УДК 517.958;532.595

И. А. ЛУКОВСКИЙ, чл.-корр. АН Украины, А. Н. ТИМОХА, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН Украины, Киев)

Вариационный принцип Бейтмена для одного класса задач динамики и устойчивости поверхностных волн

Обобщен принцип Бейтмена — Люке для задачи об акустическом взаимодействии со свободной поверхностью ограниченного объема жидкости. Доказаны экстремальные признаки устойчивости капиллярно-звуковых равновесных форм.

Узагальнено принцип Бейтмена — Люке для задачі про акустичну взаємодію з вільною поверхнею обмеженого об'єму рідини. Доведені екстремальні ознаки стійкості капілярно-звукових форм рівноваги.

В работе [1] рассмотрена нелинейная эволюционная краевая задача с неизвестной поверхностью раздела двух областей, которая возникает в теории ограниченных объемов несмешивающихся сплошных сред. Для указанной дифференциальной задачи в рамках общей теории возмущений построено ее некоторое частное решение, имеющее смысл динамического положения равновесия, и введено понятие капиллярно-звуковой равновесной формы (КЗРФ), определяемой как среднее во времени положение поверхности раздела. Выписана задача в вариациях относительно КЗРФ. После применения к последней процедуры разделения движений и усреднения по быстроизменяющимся переменным сформулирована задача о собственных колебаниях системы относительно КЗРФ, установлены теоремы о свойствах спектра этой задачи, а также об устойчивости упомянутых форм равновесия.

В работе [2] для случая, когда область является цилиндрической, показано, что задача о КЗРФ может быть получена из условия стационарности некоторого функционала, и сформулированы два вариационных принципа. Кроме того, в [3] (также для цилиндрической области) доказано, что исходная дифференциальная эволюционная краевая задача с неизвестной поверхностью раздела двух областей допускает вариационную формулировку, использующую функционал типа Бейтмена — Люке [4, 5], применявшийся ранее для вывода уравнений и решения задач динамики тел с полостями, частично заполненными жидкостью [6].

В настоящей работе указанные вариационные принципы обобщаются на случай произвольной выпуклой кусочно-гладкой области и устанавливается их взаимосвязь. Будет показано, что вариационные принципы, сформулированные в [2], могут быть получены путем проведения аналогичной [7, 8] процедуры усреднения в функционале Бейтмена, а проблема устойчивости КЗРФ может быть решена путем анализа экстремальных свойств стационарного функционала, приведенного в [2]. Будет доказано также, что условие строгого максимума последнего эквивалентно спектральному признаку устойчивости КЗРФ, полученному в [1].

1. Дифференциальная постановка задачи. Рассмотрим выпуклую кусочно-гладкую ограниченную область $Q \subset \mathbb{R}^3$ ($W(x, y, z) \leqslant 0$) и односвязную гладкую поверхность Σ, которая делит область на две подобласти $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$; $S_i = \partial Q_i \setminus \Sigma$, выделим некоторую поверхность $S_0 \subset S_1$. Исследуемая нелинейная задача примет вид [1]

$$\rho_i = \left(\frac{p_i}{p_{0i}}\right)^{1/\gamma_i}; \qquad \rho_{it} + \operatorname{div}(\rho_i \nabla\varphi_i) = 0 \text{ в } Q_i,$$

$$\rho_i\nabla(\varphi_{it}+0{,}5(\nabla\varphi_i)^2+b\mu\mu_1\varepsilon^3x)=-\nabla p_i \text{ в } Q_i, \quad i=1,2,$$
$$\partial\varphi_j/\partial n=0 \text{ на } S_j; \qquad \partial\varphi_j/\partial n=(-1)^{j+1}\xi_t/|\nabla\xi| \text{ на } \Sigma, \quad j=1,2,$$
$$p_2+\mu\mu_1\varepsilon^3(K_1+K_2)=\mu_1\varepsilon p_1 \text{ на } \Sigma, \tag{1}$$
$$(\nabla W,\nabla\xi)/|\nabla W|=\cos\alpha|\nabla\xi| \text{ на } \partial\Sigma,$$
$$\rho_1\partial\varphi_1/\partial n=\varepsilon\frac{\mu_0}{k}V(x,y,z)\sin t \text{ на } S_0,$$

где $\varphi_i,\ p_i,\ \rho_i:(0,+\infty)\times Q_i\to\mathbb{R};\ 1<\gamma_1<\gamma_2;\ |b|,\ |\mu|,\ |\mu_1|,\ |\mu_0|\sim 1;$ $|\varepsilon|\ll 1;\ 0<\alpha\leqslant\pi/2,\ \varepsilon\mu_1>0,\ \mu>0;$ n — внешняя нормаль к ∂Q или к Σ по отношению к Q_j; $\xi(t,x,y,z)=0$ — уравнение поверхности Σ, причем $\xi(x,y,z)<0\ \forall(x,y,z)\in Q_2$; (K_1+K_2) — сумма главных кривизн поверхности Σ; $(\gamma_i p_{0i})^{-1}=k_i^2,\ k_2<k_1$ (физический смысл всех обозначений подробно описан в работе [9]).

