УДК 517.9:534.1

Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ, акад. (Ин-т математики АН УССР, Киев),
НГУЕН ДОНГ АНЬ, д-р физ.-мат. наук (Вьетнам),
НГУЕН ТИЕН КХИЕМ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Колебания в системах первого порядка с запаздыванием

С помощью асимптотического метода детально исследованы колебания различных типов в системе первого порядка с большим запаздыванием.

За допомогою асимптотичного методу детально досліджені коливання різних типів у системі першого порядку з великим запізненням.

Многие встречающиеся в технике процессы описываются дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом. Для исследования уравнений такого типа эффективно применяются асимптотические методы, общая теория которых изложена в [1]. Более практические аспекты приложения этих методов к решению различных задач рассмотрены в [2]. В данной работе изучаются колебания в системах первого порядка с запаздыванием с помощью асимптотических методов, разработанных в [1, 2]. В отличие от других работ здесь рассматривается случай большого запаздывания, т. е. случай, когда запаздывание входит в немалые члены уравнения движения.

1. Свободные колебания. Сначала рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\dot{x}(t) + \alpha x(t) + \beta x(t - \Delta) = 0, \tag{1}$$

где α, β, Δ — постоянные. Характерическое уравнение, соответствующее (1), имеет вид $\lambda + \alpha + \beta \exp\{-\lambda\Delta\} = 0$. Это уравнение имеет чисто мнимые корни $i\omega$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\alpha + \beta\cos\omega\Delta = 0; \qquad \alpha^2 + \omega^2 = \beta^2. \tag{2}$$

Таким образом, уравнение (1) имеет периодическое решение с периодом $2\pi/\omega$, если α, β, Δ, ω удовлетворяют (2). Условия существования периодического решения уравнения (1) в виде соотношений (2) можно переписать так:

$$\beta^2 - \alpha^2 > 0; \qquad \alpha + \beta\cos\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,\Delta = 0. \tag{3}$$

Тогда частота колебания $\omega = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. В частности, если $\alpha = 0$, то $\omega = \beta$ и (3) примет вид

$$\cos\beta\Delta = 0. \tag{4}$$

В этом случае β играет роль собственной частоты, как и ω_0 в системе второго порядка $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

Заметим, что условия (3) не будут выполняться, если $\beta = 0$. Это соответствует известному факту: в линейной однородной системе первого порядка не может быть периодического колебания, кроме положения равновесия.

Для исследования нелинейного уравнения вида

$$\ddot{x}(t) + \beta x(t - \Delta) = \varepsilon f(x, \dot{x}), \tag{5}$$

$\varepsilon \ll 1$, применим асимптотический метод.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ линейное уравнение имеет периодическое решение, т. е. выполняется условие (4).

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$x(t) = a\cos\Phi + \varepsilon u_1(a, \theta, \Phi) + \varepsilon^2 \ldots, \ \Phi = \beta t + \theta, \tag{6}$$

где

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \ldots,$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \ldots. \tag{7}$$

Поскольку a, θ — медленно меняющиеся функции, с помощью (7) можно вычислить

$$a_\Delta = a(t - \Delta) = a(t) + \varepsilon\Delta A_1(a, \theta) + \ldots,$$

$$\theta_\Delta = \theta(t - \Delta) = \theta(t) - \varepsilon\Delta B_1(a, \theta) + \ldots. \tag{8}$$

Следовательно, учитывая условие (4), из (6) получаем

$$x_\Delta = x(t - \Delta) = a\sin\Phi + \varepsilon\{u_1 - a\Delta B_1\cos\Phi - \Delta A_1\sin\Phi\} + \ldots. \tag{9}$$

Далее имеем

$$\dot{x} = -a\beta\sin\Phi + \varepsilon\left\{\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_1\cos\Phi - aB_1\sin\Phi\right\} + \ldots, \tag{10}$$

$$f(x, \dot{x}) = f_0(a, \Phi) + \varepsilon F_0(a, \Phi) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{11}$$

где $f_0 = f(a\cos\Phi, -va\sin\Phi)$; $F_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 u_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + A_1\cos\Phi - aB_1\sin\Phi\right)$.

