varnothing; \tag{5}$$

б) наибольшее собственное значение $\lambda(Q_1)$ матрицы $Q_1 = \frac{3}{2} TK$ не превышает единицы

$$\lambda(Q_1) < 1. \tag{6}$$

Построим равномерно сходящуюся к точному решению краевой задачи (1), (2) последовательность функций $x_m(t, x_0)$, удовлетворяющих краевым условиям (2) при произвольных значениях $x_0 \in D_\beta$. Для системы (1) формально легко это сделать для всех значений m.

Введем в рассмотрение последовательность функций

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds \right] dt + \alpha t, \tag{7}$$

где $x_0(t, x_0) = x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Векторный параметр α подберем таким образом, что функции вида (7) удовлетворяют краевым условиям (2) при произвольном x_0 и для всех $m = 1, 2, \ldots$. Подставляя (7) в краевые условия (2) относительно α, имеем

$$\alpha = \frac{2}{T^2} \left[d - \int_0^T Lf(t, x_{m-1}(t, x_0))\, dt - x_0 T \right], \tag{8}$$

где линейный оператор L действует на непрерывную при $t \in [0, T]$ вектор-функцию $f(t, x_{m-1}(t, x_0)) = [f_1(t, x_{m-1}(t, x_0)), \ldots, f_n(t, x_{m-1}(t, x_0))]$ следующим образом:

$$Lf(t, x_{m-1}(t, x_0)) = \int_0^t [f(s, x_{m-1}(s, x_0)) - Sf(t, x_{m-1}(t, x_0))]\, ds, \tag{9}$$

и оператор S является оператором интегрального среднего

$$Sf(t, x_{m-1}(t, x_0)) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds. \tag{10}$$

Следовательно, все члены последовательности функций

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds\right] dt +$$
$$+ \frac{t}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T Lf(t, x_{m-1}(t, x_0))\, dt\right) - 2x_0\right] \tag{11}$$

удовлетворяют краевым условиям (2).

Справедливо следующее утверждение о сходимости последовательных приближений x_m (t, x_0) вида (11).

Теорема 1. *Предположим, что правая часть $f(t, x)$ системы* (1) *определена, непрерывна в области* (3) *и выполняются условия* (4)—(6).

Тогда последовательность функций x_m (t, x_0) вида (11), *удовлетворяющих краевым условиям* (2) *при всех m и $x_0 \in D_\beta$ равномерно сходится при $m \to \infty$ относительно области $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$ к предельной функции $x^*(t, x_0)$. При этом функция $x^*(t, x_0)$, проходящая при $t = 0$ через точку $x^*(0, x_0) = x_0$, является решением интегрального уравнения*

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left\{f(t, x(t, x_0)) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s, x_0))\, ds +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T Lf(t, x(t, x_0))\, dt\right) - 2x_0\right]\right\} dt, \tag{12}$$

и, кроме того, $x^*(t, x_0)$ удовлетворяет краевым условиям (2), *т. е. является решением краевой задачи*

$$\dot{x} = f(t, x_0) + \Delta(x_0),$$
$$\int_0^T x(s)\, ds = d,$$

где

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T Lf(t, x(t, x_0))\, dt\right) - 2x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s, x_0))\, ds.$$

Для отклонения $x^*(t, x_0)$ от x_m (t, x_0) для всех $m = 1, 2, \ldots$ справедлива оценка

$$| x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0) | \leqslant \tilde{\alpha}_1(t)\, [Q^m (E - Q)^{-1} M + KQ^{m-1}(E - Q)^{-1}\beta_1(x_0)] +$$
$$+ Q_1^{m-1}(E - Q_1)^{-1}\beta_2(x_0) = \tilde{\alpha}_1(t)\, W(x_0) + W_1(x_0), \tag{13}$$

где

$$W(x_0) = Q^m (E - Q)^{-1} M + KQ^{m-1}(E - Q)^{-1}\beta_1(x_0),$$
$$W_1(x_0) = Q_1^{m-1}(E - Q_1)^{-1}\beta_2(x_0),$$
$$\beta_2(x_0) = \frac{2}{3} TK\left[\frac{T}{3} M + \beta_1(x_0)\right], \quad Q = \frac{TK}{\pi}.$$

Доказательство. Покажем, что в пространстве непрерывных вектор-функций последовательность вида (11) является фундаментальной, а следовательно, и равномерно сходящейся.