2. Вариационная формулировка задачи. Пусть Q — выпуклая кусочно-гладкая ограниченная область $Q\subset\mathbb{R}^3$, $\{\Sigma(t):(\xi(t,x,y,z)=0)\}$ — семейство гладких односвязных поверхностей, которое делит Q на две подобласти $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$. Пусть также $\varphi_i(t,x,y,z)\in C^2([t_1,t_2]\times Q)$, где t_1 и t_2 — произвольные фиксированные числа, а $\rho_i=\rho_i(p_i):(0,\infty)\to(0,\infty)$ — некоторая гладкая строго монотонно возрастающая функция, $P_i(p_i)=\int\limits_{p_{0i}}^{p_i}\rho_i^{-1}dp,\ p_i=P_i^{-1}(A_i)$ — обратная к $P_i(p_i)$:

$$p_i=P_i^{-1}(A_i); \qquad A_i=-\varphi_{it}-0{,}5(\nabla\varphi_i)^2-b\mu\mu_1\varepsilon^3x. \tag{2}$$

(В исследуемом случае $\rho_i=(p_i/p_{0i})^{1/\gamma_i},\ \gamma_i\neq1$, и функция $P_i(p_i)$ имеет обратную P_i^{-1} вида

$$p_i=P_i^{-1}(A_i)=((\gamma_i-1)A_i/(p_{0i}\gamma_i)+1)^{\gamma_i/(\gamma_i-1)}).$$

Рассмотрим функционал Бейтмена

$$B(\xi,\varphi_i)=\int\limits_{t_1}^{t_2}Ldt \tag{3}$$

с функцией Лагранжа вида

$$L=\mu\mu_1\varepsilon^3(-|\Sigma|-\cos\alpha|S_1|)+\int\limits_{Q_2(t)}p_2dQ+\mu_1\varepsilon\Bigg(\int\limits_{Q_1(t)}p_1dQ+$$
$$+\frac{\mu_0}{k}\int\limits_{S_0}\varepsilon V((x,y,z)\varphi_1\sin t ds\Bigg), \tag{4}$$

где $|\cdot|$ — площади поверхностей.

Теорема 1. *Задача отыскания стационарных точек функционала* (2)—(4) *при изохронных гладких вариациях*

$$\delta\xi|_{t_1,t_2}=0; \qquad \delta\varphi_i|_{t_1,t_2}=0 \tag{5}$$

эквивалентна решению задачи (1).

Доказательство. Поскольку вариации изохронны, имеем

$$\delta B=\int\limits_{t_1}^{t_2}\delta Ldt=0.$$

Последовательно определим $\delta_\xi L$ и $\delta_{\varphi_i}L$. Значение вариации L по ξ может быть легко определено (с учетом того, что пятое слагаемое в (4) не зависит от ξ), если воспользоваться соответствующими выкладками для подсчета первой вариации функционала

$$F(\xi) = (-|\Sigma| - \cos\alpha |S_1|) + \int_{Q_2} \Pi_2 dQ + \int_{Q_1} \Pi_1 dQ,$$

встречающегося в гидромеханике невесомости [9]. Равенство нулю вариации $\delta F = 0$ приводит к некоторому необходимому условию, которое в нашем случае принимает вид

$$p_2 + \mu\mu_1\varepsilon^3 (K_1 + K_2) = \mu_1 \varepsilon p_1 \text{ на } \Sigma(t),$$
$$(\nabla W, \nabla\xi)/|\nabla W| = \cos\alpha |\nabla\xi| \text{ на } \partial\Sigma(t).$$

Вариация $\delta_{\varphi_i} L$ вычисляется с учетом того, что граница областей $Q_i(t)$ переменна во времени. Непосредственный подсчет приводит сначала к выражению

$$\delta_{\varphi_i} B = \int_{t_1}^{t_2} \Big(- \int_{Q_2(t)} \rho_2 [(\delta\varphi_2)_t + (\nabla\varphi_2, \nabla\delta\varphi_2)]\, dQ - \mu_1 \varepsilon \Big\{ \int_{Q_1(t)} \rho_1 [(\delta\varphi_1)_t + (\nabla\varphi_1,$$
$$\nabla\delta\varphi_1)]\, dQ - \frac{\mu_0}{k} \int_{S_0} \varepsilon V(x, y, z)\, \delta\varphi_1 \sin t ds \Big\} \Big) dt,$$