Нулевый индекс у производных функции $f(x, \dot{x})$ означает, что после дифференцирования необходимо вместо $x, \dot{x}$ подставить выражения $a\cos\Phi$, $-\nu a\sin\Phi$.

Согласно асимптотическому методу после подстановки (6) — (11) в (5) получаем следующие уравнения для определения A_1, B_1, u_1:

$$A_1 - \Delta a\beta B_1 = f_c; \qquad \Delta\beta A_1 + aB_1 = -f_s; \tag{12}$$

$$\beta\left(\frac{\partial u_1}{\partial\Phi} + u_1\right) = \sum_{n\neq 1}(f_n^c \cos n\Phi + f_n^s \sin n\Phi), \tag{13}$$

где f_c, f_n^c, f_s, f_n^s, $n \neq 1$, — коэффициенты Фурье функции $f_0(a, \Phi)$.

Из полученных уравнений непосредственно вытекают соотношения

$$A_1 = (1 + \Delta^2\beta^2)^{-1}\{f_c - \Delta\beta f_s\}; \qquad B_1 = -[(1 + \Delta^2\beta^2)\,a]^{-1}\{f_s + \Delta\beta f_c\};$$

$$u_1 = \sum_{n\neq 1}[\beta(n^2+1)]^{-1}\{(f_n^c - nf_n^s)\cos n\Phi + (f_n^s + nf_n^c)\sin n\Phi\}.$$

Далее можно определить A_2, B_2, u_2.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \beta x(t-\Delta) = -\varepsilon kx + \varepsilon\mu x^3.$$

В этом случае $f_s = 0$; $f_c = a\left(-k + \frac{3}{4}\mu a^2\right)$. Следовательно, $A_1 = (1 + \Delta^2\beta^2)^{-1} a\left(-k + \frac{3}{4}\mu a^2\right)$; $B_1 = -(1 + \Delta^2\beta^2)^{-1}\beta\left(-k + \frac{3}{4}\mu a^2\right)$. Так, в первом приближении амплитуда a удовлетворяет уравнению

$$\dot{a} = \varepsilon(1 + \Delta^2\beta^2)^{-1}\left(-k + \frac{3}{4}\mu a^2\right)a.$$

Отсюда можно заключить, что: а) положение равновесия устойчиво при положительном k, в этом случае линейный член kx играет роль силы трения; б) если k отрицательно, то существует и устойчиво стационарное колебание с конечной амплитудой, т. е. автоколебание, это и отличает рассматриваемую систему первого порядка с запаздыванием от обыкновенной системы второго порядка в случае нелинейности Дюффинга.

2. Вынужденные колебания. В линейном случае будем рассматривать уравнение

$$\dot{x}(t) + \beta x(t-\Delta) = P\cos\nu t + Q\sin\nu t \tag{14}$$

при выполнении условия (4).

Частное решение уравнения (14) имеет вид $x = A\cos\nu t + B\sin\nu t$, где

$$A = \frac{P(\beta\sin\nu\Delta - \nu) + Q\beta\cos\nu\Delta}{\nu^2 + \beta^2 - 2\beta\nu\sin\nu\Delta}; \quad B = \frac{P\beta\cos\nu\Delta - Q(\beta\sin\nu\Delta - \nu)}{\nu^2 + \beta^2 - 2\beta\nu\sin\nu\Delta}, \tag{15}$$

если $D = \nu^2 + \beta^2 - 2\beta\nu\sin\nu\Delta \neq 0$.