Сначала установим, что если $x_0 \in D_\beta$, то все функции вида $x_m(t, x_0) \in D$. Действительно, на основании леммы [2, с. 13] из (11) следует

$$|x_1(t, x_0) - x_0| \leqslant \left| \int_0^t \left[f(t, x_0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_0)\, ds \right] dt + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{T} \left[\frac{2}{T} \left(d - \int_0^T Lf(t, x_0)\, dt \right) - 2x_0 \right] \right| \leqslant \alpha_1(t) M + \beta_1(x_0). \tag{14}$$

Поэтому $x_1(t, x_0) \in D$, как только $x_0 \in D_\beta$. Методом математической инудкции можно показать, что для всех $m = 1, 2, \ldots, t \in [0, T]$ и каждого $x_0 \in D_\beta$ все функции $x_m(t, x_0)$ также не выходят из области D.

Для установления сходимости последовательности функций вида (11) используем признак сходимости Коши, оценивая при этом разность $|x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|$ при любом $j \geqslant 1$.

Согласно (4), (11) и лемме из [2] для всех $m \geqslant 1$ и $t \in [0, T]$

$$|x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant K \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0))\, ds + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{T} \int_t^T |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds \right] + \frac{2}{T} K \int_0^T \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t |x_m(s, x_0) - \right.$$

$$\left. - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T |x_m(s, x_0) - x_{m-1}(s, x_0)|\, ds \right] dt.$$

Если обозначить

$$r_{m+1}(t) = |x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)|,$$

то из последнего неравенства получим

$$r_{m+1}(t) \leqslant K \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t r_m(s)\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T r_m(s)\, ds \right] +$$

$$+ \frac{2}{T} K \int_0^T \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t r_m(s)\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T r_m(s)\, ds \right] dt. \tag{15}$$

Согласно (14)

$$r_1(t) = |x_1(t, x_0) - x_0| \leqslant \alpha_1(t) M + \beta_1(x_0).$$

Поэтому из (15) при $m = 1$ с учетом [3] находим

$$r_2(t) \leqslant K \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t (\alpha_1(s) M + \beta_1(x_0))\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T (\alpha_1(s) M + \beta_1(x_0)) ds \right] +$$

$$+ \frac{2}{T} K \int_0^T \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t (\alpha_1(s) M + \beta_1(x_0))\, ds + \frac{t}{T} \int_t^T (\alpha_1(s) M + \beta_1(x_0))\, ds \right] \times$$

$$\times\, dt \leqslant K\, [\alpha_2(t) M + \alpha_1(t) \beta_1(x_0)] + Q \frac{2\pi}{3} \left[\frac{T}{3} M + \beta_1(x_0) \right].$$

Методом математической индукции можно получить

$$r_{m+1}(t) \leqslant K^m [\alpha_{m+1}(t) M + \alpha_m(t) \beta_1(x_0)] + Q^m \left(\frac{3}{2}\right)^{m-2} \pi^m \left[\frac{T}{3} M + \beta_1(x_0)\right] =$$

$$= K^m [\alpha_{m+1}(t) M + \alpha_m(t) \beta_1(x_0)] + Q_1^{m-1} \beta_2(x_0), \qquad (16)$$

где

$$\beta_2(x_0) = \frac{2}{3} TK \left[\frac{T}{3} M + \beta_1(x_0)\right], \quad Q_1 = \frac{3}{2} TK.$$

Далее, из соотношения

$$x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0) = (x_{m+j}(t, x_0) - x_{m+j-1}(t, x_0)) + \ldots$$

$$\ldots + (x_{m+2}(t, x_0) - x_{m+1}(t, x_0)) + (x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0))$$

с учетом (16) и [3] имеем

$$| x_{m+j}(t, x_0) - x_m(t, x_0) | \leqslant \sum_{i=0}^{j} r_{m+i}(t) \leqslant \tilde{\alpha}_1(t) \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{KT}{\pi}\right)^{m+i} M + \right.$$

$$\left. + K \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{KT}{\pi}\right)^{m+i-1} \beta_1(x_0) \right\} + \sum_{i=0}^{j-1} Q_1^{m+i-1} \beta_2(x_0) \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\alpha}_1(t) \left\{ Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i M + K Q^{m-1} \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \beta_1(x_0) \right\} + \sum_{i=0}^{j-1} Q_1^{m+i-1} \beta_2(x_0). \qquad (17)$$

В силу (6) очевидно, что все собственные значения матрицы $Q = TK/\pi$ находятся в круге единичного радиуса, т. е. $\lambda(Q) < 1$, как только $\lambda(Q_1) < < 1$. Поэтому

$$Q^m \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leqslant Q^m \sum_{i=0}^{\infty} Q^i = Q^m (E - Q)^{-1},$$

$$Q^{m-1} \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \leqslant Q^{m-1} (E - Q)^{-1}, \qquad \lim_{m \to \infty} Q^m = 0, \qquad (18)$$

$$Q_1^{m-1} \sum_{i=0}^{j-1} Q_1^i \leqslant Q_1^{m-1} (E - Q_1)^{-1}, \quad \lim_{m \to \infty} Q_1^m = 0.$$

