УДК 517.9

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК, д-р физ.-мат. наук (Ростов. ун-т)

О правом обратном операторе для оператора свертки

Дается описание линейного непрерывного правого обратного оператора для оператора свертки в пространствах аналитических функций со степенным базисом.

Дається опис лінійного неперервного правого оберненого оператора для оператора згортки в просторах аналітичних функцій зі степеневим базисом.

© Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК, 1991

1. Пусть H — полное локально выпуклое пространство с базисом $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящим из целых функций экспоненциального типа (т. е., $\psi_k \in [1, \infty)$, $\forall k \geqslant 1$). Любой элемент f из H представляется единственным образом в виде сходящегося в H ряда $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$. Кроме того, $\forall z \in \mathbb{C}$ $\forall k \geqslant 1$

$$\psi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{zt} \Phi_k(t)\, dt,$$

где Γ_k — замкнутая спрямляемая жорданова кривая (называемая далее просто контуром) такая, что $0 \in \operatorname{int} \Gamma_k$; функция $\Phi_k(t)$ аналитична в области, содержащей $\overline{\operatorname{ext} \Gamma_k}$, причем $\Phi_k(\infty) = 0$. Предполагаем, что любая экспонента e^{hz}, $h \in \mathbb{C}$, содержится в H. Рассмотрим какой-либо оператор свертки L в H, т. е. линейный оператор L такой, что $L(e^{zt}) = a(t)\, e^{zt}$, $\forall t \in \mathbb{C}$. Для простоты изложения ограничимся здесь случаем, когда характеристическая функция, или символ, $a(t)$ оператора L является целой. Считаем также, что L — непрерывный оператор в H. Если Γ — любой контур в $\mathbb{C}$ и $g(t)$ — непрерывная функция на Γ, то предполагаем, что интегральные суммы, соответствующие интегралу $\int_{\Gamma} e^{zt} g(t)\, dt$, сходятся к нему в H (при неограниченном уменьшении диаметра разбиения Γ). Отсюда следует

$$L\Big(\int_{\Gamma} e^{zt} g(t)\, dt\Big) = \int_{\Gamma} L(e^{zt})\, g(t)\, dt = \int_{\Gamma} a(t)\, e^{zt} g(t)\, dt.$$

Выберем контуры Γ_k так, чтобы $a(t) \neq 0$, $\forall t \in \Gamma_k$, $\forall k \geqslant 1$, и образуем ряд

$$(Tf)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \mu_k(z), \tag{1}$$

где

$$\mu_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{e^{zt}\Phi_k(t)}{a(t)}\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Предположим, что ряд (1) сходится в H. Тогда

$$(LTf)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (L\mu_k)(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(z) = f(z).$$

Таким образом, при сформулированных предположениях ряд (1) является (частным) решением из H уравнения свертки

$$Ly = f. \tag{2}$$

Более того, если удастся показать, что линейный оператор непрерывен в H, то он, очевидно, будет (непрерывным) правым линейным обратным для оператора свертки L.

Заметим, что если пространство H бочечно, а $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ — базис Шаудера в H, то согласно теореме Банаха — Штейнгауза непрерывность оператора T следует из сходимости ряда (1) в H (при любом $f \in H$).

Укажем достаточное условие абсолютной сходимости ряда (1), предполагая, что $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ — базис Шаудера в H. Пусть $\mathcal{P} = \{p\}$ — набор преднорм, определяющий топологию в H. Тогда $\forall k \geqslant 1$ $\exists \mu_k \in H' : f_k = \mu_k(f)$. Обозначим символом $l(\Gamma)$ длину любого контура Γ и положим

$$\forall k \geqslant 1,\ \forall p \in \mathcal{P}\ \ \beta_k(p) = \sup_{t \in \Gamma_k} \frac{p(e^{zt})\, |\Phi_k(t)|}{|a(t)|}, \tag{3}$$

$$A_p(f) = \sum_{k=1}^{\infty} l(\Gamma_k)\, \beta_h(p)\, |\mu_k(f)|. \tag{4}$$

Тогда условие

$$\forall p \in \mathcal{P} \quad A_p(f) < \infty \tag{5}$$

достаточно для существования в H частного решения уравнения (2). Если H бочечно, то выполнение условия (5) при любом f из H обеспечивает непрерывность оператора T.