а после применения формулы Гаусса — Остроградского с учетом правила вычисления производной $\frac{d}{dt} \int_{Q(t)} F dQ$ [5], получим

$$\delta_{\varphi_i} B = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big[\int_{Q_2} (\rho_{2t} + \operatorname{div}(\rho_2 \nabla\varphi_2))\, \delta\varphi_2 dQ - \frac{d}{dt} \int_{Q_2} \rho_2 \delta\varphi_2 dQ -$$
$$- \int_{\Sigma} \rho_2 (\partial\varphi_2/\partial n + \xi_t/|\nabla\xi|)\, \delta\varphi_2 ds - \int_{S_2} \rho_2 \partial\varphi_2/\partial n \delta\varphi_2 ds \Big] +$$
$$+ \mu_1 \varepsilon \Big[\int_{Q_1} \rho_{1t} + \operatorname{div}(\rho_1 \nabla\varphi_1))\, \delta\varphi_1 dQ - \frac{d}{dt} \int_{Q_1} \rho_1 \delta\varphi_1 dQ - \int_{\Sigma} \rho_1 (\partial\varphi_1/\partial n - \xi_t/|\nabla\xi|) \times$$
$$\times \delta\varphi_1 ds - \int_{S_1} \rho_1 \partial\varphi_1/\partial n \delta\varphi_1 ds + \int_{S_0} \rho_1 (-\partial\varphi_1/\partial n + \varepsilon\mu_0 V(x, y, z)/k)\, \delta\varphi_1 ds \Big] \Big\} dt = 0.$$

Отсюда, учитывая условие (5), следует доказательство.

3. **Усреднение в функционале Бейтмена. Частные (2π)-периодические решения.** В работе [1] анализировалась устойчивость (2π)-периодических решений задачи (1), которые были получены в виде рядов по степеням ε. Конечный результат формулировался в виде некоторой задачи на собственные значения. В настоящей работе применим процедуру усреднения [7, 8] в функционале Бейтмена, которая, как будет показано ниже, может свести исследование устойчивости динамического режима к исследованию на строгий экстремум функционала $J(\psi_j)$, $\psi_j = \psi_j(x, y, z)$. (В механике с конечным числом степеней свободы [7, 8] аналогичный функционал превращался в функцию многих переменных.) Для этого представим частное решение в виде асимптотических рядов по степеням ε:

$$\varphi_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_i^{(k)}; \qquad p_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_i^{(k)}; \qquad \xi = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k, \tag{6}$$

а $\varphi_i^{(k)}$, $p_i^{(k)}$, ξ_k разложим в ряды Фурье

$$\xi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_{k,i}^{(1)}(x, y, z) \cos it + \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{k,i}^{(2)}(x, y, z) \sin it,$$

$$\varphi_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i^{(k,j)}(x, y, z)\cos jt + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_i^{(k,j)}(x, y, z)\sin jt,$$
$$p_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} p_i^{(k,j)}(x, y, z)\cos jt + \sum_{j=0}^{\infty} q_i^{(k,j)}(x, y, z)\sin jt. \tag{7}$$

Подставим (6), (7) в функционал Бейтмена и усредним по t. Значение функционала с точностью до малых более высокого порядка примет вид

$$\langle B\rangle = J(\xi_0, \Phi_1) = \varepsilon\left\{\int_{(Q_2)} p_2^{(1,0)}dQ + \mu_1 \int_{(Q_1)} p_1^{(0,0)}dQ\right\} + \varepsilon^3\left\{\mu\mu_1\left(-|\Sigma_0| -\right.\right.$$
$$\left. - \cos\alpha\,|\langle S_1\rangle| - \int_{(Q_2)} bx dQ\right) + \mu_1\left\{\int_{(Q_1)} (k^2(\Phi_1)^2 - (\nabla\Phi_1)^2)\,dQ +\right.$$
$$\left. + \mu_0/k \int_{S_0} V(x, y, z)\,\Phi_1 ds\right\} + \ldots,$$

где $\Sigma_0\,(\xi_0(x, y\, z) = 0\ \forall (x, y, z) \in \Sigma_0,\ \ \xi_0(x, y, z) < 0\ \ \forall (x, y, z) \in \langle Q_2\rangle)$ — усреднение поверхности $\Sigma(t)$, а $\Phi_1^{df} = \Phi_1^{(1,1)}$, $k^2 = k_1^2$. Поскольку $p_2^{(1,0)} = \mathrm{const}$, $p_1^{(0,0)} = \mathrm{const}$, усредненный функционал J функция $\xi_0(x, y, z)$ и $\Phi_1(x, y, z)$ (с точностью до малых более высокого порядка). Условие стационарности функционала J $(\delta J = 0)$ приводит к полученной в [1, 2] задаче со свободной поверхностью (задаче о капиллярно-звуковой равновесной форме).