Из соотношений (17), (18) можно заключить, что при $m \to \infty$ последовательность функций $\{x_m(t, x_0)\}$ равномерно сходится в области $(t, x_0) \in [0, T] \times D_\beta$:

$$\lim_{m \to \infty} x_m(t, x_0) = x^*(t, x_0). \qquad (19)$$

Поскольку все функции вида (11) удовлетворяют краевым условиям (2), то и предельная функция $x^*(t, x_0)$ также удовлетворяет им.

Устремляя $j \to \infty$, из (17) с учетом (18) при всех $m = 1, 2, \ldots$ для оценки отклонения точного решения $x^*(t, x_0)$ от m-го приближения $x_m(t, x_0)$ получаем

$$| x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0) | \leqslant \tilde{\alpha}_1(t) [Q^m (E - Q)^{-1} M + K Q^{m-1} (E - Q)^{-1} \beta_1(x_0)] +$$

$$+ Q_1^{m-1} (E - Q_1)^{-1} \beta_2(x_0).$$

Если в формуле (11) перейти к пределу при $m \to \infty$ и учесть (19), то видно, что предельная функция $x^*(t, x_0)$ действительно является решением интегрального уравнения (12), которое при $t = 0$ проходит через точку $x^*(0, x_0) = x_0$ и удовлетворяет краевым условиям (2).

2. Свяжем вопрос разрешимости краевой задачи (1), (2) с существованием нулей вектор-функции $\Delta(x_0)$, зависящей от $x_m\ (t, x_0)$, а также установим, как с помощью специальным образом выбранного управляющего параметра всегда можно так изменить правую часть дифференциального уравнения (1), что решение полученного уравнения, проходящее при $t = 0$ через определенную точку, будет в то же время удовлетворять краевым условиям (2).

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *для любой точки* $x_0 \in D_\beta$ *можно указать такое единственное значение управляющего параметра* $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, *равное*

$$\mu = \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T Lf(t, x^*(t, x_0))\,dt\right) - 2x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, x_0))\,ds, \quad (20)$$

где $x^*(t, x_0)$ — *предельная функция последовательности* (11), *что решение* $x = x(t) = x^*(t, x_0)$ *системы дифференциальных уравнений с параметром в правой части вида*

$$\dot{x} = f(t, x) + \mu, \quad (21)$$

принимающее при $t = 0$ *начальное значение* $x(0) = x_0$, $x_0 \in D_\beta$, *будет также удовлетворять и краевым условиям* (2), *т. е. являться решением краевой задачи* (2), (20), (21).

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что функция $x(t) = x^*(t, x_0)$, являясь решением интегрального уравнения (12), в то же время будет и решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x_0) + \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T Lf(t, x(t, x_0))\,dt\right) - 2x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s, x_0))\,ds, \quad (22)$$

$$x(0) = x_0, \quad (23)$$

удовлетворяющим краевым условиям (2).

Итак, мы нашли значение параметра μ вида (20), при котором $x(t) = x^*(t, x_0)$ будет решением краевой задачи (2), (22), удовлетворяющим начальному условию (23). Остается показать,что это значение параметра единственно, т. е. при всяком другом значении, отличном от μ вида (20), решение задачи Коши (21), (23) не будет удовлетворять краевым условиям (2).

Предположим противное. Пусть существуют два значения $\mu : \mu'$ и μ'', $\mu' \neq \mu''$, такие, что решения $x(t, x_0, \mu')$ и $x(t, x_0, \mu'')$ задачи Коши (21), (23) при $\mu = \mu'$ и $\mu = \mu''$, удовлетворяют краевым условиям (2). Тогда для разности $x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')$ из (12) получаем тождество

$$x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu') = \int_0^t \Big[f(t, x(t, x_0, \mu'')) - f(t, x(t, x_0, \mu')) -$$
$$- \frac{1}{T}\int_0^T [f(s, x(s, x_0, \mu'')) - f(s, x(s, x_0, \mu'))]\,ds +$$
$$+ \frac{2}{T}\int_0^T [Lf(t, x(t, x_0, \mu'')) - Lf(t, x(t, x_0, \mu'))]\,dt\Big]\,dt.$$