Условие (5) сложно проверять для практически важного класса внутренних индуктивных пределов банаховых пространств. Предположим, что $H = \lim\limits_{n} \operatorname{ind} H_n$ — регулярный [1] индуктивный предел $\mathcal{B}$-пространств H_n с нормой $\|\cdot\|_n$ (можно считать, что $\|x\|_{n+1} \leqslant \|x\|_n$, $\forall x \in H_n$). Предположим, что $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ — абсолютный базис в H. Тогда [2] $(\psi_k)_{k=1}^{\infty}$ — базис Шаудера в H и, кроме того [3], каждый абсолютный базис в H является абсолютным индуктивным базисом, т. е. [4] для любого f из H найдется единственный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$, который сходится к f абсолютно в некотором H_m: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k| \|\psi_k\|_m < \infty$. Если

$$\beta_{k,m} = \sup_{t \in \Gamma_k} \frac{\|e^{zt}\|_m |\Phi_k(t)|}{|a(t)|}, \quad A_m(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k,m} |f_k|,$$

то условие

$$\exists m \geqslant 1 \qquad A_m(f) < \infty \tag{6}$$

достаточно для существования частного решения уравнения (1) при данной правой части f. Кроме того, так как регулярный индуктивный предел $\mathcal{B}$-пространств бочечен, то условие

$$\forall f \in H \ \exists m \geqslant 1 \qquad A_m(f) < \infty \tag{7}$$

достаточно для существования в H линейного непрерывного правого обратного к оператору свертки L.

Очевидно, для того чтобы убедиться в справедливости неравенств типа (5), (6), необходимо найти последовательность контуров Γ_k, на каждом из которых функция $|a(t)|$ имеет достаточно «хорошую» оценку снизу.

2. Применим полученные результаты в наиболее важном частном случае, когда $\psi_k(z) = z^k$, $k \geqslant 0$, и, соответственно, $\Phi_k(z) = k!\, z^{-k-1}$, $k = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим ряд пространств аналитических функций со степенным базисом.

1. Пусть A_R — пространство Фреше всех функций, аналитических в круге $K_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R < \infty$, с набором норм $\|y\|_r = M_r(y) := \sup\{|y(z)| : |z| \leqslant r\}$, $0 < r < R$. Пусть $a(z)$ — отличная от тождественного нуля функция из класса $[1, 0]$, т. е. $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, где $\lim\limits_{k\to\infty} k |a_k|^{1/k} = 0$. Как доказано в [5], ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ сходится в A_R для любой функции y из A_R тогда и только тогда, когда $a(z) \in [1, 0]$. Из известных оценок снизу модуля аналитической функции ([6], гл. 1, § 8 или [7], гл. 1, § 4) нетрудно вывести, что существует множество кругов $K(z_m, R_m) = \{z : |z - z_m| < R_m\}$ нулевой линейной плотности такое, что $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z \notin Q}} \frac{\ln|a(z)|}{|z|} = 0$ $\left(Q = \bigcup\limits_m K(z_m, R_m)\right)$. Отсюда следует существование последовательности $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что $\beta_n > 1$, $\lim\limits_n \beta_n = 1$ и $\forall n \geqslant 0$ $\exists \rho_n \in \left(\frac{n}{R}, \frac{\beta_n}{R}(n+1)\right)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\rho_n} \ln \min\limits_{z \in C_n} |a(z)| = 0$, где $C_n = \{z : |z| = \rho_n\}$. Зафиксируем произвольное r из $(0, R)$ и выберем $r_1 \in (0, R)$ настолько близким

к R, чтобы $\frac{r}{R}+\ln\frac{R}{r_1}<1$. Тогда $\exists\eta>0$: $\frac{r}{R}+\ln\frac{R}{r_1}<1-3\eta$ и $\forall k\geqslant k_1$

$$-k+rk\frac{\beta_k}{R}+k\ln R-k\ln r_1<-2\eta k. \tag{8}$$

Положим

$$(Ly)(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k y^{(k)}(z);\;\; \mu_k(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{e^{zt}t^{-k-1}}{a(t)}\,dt,\;\; k\geqslant 0.$$

Тогда имеем

$$\forall k\geqslant 0\;\;\forall f\in A_R:\;\; f=\sum_{k=0}f_k z^k;\;|f_k|\leqslant\|f\|_{r_1}r_1^{-k};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|\mu_k(z)\|_r|f_k|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}k!\,\|f\|_{r_1}(r_1\rho_k)^{-k}\exp[r\rho_k+\varepsilon_k r_k]=\|f\|_{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k(r,r_1),$$

где $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$.

