УДК 517.543

С. А. Кужель

Условие равномерной корректности задачи Коши в случае пространств с индефинитной метрикой

В гильбертовом пространстве H с индефинитной J-метрикой исследуется равномерная корректность задачи Коши для уравнения $dx/dt = Ax$, где A — максимальный J-диссипативный оператор. В частности, в случае пространства Понтрягина получен аналог теорем Филлипса о связи между максимальной диссипативностью оператора A и равномерной корректностью задачи Коши.

В гільбертовому просторі з індефінітною J-метрикою досліджується рівномірна коректність задачі Коші для рівняння $dx/dt = Ax$, де A — максимальный J-дисипативний оператор. Зокрема, у випадку простору Понтрягіна отримано аналог теореми Філліпса про зв'язок між максимальною дисипативністю оператора A та рівномірною коректністю задачі Коші.

В гильбертовом пространстве H рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dx/dt = Ax, \tag{1}$$

где A — замкнутый линейный оператор с плотной в H областью определения.

На основании теоремы Филлипса [1] (см. также [2]), задаче Коши уравнения (1) соответствует полугруппа сжатий класса C_0 тогда и только тогда, когда оператор A максимальный диссипативный.

Настоящая заметка посвящена обобщению этого результата на случай пространств с индефинитной метрикой.

В дальнейшем будем придерживаться общепринятой терминологии относительно пространств с индефинитной метрикой (J-метрика, J-ортогональность и т. п.; см., например, [3]). При этом, как обычно, оператор J является самосопряженным и унитарным.

Плотно определенный оператор A будем называть J-диссипативным, если $\operatorname{Re}[Ax, x] \leqslant 0$ $\forall x \in \mathfrak{D}(A)$, и максимальным J-диссипативным, если он не имеет нетривиальных J-диссипативных расширений.

Как известно [3], максимальная J-диссипативность оператора A эквивалентна максимальной диссипативности каждого из операторов JA и AJ.

Рассмотрим в H ортопроекторы $P_+ = \frac{1}{2}(I + J)$, $P_- = \frac{1}{2}(I - J)$, а также соответствующее разложение пространства $H : H = H_+ [+] H_-$, $(H_\pm = P_\pm H)$, где $[+]$ — знак J-ортогональности в H.

В случае, когда один из операторов (P_+ или P_-) конечномерный, соответствующее пространство с индефинитной метрикой называют пространством Понтрягина. При этом вместо J-диссипативности, J-самосопряженности и т. д. говорят о π-диссипативности, π-самосопряженности и т. д.

Напомним, что корректно поставленная задача Коши называется равномерно корректной, если из того, что $x_n(0) \to 0$ $(x_n(0) \in \mathfrak{D}(A))$ для соответствующих решений $x_n(t)$, следует, что $x_n(t) \to 0$ равномерно по t на каждом конечном промежутке $[0, T]$ (подробнее см. [2]).

1. Вспомогательные предложения. Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть A — максимальный плотно заданный J-диссипативный оператор, область определения которого содержит некоторый максимальный равномерно отрицательный линеал $\mathcal{L}_-$. Тогда существует такое число $\omega > 0$, что $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$ и для таких λ в некоторой норме $\|\cdot\|_1$, эквивалентной заданной, имеет место неравенство*

$$\| R_\lambda(A) \|_1 \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}. \tag{2}$$

(Как обычно, $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, а $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$).

Доказательство. Предположим что $\mathcal{L}_- = H_- \subset \mathfrak{D}(A)$. Тогда оператор AP_- замкнут, определен на всем пространстве и, следовательно, ограничен. При этом для любого $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$Jx = x - 2P_- x \in \mathfrak{D}(A).$$

Поэтому $A = AJ + 2AP_-$. Но тогда при $\operatorname{Re}\lambda > 0$

$$A - \lambda I = (I + 2AP_- R_\lambda(AJ))(AJ - \lambda I). \tag{3}$$

При этом, так как оператор AJ максимальный диссипативный, то

$$\| R_\lambda(AJ) \| < \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}, \qquad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, где $\omega = 2\| AP_- \|$,

$$\| 2AP_- R_\lambda(AJ) \| \leqslant \frac{\omega}{\operatorname{Re}\lambda} < 1. \tag{4}$$

Таким образом, на основании (3) и (4) $\lambda \in \rho(A)$ при $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и

$$\| R_\lambda(A) \| < \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\operatorname{Re}\lambda}} = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega},$$

что и доказывает неравенство (2) в случае $H_- \subset \mathfrak{D}(A)$.

Если же $\mathscr{L}_- \neq H_-$ — некоторый максимальный равномерно отрицательный линеал, содержащийся в $\mathfrak{D}(A)$, то [3] линеал $\mathscr{L}_+ = \mathscr{L}_-^{[\perp]}$ является максимальным равномерно положительным. При этом

$$H = \mathscr{L}_+ [+] \mathscr{L}_-. \tag{5}$$

Рассматривая $\mathscr{L}_+$ и $\mathscr{L}_-$ как гильбертовы пространства со скалярными произведениями $[\cdot, \cdot]$ и $-[\cdot, \cdot]$ соответственно, определим в H новое скалярное произведение

$$(x, y)_1 = [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \tag{6}$$

где $x = x_+ + x_-$, $y = y_+ + y_-$, $x_\pm \in \mathscr{L}_\pm$, $y_\pm \in \mathscr{L}_\pm$.