Из (15) будем иметь $A^2 + B^2 = (P^2 + Q^2)/D = R_0^2/D$. Кривая, характеризующая амплитудно-частотную зависимость, дана на рис. 1. Амплитуда принимает бесконечное значение при $\nu = \beta$. Этот случай назовем главным резонансом. Кроме того, амплитуда может иметь локальные максимумы в других точках, составляющих счетное множество, что напоминает резонанс системы с бесконечным числом степеней свободы.

Рассмотрим главный резонанс в нелинейной системе вида

$$\dot{x}(t) + \beta x(t-\Delta) = P\sin\nu t + Q\cos\nu t + \varepsilon f(x, \dot{x}). \tag{16}$$

Пусть $\beta - \nu = \varepsilon\sigma$, тогда

$$\sin \nu\Delta = 1 + \varepsilon^2 \ldots, \cos \nu\Delta = \varepsilon\sigma\Delta + \varepsilon^2 \ldots, \tag{17}$$

и уравнение 16 можно переписать таким образом:

$$\dot{x}(t) + \nu x(t - \Delta) = P \sin \nu t + Q \cos \nu t + \varepsilon (f - \sigma x_\Delta). \tag{18}$$

Ввиду малости решения уравнения (16) близко к решению уравнения (14), а решение последнего уравнения, как известно, в области главного

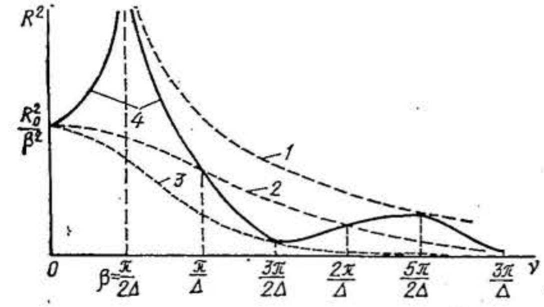

Рис. 1

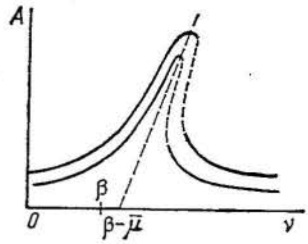

Рис. 2

резонанса приближается к бесконечности. Значит, не имеет смысла рассматривать (16) при любых конечных значениях P, Q. Предположим, что $P = \varepsilon P_0$, $Q = \varepsilon Q_0$ или $R_0 = \sqrt{P^2 + Q^2} = \varepsilon r_0$. Тогда (18) примет вид

$$\dot{x}(t) + \nu x(t - \Delta) = \varepsilon \{P_0 \sin \nu t + Q_0 \cos \nu t + f(x, \dot{x}) - \sigma x_\Delta\}. \tag{19}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$x(t) = a \cos \Phi + \varepsilon u_1(a, \theta, \Phi) + \varepsilon^2 \ldots, \Phi = \nu t + \theta, \tag{20}$$

где

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \ldots, \quad \dot{\theta} = \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \ldots.$$

С учетом (17) из (20) получаем

$$\dot{x}(t) = - a\nu \sin \Phi + \varepsilon \left\{A_1 \cos \Phi - aB_1 \sin \Phi + \nu \frac{\partial u_1}{\partial \Phi}\right\} + \ldots, \tag{21}$$

$$x_\Delta = a \sin \Phi + \varepsilon \{- \Delta A_1 \sin \Phi - (B_1 - \sigma) \Delta a \cos \Phi + u_1\} + \ldots. \tag{22}$$

Правую часть (19) перепишем в виде

$$\varepsilon \{M \cos \Phi + N \sin \Phi - \sigma a \sin \Phi + f(a \cos \Phi, - \nu a \sin \Phi)\} + \varepsilon^2 \ldots, \tag{23}$$

где $M = Q_0 \cos \theta - P_0 \sin \theta$, $N = P_0 \cos \theta + Q_0 \sin \theta$, откуда следует $M^2 + N^2 = r_0^2$.