Учитывая (8), получаем, что $\forall k\geqslant k_2\;\delta_k(r,r_1)<\exp(-\eta k)$ и условие (5) выполнено. Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Если $a(z)$ — отличная от тождественного нуля функция из $[1,0]$, то дифференциальный оператор бесконечного порядка $L_a y\equiv\equiv\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z)$ имеет непрерывный линейный обратный T в каждом пространстве A_R, $0<R<\infty$. Оператор T имеет вид*

$$(Ty)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(0)}{2\pi i}\int\limits_{C_k}\frac{e^{zt}t^{-k-1}}{a(t)}\,dt, \tag{9}$$

где окружности C_k определены выше.

Замечание. Существование линейного непрерывного правого обратного к оператору L_a в случае, когда $a(z)\in[1,0]$ в пространстве всех функций, аналитических в полидиске, недавно установлено иным методом (охарактеризованным ниже) в работе [8].

2. Пусть $H=A_\infty$ — пространство Фреше всех целых функций с набором норм $\|y\|_r=M_r(y)$, $0<r<\infty$. Согласно [5, 9] ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z)$ сходится абсолютно в A_∞ тогда и только тогда, когда $a(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\in\in[1,\infty)$; если при этом целая функция экспоненциального типа $a(z)$ отлична от тождественного нуля, то оператор $L_a y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}$ является эпиморфизмом A_∞ [5, 9].

Используя теорему 11 гл. 1 из [6] и рассуждая, как при доказательстве теоремы 4.3 из [7], устанавливаем существование чисел $\beta\in(1,\infty)$, $d\in(0,+\infty)$ и последовательности $(\rho_n)_{n=0}^{\infty}$ таких, что $\forall n\geqslant 0\; n<\rho_n<\beta(n+1)$;

$$\forall n\geqslant 0\;\;\forall z\in C_n=\{z:|z|=\rho_n\}\;\;|a(z)|\geqslant\exp(-d|z|).$$

Зафиксируем произвольное $r\in(0,+\infty)$ и выберем $r_1>\exp\,[2\beta(r+d)-1]$. Так же, как в случае $H=A_R$, $0<R<\infty$, для любой целой функции имеем

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k z^k:\forall k\geqslant 0\quad|g_k|\leqslant M_{r_1}(g)\,r_1^{-k}.$$

Кроме того, если (как выше)

$$\mu_k(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^{zt} t^{-k-1}}{a(t)} dt, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

то

$$\| \mu_k \|_r \leqslant k! \exp [r\rho_k + d\rho_k - k \ln \rho_k] \leqslant$$
$$\leqslant 4\sqrt{k+1} \exp [r\beta(k+1) + d\beta(k+1) - k].$$

Отсюда $\forall k \geqslant k_1 \ \forall g \in A_\infty \ \| \mu_k \|_r | g_k | \leqslant 4 \sqrt{k+1} \exp [-(r+d)\beta k] \ \|g\|_{r_1}$, и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \mu_k(z)$ сходится абсолютно в A_∞ для любой целой функции $g(z)$. Тем самым получили такой результат.

Теорема 2. *Если* $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — *произвольная целая функция экспоненциального типа, отличная от тождественного нуля, то оператор* $L_a y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}$ *имеет в* A_∞ *непрерывный линейный правый обратный* T, *представимый в виде* $(Ty)(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \mu_k(z)$, *где функции* $\mu_k(z)$ *определяются по формулам* (10).

Следует отметить, что существование линейного непрерывного в A_∞ правого обратного для оператора L_a получено в более общем случае, для целых функций в $\mathbb{C}^n$, но совершенно иным методом и без явного представления оператора T в работе [10], а для $n = 1$ — Р. Майзе (в 1983 г.).