4. Вариационные принципы для задачи о КЗРФ. Задача о КЗРФ, полученная в [1] путем процедуры прямого разделения движений в дифференциальной задаче (1), имеет вид:

$$\mu\,(bx - (K_1 + K_2)) + 0{,}25\,(k^2(\Phi_1)^2 - (\nabla\Phi_1)^2) = \mathrm{const}\ \text{ на } \Sigma_0,$$
$$(\nabla W, \nabla\xi_0)/|\nabla W| = \cos\alpha\,|\nabla\xi_0| \text{ на } \partial\Sigma_0; \qquad \int_{(Q_2)} dQ = \mathrm{const}, \tag{8}$$

$$\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1 = 0 \text{ в } \langle Q_1\rangle; \qquad \partial\Phi_1/\partial n = 0 \text{ на } \langle S_1\rangle \cup \Sigma_0,$$
$$\partial\Phi_1/\partial n = \mu_0 V(x, y, z)/k \text{ на } S_0. \tag{9}$$

Она связывает гауссову кривизну средней поверхности Σ_0 с решением краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области, частью границы которой является Σ_0. Это делает задачу (8), (9) более сложной, чем задача о капилляре [9].

Теорема 2 (первый вариационный принцип). *Пусть Q — кусочно-гладкая выпуклая область, $\Phi_1 \in C^2(\langle Q_1\rangle)$, $\xi_0 \in C^2(Q)$, а Σ_0 — гладкая поверхность. Тогда условие стационарности J $(\delta_{\xi_0} J = 0,\ \delta_{\Phi_1} J = 0)$ эквивалентно задаче о КЗРФ.*

Доказательство. Эквивалентность $\delta_{\xi_0} J = 0$ условиям (8) следует из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 1 в части вычисления вариации от Лагранжиана по ξ (с использованием результатов работы [9]). Эквивалентность $\delta_{\Phi_1} J = 0$ условиям (9) следует из равенства

$$\delta_{\Phi_1} J = 2\mu_1\varepsilon^3\left\{\int_{(Q_1)} (k^2\Phi_1\delta\Phi_1 - (\nabla\Phi_1, \nabla\delta\Phi_1))\,dQ + \mu_0/k\int_{S_0} V(x, y, z)\,\delta\Phi_1 ds\right\} =$$
$$= 2\mu_1\varepsilon^3\left\{-\int_{(S_1)\cup\Sigma_0} \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\delta\Phi_1 ds + \int_{S_0}\left(\mu_0/kV - \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\right)ds +\right.$$
$$\left. + \int_{(Q_1)} (\Delta\Phi_1 + k^2\Phi_1)\,\delta\Phi_1 dQ\right\} = 0.$$

Следующая теорема является очевидным следствием предыдущей (при учете того, что $\delta_{\Phi_1} J = 0$ эквивалентно (9)). Однако, как будет показано ниже, она имеет самостоятельное значение при анализе устойчивости КЗРФ.

Теорема 3 (второй вариационный принцип). *Стационарное значение функционала* $J(\xi_0)$ *при ограничениях* (9) *достигается на решении задачи* (8).

5. Устойчивость КЗРФ. Спектральный признак устойчивости. Вариационный признак устойчивости. Согласно спектральному признаку устойчивости, сформулированному в [1], КЗРФ устойчива тогда и только тогда, когда положительны все λ, найденные из следующей задачи на собственные значения:

$$AH = \lambda H, \tag{10}$$

$$AH = -\operatorname{div}[\nabla H/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2} - \nabla H_0(\nabla H, \nabla H_0)/(1+(\nabla H_0)^{3/2}] +$$
$$+ (2\mu)^{-1}\{k^2\Phi_1\Phi_{1x}H - (\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_{1x})H + k^2\Phi_1\Phi - (\nabla\Phi_1, \nabla\Phi)\} + bH, \tag{11}$$

причем $\Phi = LH$, где линейный оператор L ставит в соответствие $H \to \Phi$ путем решения задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области $\langle Q_1\rangle$