Следуя асимптотическому методу, подставляя (21)—(23) в (19), получаем соотношение

$$\{A_1 - \nu\Delta a (B_1 - \sigma) - M\} \cos \Phi + \{- aB_1 - \nu\Delta A_1 + \sigma a - N\} \sin \Phi +$$
$$+ \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial \Phi} + u_1\right) = f(a \cos \Phi, - \nu a \sin \Phi).$$

Пусть

$$f(a \cos \Phi, - \nu a \sin \Phi) = f_c \cos \Phi + f_s \sin \Phi + \sum_{n \neq 1} (f_n^c \cos n\Phi + f_n^s \sin \Phi);$$

$$u_1 = \sum_{n \neq 1} (V_n \cos n\Phi + W_n \sin n\Phi).$$

Приравняв коэффициенты функций $\cos n\Phi$, $\sin n\Phi$, будем иметь

$$A_1 - \nu\Delta a(B_1 - \sigma) = M + f_c; \qquad \nu\Delta A_1 + a(B_1 - \sigma) = -N - f_s,$$

$$V_0 = \frac{1}{\nu} f_0^c, \quad V_n + nW_n = \frac{1}{\nu} f_n^c; \qquad -nV_n + W_n = \frac{1}{\nu} f_n^s,$$

откуда получаем

$$A_1 = (1 + \nu^2\Delta^2)^{-1} \{M + \nu\Delta N + f_c - \nu\Delta f_s\};$$

$$B_1 = \sigma - [a(1 + \nu^2\Delta^2)]^{-1} \{\nu\Delta M + N + \nu\Delta f_c + f_s\};$$

$$V_n = [\nu(n^2 + 1)]^{-1} \{f_n^c - nf_n^s\}; \qquad W_n = [\nu(n^2 + 1)]^{-1} \{nf_n^c + f_n^s\}.$$

Таким образом, получили улучшенное первое приближение

$$x(t) = a\cos\Phi + \varepsilon u_1(a, \Phi),$$

$$\dot a = \varepsilon A_1(a, \theta), \quad \dot\theta = \varepsilon B_1(a, \theta), \quad \Phi = \nu t + \theta.$$

Стационарные амплитуда и фаза находятся из уравнений $A_1(a, \theta) = 0$, $B_1(a, \theta) = 0$ или же

$$\nu\Delta f_s - f_c = M - \nu\Delta N; \qquad (1 + \nu^2\Delta^2)\sigma a - f_s - \nu\Delta f_c = \nu\Delta M + N.$$

Уравнение амплитудно-частотной резонансной кривой имеет вид

$$H(a, \nu) \equiv f_c^2 + f_s^2 - 2\sigma a(\nu\Delta f_c - f_s) + (1 + \nu^2 a^2)\sigma^2 a^2 - r_0^2 = 0. \tag{24}$$

Условия устойчивости выражаются неравенствами

$$\frac{\partial}{\partial a}[a(f_c - \nu\Delta f_s)] < 0; \qquad \frac{\partial}{\partial a} H(a, \nu) > 0.$$

Для примера, пусть функция f имеет вид $f = k_0 x + \mu_0 x^3$. Тогда $f_s = 0$, $f_c = a\left(k_0 + \frac{3}{4}\mu_0 a^2\right)$ и уравнение (24) примет вид

$$\left(\frac{3}{4}\mu_0 a^2 + k_0 - \nu\Delta\sigma\right)^2 + \sigma^2 - \frac{r_0^2}{a^2} = 0.$$

Введем обозначения $k = \varepsilon k_0$, $\mu = \varepsilon\mu_0$, $r = \varepsilon r_0$. Учитывая, что $\varepsilon\delta = \beta - \nu$, с точностью до членов малости порядка больше 2 последнее равенство приведем к виду

$$\left[\frac{3}{4}\mu a^2 + k - \beta\Delta(\beta - \nu)\right]^2 + (\beta - \nu)^2 - \frac{r^2}{a^2} = 0.$$