3. Пусть $H - DFN$-пространство $\overline{A}_R$ всех функций, локально аналитических на $\overline{K}_R = \{z : |z| \leqslant R\}$, $0 \leqslant R < \infty$, со стандартной индуктивной топологией $\overline{A}_R = \liminf\limits_{R<r<\infty} AC_r$, где AC_r — банахово пространство всех функций, аналитических в круге K_r и непрерывных на $\overline{K}_r$, с нормой $\| y \|_r = M_r(y)$. Если $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in [1, 0]$ то, как нетрудно показать, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ сходится абсолютно в $\overline{A}_R$ для любой функции $y(z)$ из $\overline{A}_R$. Пусть, как в первом примере, $C_k = \{z : |z| = \rho_k\}$, где $\forall k \geqslant 0$

$$k < R\rho_k < (k+1)\beta_k; \ \beta_k > 1, \ \lim_{k\to\infty} \beta_k = 1; \ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\rho_k} \ln \min_{z\to C_k} | a(z) | = 0.$$

Зафиксируем любое $r > R$ и выберем $r_1 > R$ так, чтобы $\ln \frac{R}{r} + \frac{r_1}{R} < 1$. Если $y \in AC_r$, то

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k, \ |y_k| \leqslant M_r(y)\, r^{-k}, \ k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$M_{r_1}(\mu_k) \leqslant 4\sqrt{k+1} \exp \left[\beta_k (k+1) \frac{r_1}{R} - k + k \ln R + \frac{\varepsilon_k \beta_k (k+1)}{R} \right].$$

Отсюда следует, что $\exists \eta > 0 \ \forall k \geqslant k_1 \ \| \mu_k \|_{r_1} | y_k | \leqslant \| y \|_r \exp(-\eta k)$, и $\forall r > R \ \exists r_1 > R$: ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \mu_k(z)$ сходится абсолютно в AC_{r_1} для любой функции $y(z)$ из AC_r. Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \mu_k(z)$ сходится абсолютно в бочечном пространстве $\overline{A}_R$ для любой функции $y(z)$ из $\overline{A}_R$. Получена следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $R\in[0,+\infty)$ и $a(z)$ — любая отличная от тождественного нуля функция из класса* $[1, 0]$. *Тогда оператор* $(L_a y)(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{(k)}(0)}{k!}y^{(k)}(z)$ *имеет линейный непрерывный правый обратный в* $\overline{A}_R$, *определяемый соотношением* (9).

4. Пусть $H=[\rho, 0]$ — пространство Фреше всех целых функций $y(z)$ таких, что $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}}|z|^{-\rho}\ln|y(z)|=0$, с топологией, определяемой системой норм $|y|_\varepsilon=\sup\limits_{r\geqslant 0}M_r(y)\exp(-\varepsilon r^\rho)$, $0<\varepsilon<1$. Рассмотрим случай, когда $\rho>1$. Согласно [11, 12] ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k y^{(k)}(z)$ сходится абсолютно в $[\rho, 0]$ для любой функции $y(z)$ из $[\rho, 0]$ тогда и только тогда, когда $a(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k z^k\in\left[\frac{\rho}{\rho-1},\infty\right)$ (т. е, когда $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}}|z|^{\frac{\rho}{1-\rho}}\ln|a(z)|<\infty$). Пусть $a(z)$ — любая отличная от тождественного нуля функция из $[\rho_1,\infty)$, где $\rho_1=\rho/(\rho-1)$. Используя известные оценки снизу минимума модуля целой функции конечного порядка [6, 7], легко установить существование конечных чисел $A>1$, $B>1$ и последовательности $(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$ такой, что

$$(k+1)^{1/\rho_1}<\tau_k<A(k+1)^{1/\rho_1};\ \min_{|z|=\tau_k}|a(z)|\geqslant\exp[-B|z|^{\rho_1}].$$

Если

$$y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k z^k\in[\rho, 0],$$

то

$$\forall r>0\ \forall k\geqslant 0\ |y_k|\leqslant M_r(y)r^{-k}\leqslant|y|_\varepsilon r^{-k}\exp(\varepsilon r^\rho),$$

откуда

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\ \forall k\geqslant 1\ |y_k|\leqslant|y|_\varepsilon\inf_{r>0}r^{-k}\exp(\varepsilon r^\rho)=$$

$$=|y|_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\rho e}{k}\right)^{k/\rho};\quad |y_0|\leqslant|y|_\varepsilon.$$

Далее,

$$\forall k\geqslant 0\quad|\psi_k(z)|\leqslant k!\exp[r\tau_k+B(\tau_k)^{\rho_1}-k\ln r_k],$$