Пусть $\|x\|_1 = \sqrt{(x, x)_1}$. Как известно [3], норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна исходной норме и индефенитная метрика, определяемая разложением (5), совпадает с исходной индефинитной метрикой (порождаемой оператором J).

Рассматривая теперь H как гильбертово пространство относительно скалярного произведения (6) и рассуждая так же как и в случае $H_- \subset \subset \mathfrak{D}(A)$, убеждаемся в справедливости леммы.

2. Условие равномерной корректности задачи Коши.

Теорема 1. *Пусть A — плотно заданный максимальный J-диссипативный оператор, действующий в H. Если при этом существует максимальный равномерно отрицательный линеал, содержащийся в области определения оператора A, то задача Коши для уравнения* (1) *является равномерно корректной и полугруппа решений уравнения* (1) *состоит из двояко J-нерастягивающихся операторов.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы с учетом леммы оператор A — генератор полугруппы класса C_0 и, таким образом, задача Коши для уравнения (1) является равномерно корректной.

Пусть $U(t)$ — полугруппа класса C_0 с генератором A. Тогда $U^+(t) = JU^*J$ является полугруппой также класса C_0 с генератором $A^+ = JA^*J$.

Максимальная J-диссипативность оператора A эквивалентна одновременной J-диссипативности A и A^+. При этом для любого $x \in \mathfrak{D}(A)$

$$\frac{d}{dt}[U(t)x,\ U(t)x] = 2\,\mathrm{Re}\,[AU(t)x, U(t)x] \leqslant 0$$

и, следовательно, для любого x из плотного в H линеала $\mathfrak{D}(A)$ выполняется при $t \geqslant 0$ неравенство

$$[U(t)x,\ U(t)x] \leqslant [U(0)x,\ U(0)x] = [x, x]. \tag{7}$$

А так как операторы $U(t)$ являются ограниченными, то неравенство (7) выполняется при любых $x \in H$.

Аналогично устанавливается, что при $t \geqslant 0$ и $x \in H$

$$[U^+(t)x,\ U^+(t)x] \leqslant [x, x]$$

и, таким образом, при $t \geqslant 0$ операторы $U(t)$ являются двояко J-нерастягивающими.

В случае пространства Понтрягина имеет место следующий непосредственный аналог теоремы Филлипса.

Теорема 2. *Для того чтобы задаче Коши для уравнения* (1) *с замкнутым оператором A в пространстве Понтрягина H* ($\dim H_- = \varkappa < \infty$) *отвечала полугруппа J-нерастягивающих операторов класса C_0, необходимо и достаточно, чтобы A был максимальным π-диссипативным оператором.*

Доказательство. Пусть в (1) A — замкнутый максимальный π-диссипативный оператор. Тогда [3] $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$. А так как в случае пространства Понтрягина произвольный плотный в нем линеал содержит максимальный равномерно отрицательный линеал, то этим свойством обладает и линеал $\mathfrak{D}(A)$. После этого для завершения доказательства достаточности условия теоремы остается воспользоваться теоремой 1.

Пусть теперь задаче Коши для уравнения (1) с замкнутым оператором A отвечает полугруппа $U(t)$ J-нерастягивающих операторов класса C_0 Тогда при любом $x \in \mathfrak{D}(A)$ и $t > 0$

$$\left[\frac{U(t)-I}{t}x, x\right] + \left[U(t)x, \frac{U(t)-I}{t}x\right] = \frac{[U(t)x, U(t)x] - [x, x]}{t} \leqslant 0. \qquad (8)$$

Переходя в (8) к пределу при $t \to 0$ получаем $\operatorname{Re}[Ax, x] \leqslant 0$.

Далее, так как в пространстве Понтрягина J-нерастягиваемость эквивалентна двоякой J-нерастягиваемости, то приходим к заключению, что полугруппа $U^+(t)$ с генератором A^+ также является J-нерастягивающей. Рассуждая аналогично предыдущему, убеждаемся, что $\operatorname{Re}[A^+x, x] \leqslant 0$ при любом $x \in \mathfrak{D}(A^+)$. А так как одновременная J-диссипативность операторов A и A^+ эквивалентна максимальной J-диссипативности оператора A, то теорема доказана.

Примечание. Предыдущие результаты дают возможность сформулировать аналогичные утверждения и в случае обратной задачи Коши. Так, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы обратной задаче Коши для уравнения* (1) *с замкнутым оператором A в пространстве Понтрягина* ($\dim H_+ = \varkappa < \infty$) *отвечала полугруппа J-несжимающих* ($[U(t)x, U(t)x] \geqslant [x, x]$ *при* $t \geqslant 0$) *операторов класса C_0, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был максимальным π-диссипативным.*

Для обоснования этой теоремы достаточно рассмотреть новую метрику: $[x, y]' = -[x, y]$ и оператор $A' = -A$.

1. *Phillips R. S.* Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1959.— **90**, N 2.— P. 193—254.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
3. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.— М. : Наука, 1986.— 352 с.

Киев. ун-т

Получено 08. 06.88