Отсюда, решая уравнение относительно ν, получаем

$$\nu = \beta - \bar\mu(A + m) \mp \bar\mu\left(\frac{J}{A} + (A + m)^2\right)^{1/2},$$

где

$$A = \frac{3}{4}a^2; \qquad \bar\mu = \mu\frac{\beta\Delta}{1 + \beta^2\Delta^2}; \qquad m = \frac{k}{\mu}; \qquad J = \frac{3r^2}{4\bar\mu^2(1 + \beta^2\Delta^2)}.$$

В зависимости от знаков μ, k различаем два случая: $m \geqslant 0$ и $m < 0$. В первом случае, при положительных k, μ, всевозможные колебания неустойчивы, для отрицательных k, μ устойчивым колебаниям соответствуют сплошные части резонансной кривой (РК), изображенной на рис. 2. В данном случае картина колебаний не отличается от таковой в случае системы второго порядка без запаздывания. Во втором случае, т. е. при $m < 0$, если $J > 4m^3/27$, то РК имеет аналогичную случаю $m \geqslant 0$ форму. При $J = 4m^3/27$ она имеет точки самопересечения. В другом случае РК состоит из двух частей, одна из которых представляет собой замкнутую кривую. На рис. 3 изображена картина колебаний для $k < 0$, $\mu > 0$, а на рис. 4 — для $k>0$, $\mu < 0$. Штрихованная часть и пунктирные отрезки кривых соответствуют неустойчивым колебаниям. Здесь видно, что система ведет себя как система Ван дер Поля второго порядка. В этом же заключается влияние запаздывания на колебания системы первого порядка.

3. Субгармонические колебания. Рассмотрим возможные колебания вне области главного резонанса. Эти колебания имеют

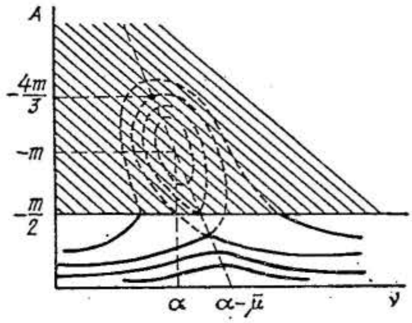

Рис. 3

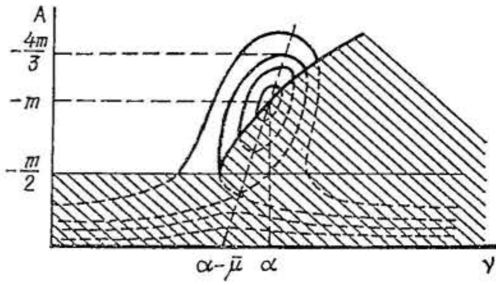

Рис. 4

частоту, равную кратности собственной частоты $\nu = n\beta$. Для этого возьмем уравнение (16) вместе с условием (4). Предположим, что

$$\nu = n(\beta - \varepsilon\sigma), \quad n > 1. \tag{25}$$

Тогда уравнение (16) можно переписать в виде

$$\dot{x}(t) + \frac{\nu}{n} x(t-\Delta) = P\sin\nu t + Q\cos\nu t + \varepsilon(f - \sigma x_\Delta). \tag{26}$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде

$$x(t) = A\cos\nu t + B\sin\nu t + a\cos\Phi + \varepsilon u_1(a, \theta, \Phi) + \ldots, \tag{27}$$

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 \ldots, \quad \dot{\theta} = \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\Phi = \frac{\nu}{n} t + \theta.$$

Заметим, что при условии (25) выполняется равенство

$$\sin\nu\Delta = \sin n\beta\Delta - \varepsilon n\sigma\Delta\cos n\beta\Delta; \qquad \cos\nu\Delta = \cos n\beta\Delta + \varepsilon n\sigma\Delta\sin n\beta\Delta.$$