откуда

$$\forall\varepsilon_1\in(0,1)\quad\forall k\geqslant 0\ |\psi_k|_{\varepsilon_1}\leqslant 4\sqrt{k+1}\exp\Big\{\Big[BA^{\rho_1}(k+1)+$$

$$+k\ln(k+1)-\frac{k}{\rho_1}\ln(k+1)-k\Big]+\sup_{r>0}[rA(k+1)^{1/\rho_1}-\varepsilon_1 r^\rho]\Big\}=$$

$$=4\sqrt{k+1}\Big[BA^{\rho_1}(k+1)-k+\frac{k}{\rho}\ln(k+1)+$$

$$+(\rho-1)\rho^{-\rho_1}A^{\rho_1}(\varepsilon_1)^{1/(1-\rho)}(k+1)\Big].$$

Положим

$$M=BA^{\rho_1}-1+(\rho-1)\rho^{-\rho_1}(\varepsilon_1)^{1/(1-\rho)}A^{\rho_1}+\frac{1}{\rho}\ln(\varepsilon\rho e).$$

Для любого произвольно зафиксированного $\varepsilon_1\in(0,1)$ можно всегда выбрать число $\varepsilon\in(0,1)$ так, чтобы число M стало отрицательным. Тогда $\exists\eta>0\ \exists k_1\geqslant 1$: $\forall k\geqslant k_1\ \forall y\in[\rho,0]\ |\psi_k|_{\varepsilon_1}|y_k|\leqslant|y|_\varepsilon\exp(-\eta k)$, и ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \psi_k(z)$ сходится абсолютно в $[\rho, 0]$ для любой функции y из $[\rho, 0]$. Таким образом, мы пришли к следующему результату.

Теорема 4. *Пусть $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — отличная от тождественного нуля целая функция конечного типа при порядке $\rho/(\rho-1)$, где $1 < \rho < \infty$. Тогда оператор $L_a y \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ имеет линейный непрерывный в $[\rho, 0]$ обратный правый оператор $Ty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} \psi_k(z)$.*

Замечание. Существование линейного непрерывного правого обратного для оператора L_a в пространстве $[\rho, 0]$ (но не его представление в явном виде!) следует также из результатов работ [10, 13]. Действительно, так как пространство $[\rho, 0]$ обладает топологическим инвариантом DN Д. Фогта, то согласно [10, 13] главный идеал $a(z) \cdot [\rho_1, \infty)$ дополним в $[\rho_1, \infty)$. Это означает, что оператор умножения Q_a на $a(z)$ имеет непрерывный линейный левый обратный в $[\rho_1, \infty)$. Но, как легко проверить, оператор L_a сопряжен с Q_a в $[\rho, 0]$ и потому имеет линейный непрерывный правый обратный.

5. Пусть $H = [\rho, \sigma) = \lim\limits_{n} \operatorname{ind} \mathscr{E}_n$, где $\forall n \geqslant 1$

$$\mathscr{E}_n = \{f(z) \in A_\infty \mid \| f \|_n := \sup_{r>0} M_r(y) \exp(-\sigma_n r^\rho) < \infty\}.$$

Полагаем, что $1 < \rho < \infty$, $0 < \sigma_n \uparrow \sigma$, $0 < \sigma < \infty$. Пусть $\rho_1 = \rho/(\rho-1)$, $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — отличная от тождественного нуля функция из $[\rho_1, 0]$.

Тогда, как нетрудно проверить, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$ сходится абсолютно в $[\rho, \sigma)$ для любой функции $y(z)$ из $[\rho, \sigma)$ и оператор свертки $L_a y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}$ отображает непрерывно DFN-пространство $[\rho, \sigma)$ в себя. Выберем последовательность $(\tau_k)_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы $\forall k \geqslant 0$ $dk^{1/\rho_1} < \tau_k < \gamma_k d k^{1/\rho_1}$, где $d = (\rho\sigma)^{1/\rho}$, $\gamma_k > 1$, $\lim\limits_{k} \gamma_k = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \min\limits_{|z|=\tau_k} |z|^{-\rho_1} \ln |a(z)| = 0$. Если $C_k = \{z : |z| = \tau_k\}$ и функции $\psi_k(z)$ определены по формуле (10), то $\forall k \geqslant 1$ $\forall m \geqslant 1$

$$\| \psi_k(z) \|_m \leqslant 4\sqrt{k+1} \exp[k \ln k - k - k \ln \tau_k + \varepsilon_k (\tau_k)^{\rho_1} + c (\tau_k)^{\rho_1} (\sigma_m)^{1/1-\rho}],$$