Из последнего соотношения получаем

$$|x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| \leqslant K\Big[\Big(1 - \frac{t}{T}\Big)\int_0^t |x(s, x_0, \mu'') - x(s, x_0, \mu')|\,ds +$$
$$+ \frac{t}{T}\int_t^T |x(s, x_0, \mu'') - x(s, x_0, \mu')|\,ds + \frac{2}{T}K\int_0^T\Big[\Big(1 - \frac{t}{T}\Big)\int_0^t |x(s, x_0, \mu'') -$$

$$-x(s, x_0, \mu')|\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T |x(s, x_0, \mu'') - x(s, x_0, \mu')|\,ds\Bigg]\,dt. \tag{24}$$

Положив $|x(t, x_0, \mu'') - x(t, x_0, \mu')| = r(t)$ и $|r(t)|_0 = (\sup_t |r_1(t)|, \sup_t |r_2(t)|, \ldots, \sup_t |r_n(t)|)$, из (24) можем найти, что для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$r(t) \leqslant \alpha_{m+1}(t)\,K^{m+1}\,|r(t)|_0 + \frac{2}{T}\int_0^T \alpha_{m+1}(t)\,K^{m+1}\,|r(t)|_0\,dt. \tag{25}$$

Используя оценку α_{m+1} из [3], с учетом (25) имеем

$$|r(t)|_0 \leqslant \tilde{\alpha}_1(t)\,KQ^m\,|r(t)|_0 + \frac{2}{T}\int_0^T \tilde{\alpha}_1(t)\,KQ^m\,|r(t)|_0\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi TK}{6}\,Q^m\,|r(t)|_0 + \frac{2\pi TK}{9}\,Q^m\,|r(t)|_0.$$

Поскольку все собственные значения матрицы Q лежат в круге единичного радиуса, то последнее неравенство возможно лишь при $|r(t)|_0 = 0$, т. е. при $\mu' = \mu''$. Противоречие доказывает единственность управляющего параметра μ.

Выясним, при каких необходимых и достаточных условиях предельная функция последовательности (11) будет являться решением рассматриваемой задачи (1), (2).

Т е о р е м а 3. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то для того, чтобы решение* $x = x^*(t)$ *задачи Коши* (1), (23) *являлось и решением исходной краевой задачи* (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы определяющая вектор-функция*

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T Lf(t, x^*(t, x_0))\,dt\right) - 2x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, x_0))\,ds \tag{26}$$

в точке $x = x_0$ *обращалась в нуль*

$$\Delta(x_0) = 0, \tag{27}$$

где $x^*(t, x_0)$ — *предельная функция последовательности* (11).

Кроме того, в этом случае $x^*(t) = x^*(t, x_0)$, *и при всех* $m = 1, 2, \ldots$ *для отклонения точного решения* $x = x^*(t) = x^*(t, x_0)$ *краевой задачи* (1), (2) *от ее приближенного решения* $x = x_m(t, x_0)$ *выполняется неравенство* (13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность условия (27) непосредственно следует из того, что функция $x^*(t, x_0)$, удовлетворяющая краевым условиям (2), является проходящим при $t = 0$ через точку $x(0) = x_0$ решением интегрального уравнения (12) или, что то же самое, решением задачи Коши (22), (23). Очевидно, если выполняется (27), то этого достаточно, чтобы функция $x^*(t, x_0)$ была решением краевой задачи (1), (2).

Необходимость выполнения условия (27) вытекает из того, что если $x = x^*(t)$ — решение краевой задачи (1), (2), проходящее при $t = 0$ через точку $x^*(0) = x_0$, $x_0 \in D_\beta$, то решение $x = x(t, x_0, \Delta)$ системы $\dot{x} = f(t, x) + \Delta(x_0)$ с тем же начальным значением $x(0, x_0, \Delta) = x_0$ будет удовлетворять краевым условиям (2) именно при $\Delta(x_0) = 0$, ибо в этом случае $x(t, x_0, \Delta = 0) = x^*(t)$.

Согласно теореме 2 решение задачи Коши (21), (23) будет одновременно и решением краевой задачи (2), (21) только при единственном значении параметра μ вида (20). Но такое значение параметра получено при $\mu = \Delta(x_0) = 0$, причем в этом случае $x^*(t) = x^*(t, x_0)$, что приводит к оценке (13).

3. Получим достаточные условия разрешимости краевой задачи (1), (2) на основании свойств последовательных приближений $x_m(t, x_0)$ вида (11).