Аналогично изложенному в п. 2 элементарными вычислениями получаем

$$\dot{x}(t) = -\nu A\sin\nu t + \nu B\cos\nu t - \frac{\nu}{n} a\sin\Phi + \varepsilon\left\{A_1\cos\Phi - aB_1\sin\Phi + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu}{n}\frac{\partial u_1}{\partial\Phi}\right\} + \varepsilon^2 \ldots, \tag{28}$$

$$x_\Delta = \bar{A}\cos\nu t + \bar{B}\sin\nu t + a\sin\Phi + \varepsilon\{-\Delta A_1\sin\Phi + \Delta(\sigma - B_1) \times$$

$$\times a\sin\Phi + u_1\} + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\bar{A} = A\cos n\beta\Delta - B\sin n\beta\Delta; \qquad \bar{B} = A\sin n\beta\Delta + B\cos n\beta\Delta.$$

Подставляя (27), (28) в (26), с помощью обычной процедуры асимптотического метода получаем

$$\left(-\nu+\frac{\nu}{n}\sin n\beta\Delta\right)A+\frac{\nu}{n}B\cos n\beta\Delta=P;\qquad \frac{\nu}{n}A\cos n\beta\Delta+$$

$$+B\left(\nu-\frac{\nu}{n}\sin n\beta\Delta\right)=Q;\qquad \left\{A_1-\frac{\nu\Delta}{n}a(B_1-\sigma)\right\}\cos\Phi-\left\{\frac{\nu\Delta}{n}A_1+\right.$$

$$\left.+a(B_1-\sigma)\right\}\sin\Phi+\frac{\nu}{n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\Phi}+u_1\right)=f_0(a,\theta,\Phi)+\sigma\{C_n\cos n\Phi+$$

$$+S_n\sin n\Phi\};\quad C_n=\{(n\Delta-1)A\sin n\beta\Delta-B\cos n\beta\Delta\}\sin n\theta+\{A\cos n\beta\Delta+$$

$$+(n\Delta-1)B\sin n\beta\Delta\}\cos n\theta;\qquad S_n=\{(n\Delta-1)A\sin n\beta\Delta-B\cos n\beta\Delta\}\times$$

$$\times\cos n\theta+\{(A+n\Delta B)\cos n\beta\Delta-B\sin n\beta\Delta\}\sin n\theta;\qquad f_0(a,\theta,\Phi)=$$

$$=f\Big[A\cos n(\Phi-\theta)+B\sin n(\Phi-\theta)+a\cos\Phi,\ -\nu A\sin n(\Phi-\theta)+$$

$$+\nu B\cos n(\Phi-\theta)-\frac{\nu}{n}a\sin\Phi\Big].\tag{29}$$

Разлагая функцию $f_0(a,\theta,\Phi)$ в ряд Фурье, сравнивая коэффициенты при $\cos n\Phi$, $\sin n\Phi$, получаем

$$A_1-\frac{\nu}{n}\Delta a(B_1-\sigma)=f_c;\qquad \frac{\Delta\nu}{n}A_1+a(B_1-\sigma)=f_s;\tag{30}$$

$$\frac{\nu}{n}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\Phi}+u_1\right)=\sigma\{C_n\cos n\Phi+S_n\sin n\Phi\}+\sum_{m\neq1}(f_m^c\cos m\Phi+f_m^s\sin m\Phi).\tag{31}$$

Таким образом, из соотношения (29) определяются A, B, из соотношения (30) — A_1, B_1, и из (31) находится u_1. Действительно, после решения указанных уравнений получаем

$$A=\frac{n}{\nu D}\{P(\sin n\beta\Delta-n)+Q\cos n\beta\Delta\};\qquad B=\frac{n}{\nu D}\{P\cos n\beta\Delta-$$

$$-Q(\sin n\beta\Delta-n)\};\qquad D=1+n^2-2n\sin n\beta\Delta;\qquad A^2+B^2=M^2=$$

$$=n^2(P^2+Q^2)\nu^{-2}D^{-1},\quad A_1=\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)^{-1}\left\{f_c-\frac{\nu\Delta}{n}f_s\right\};$$