где $c = (\rho - 1) \rho^{-\rho_1}$. Далее, $\forall n \geqslant 1$ $\forall y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k \in \mathscr{E}_n$ $\forall k \geqslant 1$

$$|y_k| \leqslant r^{-k} M_r(y) \leqslant \| y \|_n \left(\frac{e\sigma_n \rho}{k} \right)^{k/\rho}; \quad |y_0| \leqslant \| y \|_n.$$

Так как

$$\frac{1}{\rho} \ln(e\sigma\rho) - 1 - \ln d + \frac{d^{\rho_1} (\rho\sigma)^{1/\rho-1}}{\rho_1} = 0, \tag{11}$$

то для любого $n \geqslant 1$ найдется $\eta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\rho} \ln(e\sigma_n\rho) - 1 - \ln d + \frac{1}{\rho_1} d^{\rho_1} (\rho\sigma)^{1/1-\rho} \leqslant -2\eta.$$

Выберем $n_1 \geqslant 1$ так, чтобы

$$\frac{1}{\rho}\ln(e\rho\sigma_n) - 1 - \ln d + \frac{1}{\rho_1} d^{\rho_1} (\rho\sigma_{n_1})^{1/(1-\rho)} \leqslant -\frac{3}{2}\eta.$$

Тогда

$$\forall k \geqslant K_0 \quad \frac{1}{\rho}\ln(e\rho\sigma_n) - 1 - \ln d + \frac{1}{\rho_1}(\gamma_k d)^{\rho_1}(\rho\sigma_{n_1})^{1/(1-\rho)} \leqslant -\eta,$$

$$\forall k \geqslant K_1 \quad |y_k| \, \|\psi_k\|_{n_1} \leqslant \|y\|_n 4\sqrt{k+1}\exp\left(-\frac{\eta}{2}k\right), \ \forall k \geqslant N_1.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 5. *Пусть* $1 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty$ *и* $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — *отличная от тождественного нуля функция из класса* $[\rho_1, 0]$. *Тогда оператор* $L_a y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}$ *имеет линейный непрерывный правый обратный,* $B[\rho, \infty)$, *который может быть представлен в виде* (9).

Заметим, что в случае $\sigma = \infty$ теорема 5 в общем случае неверна. Действительно, согласно [14] ни один собственный замкнутый идеал с бесконечной коразмерностью не дополним в $[\rho_1, 0]$. Следовательно, если $a(z)$ имеет бесконечно много нулей, то идеал $a(z)\,[\rho_1, 0]$ не дополним в $[\rho_1, 0]$ и L_a не имеет линейного правого непрерывного обратного в $[\rho, \infty)$. Если же $a(z)$ имеет конечное число нулей, то, как легко убедиться, L_a имеет непрерывный линейный правый обратный в $[\rho, \infty)$.

6. Пусть $H = [\rho, \sigma] = \lim\limits_{n} \operatorname{proj} F_n$, где $1 < \rho < \infty$, $0 < \sigma < \infty$,

$$F_n = \{f \in A_\infty \mid \|f\|_n := \sup_{r > 0} M_r(y) \exp(-\sigma_n r^\rho) < \infty\}, \quad \sigma_n \downarrow \sigma.$$

Пусть $a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ — любая отличная от тождественного нуля функция из $[\rho_1, 0]$. Если, как и выше, $d = (\rho\sigma)^{1/\rho}$, то из равенства (11) для произвольно зафиксированного $n_1 \geqslant 1$ найдется $\eta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\rho}\ln(\sigma e \rho) - 1 - \ln d + (\rho\sigma_{n_1})^{1/1-\rho}\frac{1}{\rho} d^{\rho_1} \leqslant -2\eta.$$

Выберем $n \geqslant 1$ так, чтобы

$$\frac{1}{\rho}\ln(e\rho\sigma_n) - 1 - \ln d + \frac{1}{\rho} d^{\rho_1}(\rho\sigma_{n_1})^{\frac{1}{1-\rho}} \leqslant -\eta.$$

Рассуждая так же, как в случае $H = [\rho, \sigma)$, получаем, что $\forall n_1 \geqslant 1$ $\exists n \geqslant 1$ $\forall y \in F_n$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\psi_k\|_{n_1} \left|\frac{y^{(k)}(0)}{k!}\right| < \infty.$$

Следовательно, оператор свертки $L_a y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}$ имеет линейный непрерывный правый обратный в $[\rho, \sigma]$, который представляется формулой (9).

Следует отметить, что существование непрерывного линейного правого обратного для оператора L_a в пространстве $[\rho, \sigma]$ следует из результатов работы [8].