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \text{ в } \langle Q_1\rangle; \qquad \partial\Phi/\partial n = 0 \text{ на } \langle S_1\rangle \cup S_0,$$
$$\partial\Phi/\partial n = -(\Phi_{1xx}H - \Phi_{1z}H_z - \Phi_{1y}H_y - [\Phi_{1xy}H_{0y} + \Phi_{1xz}H_{0z}]H)/ \tag{12}$$
$$/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2} \text{ на } \Sigma_0,$$

а на границе $\partial\Sigma_0$ выполняется условие

$$-\frac{W_zH_z + W_yH_y}{|\nabla W|} = \cos\alpha\,\frac{(\nabla H, \nabla H_0)}{(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2}}; \qquad \int_{\Sigma_0} H\,dy\,dz = 0. \tag{13}$$

(Здесь помимо гладкости Σ_0 и Φ_1, следуя классической теории поверхностных волн, предполагается возможность представления $\xi_0(x, y, z)$ в виде $\xi_0(x, y, z) = x - H_0(y, z) = 0$, а вариации в виде $\xi(x, y, z) = x - H(y, z) = 0$.)

Следующее утверждение позволяет свести исследование динамики и устойчивости поверхностных волн в задаче (1) к прямой минимизации некоторого стационарного функционала от $\xi_0(x, y, z) = x - H_0(y, z)$ и $\Phi_1(x, y, z)$.

Теорема 4 (об эквивалентности вариационного и спектрального признаков устойчивости КЗРФ). *В предположениях теоремы* 2, *а также при условии, что* $\xi_0(x, y, z) = x - H_0(y, z)$, *КЗРФ устойчива тогда и только тогда, когда на* Σ_0 *достигается строгий максимум функционала* $J(H_0)$ *при ограничении* (9).

Доказательство. Для доказательства теоремы запишем вторую вариацию функционала J при ограничении (9) ($\delta\Phi$ находится из (12) $H \to \delta H$, $\Phi \to \delta\Phi$):

$$\delta^2 J = -\varepsilon^3\mu\mu_1\Big\{\int_{\Sigma_0}(-\operatorname{div}[\Delta\delta H/(1+(\nabla H_0)^2)^{1/2} - \nabla H_0(\nabla\delta H, \nabla H_0)/(1+(\nabla H_0)^{3/2}] +$$
$$+ (2\mu)^{-1}\{k^2\Phi_1\Phi_{1x}\delta H - (\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_{1x})\delta H + k^2\Phi_1\delta\Phi - (\nabla\Phi_1, \nabla\delta\Phi)\} +$$
$$+ b\delta H)\,\delta H\,dy\,dz\Big\}.$$

Строгий максимум J на H_0 достигается тогда и только тогда, когда $\delta^2 J < 0\ \forall\ \delta H$. В работе [1] показано, что спектральная задача (10) имеет точечный бесконечный спектр, а собственные функции образуют полную ортонормированную систему функций в $L_2(\Sigma_0)$. Представим δH в виде разложения по собственному базису

$$\delta H = \sum a_k \delta H_k.$$

Вторая вариация J (с использованием разложения по собственному базису) имеет вид

$$\delta^2 J = - \varepsilon^3 \mu \mu_1 \sum a_k^2 \lambda_k;$$

$\delta^2 J < 0$ тогда и только тогда, когда $\forall k\ \lambda_k > 0$. Теорема доказана.

1. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Об одном классе краевых задач в теории поверхностных волн // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 3.— С. 365—370.
2. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Нелинейная динамика поверхности раздела жидкости и газа при наличии в газе высокочастотного акустического поля. Установившиеся режимы движения.— Киев, 1988.— 39 с.— (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 88.9).
3. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Вариационная формулировка одной нелинейной задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 4—9.
4. *Bateman H.* Partial differential equations of mathematical physics.— New York: Dover publications, 1944.— 522 p.
5. *Luke J. C.* A variational principle for a fluid with a free surface // J. Fluib Mech.— 1967.— 27.— P. 395—397.
6. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость.— Киев: Наук. думка, 1990.— 296 с.
7. *Блехман И. И., Лавров Б. П.* Об одном интегральном признаке устойчивости движения // Прикл. матеметика и механика.— 1960.— 24, № 5.— С. 938—941.
8. *Блехман И. И.* Обоснование интегрального признака устойчивости движения в задачах о самосинхронизации вибраторов // Там же.— 1960.— 24, № 6.— С. 1100—1103.
9. *Гидромеханика* невесомости / Под ред. А. Д. Мышкиса.— М. : Наука, 1978.— 504 с.

Получено 02.04.91