$$B_1=\sigma-\left[a\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)\right]^{-1}\left\{\frac{\nu\Delta}{n}f_c+f_s\right\};\qquad u_1=\sum_{m\neq1}(V_m\cos m\Phi+$$

$$+W_m\sin m\Phi);\qquad V_m=\frac{n}{\nu(1+m^2)}\{f_m^c-f_m^s\};\qquad W_m=\frac{n}{\nu(1+m^2)}\times$$

$$\times\{mf_m^c+f_m^s\},\quad m\neq n,\quad m\neq1;$$

$$V_n=\frac{n}{(1+n^2)\nu}\{f_n^c+\sigma C_n-nf_n^s-n\sigma S_n\};\qquad W_n=\frac{n}{(1+n^2)\nu}\times$$

$$\times\{nf_n^c+n\sigma C_n+f_n^s+\sigma S_n\}.$$

Величину $x_n=a\cos\left(\frac{\nu}{n}t+\theta\right)$ назовем субгармоническим колебанием рассматриваемой системы. Для исследования субгармонического колебания используем уравнения амплитуды и фазы

$$\dot{a}=\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)^{-1}\left\{f_c-\frac{\nu\Delta}{n}f_s\right\};\qquad \dot{\theta}=\sigma-\left[a\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{f_s+\frac{\nu\Delta}{n}f_c\right\}.$$

Стационарный режим определяется системой уравнений

$$\frac{\nu\Delta}{n}f_s-f_c=0;\qquad a\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{n^2}\right)\sigma-f_s-\frac{\nu\Delta}{n}f_c=0.$$

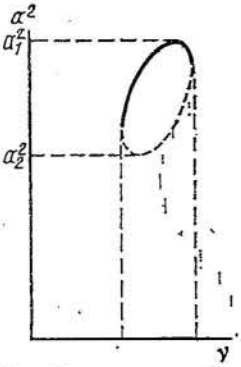

Рис. 5

Условия его устойчивости имеют вид

$$\frac{\partial f_c}{\partial a}-\frac{\nu\Delta}{n}\frac{\partial f_c}{\partial\theta}-\frac{\partial f_s}{\partial\theta}-\frac{\nu\Delta}{n}\frac{\partial f_s}{\partial a}<0;$$
$$\frac{\partial f_s}{\partial a}\frac{\partial f_c}{\partial\theta}-\frac{\partial f_c}{\partial a}\frac{\partial f_s}{\partial\theta}-\sigma\left\{\frac{\partial f_c}{\partial\theta}-\frac{\nu\Delta}{n}\frac{\partial f_s}{\partial\theta}\right\}>0. \tag{32}$$

Рассмотрим в качестве примера случай нелинейности Дюффинга

$$\dot{x}(t)+\beta x(t-\Delta)+kx+\mu x^3=P\sin\nu t+Q\cos\nu t. \tag{33}$$

После элементарных вычислений получим

$$n=3;\ A=-\frac{3P}{4\nu};\ B=-\frac{3Q}{4\nu};\ M^2=\frac{9(P^2+Q^2)}{16\nu^2};$$

$$f_c=-\left\{k_0+\frac{3}{4}\mu_0(a^2+2M^2)+\frac{3}{4}\mu_0 a(A\cos3\theta-B\sin3\theta)\right\}a;$$

$$f_s=-\frac{3\mu_0}{4}a^2(A\sin3\theta+B\cos3\theta);\qquad h(a)\equiv k+\frac{3\mu}{4}(a^2+2M^2).$$