3. Для ряда функциональных рефлексивных пространств оператор свертки L_a можно определить как оператор, сопряженный к оператору ум-

ножения на символ $a(z)$ в пространстве H' (такой подход использовался в работах Мальгранжа, Мартино, Коробейника, Ткаченко, Епифанова, Напалкова и др.).

В частности, если рефлексивное пространство H имеет степенной базис $(z^n)_{n=0}^{\infty}$, то, как заметил С. Момм, оператор $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}$ можно определить как сопряженный к оператору Q_a умножения на символ $a(z)$ в пространстве функций вида $g(z) = \varphi(e^{zw})$, $\varphi \in H'$, являющемся реализацией сопряженного пространства с помощью преобразования Фурье — Бореля (предполагается, что это преобразование является изоморфизмом). В работе [8] устанавливается существование и представление непрерывного линейного левого обратного для оператора Q_a в весовых (с радиальным весом) пространствах G довольно общей природы, что дает возможность получить линейный непрерывный обратный для оператора L_a в пространстве G'. При этом пространство G является DFN-пространством (типа $[\rho, \sigma)$), а пространство G' — ядерным пространством Фреше.

Идея настоящей статьи восходит к идее Гурвица [15] решения (в целых функциях) разностного уравнения $y(z+1) - y(z) = f(z)$. Именно: частное решение этого уравнения строилось [15] в виде ряда

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^{zt} t^{-k-1}}{e^t - 1}\, dt,$$

где окружности C_k подбирались соответствующим образом. Позднее этот метод был применен к построению частного решения более общих классов линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами бесконечного порядка [5, 9]. В данной работе этот метод применен к построению линейного правого непрерывного обратного для оператора свертки в ряде пространств (с абсолютно степенным базисом) аналитических функций. При этом если результаты для пространств 1, 2, 4, 6 получены ранее (но другими различными методами, без явного представления обратного оператора), то результаты для пространств $\overline{A}_R$ и $[\rho, \sigma)$ являются новыми. Разумеется можно было бы рассмотреть и другие пространства по возможности более общей природы (в частности, на наш взгляд, было бы интересно исследовать операторы свертки в пространствах целых функций, рост которых определяется характеристиками, введенными Шереметой [16]). Однако и приведенных выше примеров, по мнению автора, достаточно для того, чтобы продемонстрировать эффективность обобщенного метода Гурвица для построения правого обратного к оператору свертки.

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М. : Физматгиз, 1959.— 684 с.
2. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1969.— 1071 с.
3. *Мелихов С. Н.* Об абсолютно сходящихся рядах в канонических индуктивных пределах // Мат. заметки.— 1986.— 39, № 6.— С. 877—886.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Об одной двойственной задаче. 1. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше // Мат. сб.— 1975.— 97, № 2.— С. 193—229.
5. *Muggly H.* Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten // Comment. Math. Helv.— 1938.— N 1.— P. 151—179.
6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехтеоретиздат, 1956.— 632 с.
7. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.— М. : Наука, 1983.— 536 с.
8. *Momm S.* Partial Differential Operators of Infinite Order with Constant Coefficients on the Space of Analytic Functions on the Polydisc // Studia Math.— 1990.— 46.— P. 51—71.
9. *Гельфонд А. О.* Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Тр. Мат. ин-та. 1951.— 38.— С. 42—67.
10. *Meise R., Taylor B. A.* Each nonzero convolution operator on the entire functions admits a continuous linear right inverse // Math Z.— 1988.— 197.— P. 139—152.
11. *Sikkema P.* Differential operators and differential equations of infinite order with constant coefficients // Researches in connection with integral functions of finite order. Noordhoff, Groningen, 1953.— 349 p.

12. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та.— 1983.— 155 с.
13. *Meise R., Taylor B. A.* Splitting of closed ideals in (DFN)-algebras of entire functions and the property (DN) // Trans. Amer. Math. Soc.— 1987.— 302.— P. 341—370.
14. *Meise R., Taylor B. A.* Sequence space representation for (FN)-algebras of entire functions modulo closed ideals // Studia Math.— 1987.— 125.— P. 203—227.
15. *Hurwitz A.* Sur l'integrale finie d'une fonction entiere // Acta Math.— 1897.— 20.— S. 285—312; Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1.— S. 436—459.
16. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулем коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика.— 1967.— № 2.— С. 100—108.

Получено 15.10.90