Поскольку на практике чаще всего известно лишь приближенное значение $x_m(t, x_0)$ предельной функции $x^*(t, x_0)$, то для исследования разрешимости краевой задачи (1), (2) наряду с определяющим уравнением (26) введем в рассмотрение приближенное определяющее уравнение

$$\Delta_m(x_0) = \frac{1}{T}\left[\frac{2}{T}\left(d - \int_0^T Lf(t, x_m(t, x_0))\,dt\right) - 2x_0\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, x_0))ds, \tag{28}$$

которое отличается лишь тем, что вместо $x^*(t, x_0)$ выступает $x_m(t, x_0)$.

Сформулируем утверждение, определяющее достаточные условия разрешимости краевой задачи (1), (2).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того:*

а) существует выпуклая замкнутая область $D_1 \subset D_\beta$ такая, что для некоторого фиксированного $m \geqslant 1$ отображение $\Delta_m : D_\beta \to E_n$, порожденное (28), *имеет в D_1 единственную особую точку $x_0 = x_{0m}$ ненулевого индекса, т. е. приближенное определяющее уравнение* (28) *имеет в D_1 единственное решение ненулевого индекса;*

б) на границе S_1 области D_1 выполняется неравенство

$$\inf_{x_0 \in S_1} |\Delta_m(x_0)| > K\left[\frac{\pi T}{5} W(x_0) + \frac{4}{3} W_1(x_0)\right], \tag{29}$$

где $W(x_0)$, $W_1(x_0)$, $\beta_2(x_0)$ определены в (13).

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет решение $x = x^*(t)$, для которого начальное значение $x^*(0) = x_0^*$ принадлежит области $D_1 : x_0 = x_0^* \in D_1$.*

Доказательство. По определению индекс изолированной особой точки непрерывного отображения $\Delta_m(x_0)$ совпадает с вращением векторного поля, порожденного этим отображением на достаточно малой сфере $\overline{S}$ с центром в особой точке $x_0 = x_{0m}$. Поскольку по условию теоремы x_{0m} в области D_1 является единственной особой точкой отображения $\Delta_m(x_0)$, то индекс точки x_{0m} равен вращению векторного поля Δ_m на S_1 [4].

Более того, так как вращения гомотопных на компакте полей равны между собой, то если бы показать, что векторные поля $\Delta(x_0)$ и $\Delta_m(x_0)$ вида (26) и (28) являются гомотопными, то тем самым было бы доказано, что вращение поля $\Delta(x_0)$ на S_1 также отлично от нуля. Это в свою очередь обеспечивает существование в области D_1 особой точки x_0^* векторного поля $\Delta(x_0)$, т. е. точки, для которой $\Delta(x_0^*) = 0$.

Следовательно, решение $x^*(t)$ уравнения (1), проходящее при $t = 0$ через точку $x(0) = x_0^* \in D_1$, является решением краевой задачи (1), (2).

Для завершения доказательства теоремы остается установить гомотопность векторных полей $\Delta_m(x_0)$ и $\Delta(x_0)$. Для этого рассмотрим непрерывное по совокупности переменных свойство всюду непрерывных на S_1 векторных полей

$$P(\theta, x_0) = \Delta_m(x_0) + \theta[\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1, \tag{30}$$

соединяющее поля $P(0, x_0) = \Delta_m(x_0)$ и $P(1, x_0) = \Delta(x_0)$.

Покажем, что для $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $x_0 \in S_1$, при выполнении условия (29) вектор-функция $P(\theta, x_0) \neq 0$. Действительно, при $m \geqslant 1$ из (26), (28) с учетом условия Липшица (4) и оценки (13) получаем

$$|\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(t, x^*(t, x_0)) - f(t, x_m(t, x_0))|\,dt +$$

$$+ \frac{2}{T^2}\int_0^T |Lf(t, x^*(t, x_0)) - Lf(t, x_m(t, x_0))|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant K\left[\frac{\pi T}{5} W(x_0) + \frac{4}{3} W_1(x_0)\right] = \varepsilon(\Delta(x_0), \Delta_m(x_0)), \tag{31}$$

где $W(x_0)$, $W_1(x_0)$, $\beta_2(x_0)$ определены в (13).

Следовательно, на S_1 в силу (29)—(31) всегда справедливо неравенство

$$|P(\theta, x_0)| \geqslant |\Delta_m(x_0)| - |\Delta(x_0) - \Delta_m(x_0)| > 0,$$

т. е. вектор-функция $P(\theta, x_0)$ на S_1 действительно нигде при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ не принимает нулевое значение, что означает гомотопность векторных полей $\Delta(x_0)$ и $\Delta_m(x_0)$.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.— Киев : Наук. думка, 1986.— 224 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто А. М.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Модификация численно-аналитического метода последовательных приближений для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 8.— С. 1107—1116.
4. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.— М. : Наука, 1969.— 455 с.

Получено 28.12.90