Следовательно,

$$\dot{a}=-\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{9}\right)^{-1}\left\{ah(a)+\frac{3\mu}{4}a^2\left[\left(A-\frac{\nu\Delta}{3}B\right)\cos3\theta-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\frac{\nu\Delta}{3}A+B\right)\sin3\theta\right]\right\};$$

$$\dot{\theta}=\beta-\frac{\nu}{3}+\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{9}\right)^{-1}\left\{\frac{\nu\Delta}{3}h(a)+\frac{3\mu}{4}a\left[\left(\frac{\nu\Delta}{3}A+B\right)\cos3\theta+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(A-\frac{\nu\Delta}{3}B\right)\sin3\theta\right]\right\}.$$

Стационарные амплитуда и фаза удовлетворяют системе

$$h(a)+\frac{3\beta a}{4}\left[\left(A-\frac{\nu\Delta}{3}B\right)\cos3\theta-\left(\frac{\nu\Delta}{3}A+B\right)\sin3\theta\right]=0.$$
$$\left(1+\frac{\nu^2\Delta^2}{9}\right)\left(\beta-\frac{\nu}{3}\right)+\frac{\nu\Delta}{3}h(a)+\frac{3\mu}{4}a\left[\left(\frac{\nu\Delta}{3}A+B\right)\cos3\theta+\right.$$
$$\left.+\left(A-\frac{\nu\Delta}{3}B\right)\sin3\theta\right]=0,$$

из которой, исключив θ, получим уравнение РК с точностью до членов малости порядка ε^2 в виде

$$(1+\beta^2\Delta^2)\left(\frac{\nu}{3}-\beta\right)^2+2\beta\Delta h(a)\left(\frac{\nu}{3}-\beta\right)+h^2(a)-\frac{81\mu^2r_0^4a^2}{256\nu^2}=0.$$

При выполнении условия

$$k \leqslant (\beta^2\Delta^2 - 7)\frac{9\mu r_0^2}{256\beta^2} \tag{34}$$

полученное уравнение можно решить относительно ν:

$$\nu = 3\beta - \frac{3\beta\Delta}{1+\beta^2\Delta^2}h(a) \pm 3\left\{\frac{9\mu^2 r_0^2 a^2}{256\beta^2(1+\beta^2\Delta^2)} - \frac{h^2(a)}{(1+\beta^2\Delta^2)^2}\right\}^{1/2}. \tag{35}$$

Условия устойчивости (32) теперь принимают вид $\beta > 0$. РК (35) изображена на рис. 5, где непрерывная часть соответствует устойчивым колебаниям. Максимальное и минимальное значения амплитуды вычисляются по формулам

$$a_{1,2}^2 = -\frac{4}{3}m + \frac{r_0^2}{32\beta^2}(\beta^2\Delta^2 - 3) \pm \frac{r_0}{3\beta}\left\{(1+\beta^2\Delta^2)\left[\frac{9r_0^2(\beta^2\Delta^2-7)}{256\beta^2} - 3m\right]\right\}^{1/2}.$$

Таким образом, в системе (35) в случае жесткой характеристики нелинейности при условии (34) существует устойчивое субгармоническое колебание третьего порядка.

4. Выводы. А) В линейной системе первого порядка с запаздыванием при определенном условии возможны собственные колебания. В таком случае внешние периодические силы могут вызывать множество резонансных колебаний, среди которых только одно имеет бесконечную амплитуду (главный резонанс).

Б) При наличии малой нелинейности типа Дюффинга амплитуда ограничена, в этом случае нелинейность играет роль демпфера. При отсутствии внешних сил в системе может быть устойчивое автоколебание. Под действием внешних сил картина колебаний в зависимости от знаков параметров напоминает картину колебаний системы второго порядка без запаздывания.

В) Под действием немалых периодических сил в нелинейной системе первого порядка с запаздыванием при определенных условиях существует устойчивое субгармоническое колебание, амплитуда которого ограничена как сверху, так и снизу.

1. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Наук. думка, 1979.— 248 с.
2. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М. : Наука, 1969.— 288 с.
3. *Нгуен Ван Дао.* Нелинейные колебания систем высокого порядка.— Ханой: Изд-во НЦНИ Вьетнама, 1979.— 64 с.

Получено 27.02.91