УДК 512.544

А. В. Тушев

Условие Min—∞—N и связанные с ним представления разрешимых групп

Изучаются минимально бесконечные JG-модули, где J — либо $\mathbb{Z}$-, либо $F\langle t\rangle$-групповая алгебра бесконечной циклической группы $\langle t\rangle$ над конечным полем F, G — разрешимая группа конечного ранга. С помощью полученных результатов доказано, что финитно аппроксимируемые разрешимые группы без кручения с условием Min — ∞ — N минимаксны.

Вивчаються мінімально нескінченні JG-модулі, де J — або $\mathbb{Z}$-, або $F\langle t\rangle$-групова алгебра нескінченної циклічної групи $\langle t\rangle$ над скінченним полем F, G — розв'язна група скінченного рангу. За допомогою одержаних результатів доведено, що фінітно апроксимовні розв'язні групи без скруту з умовою Min — ∞ — N мінімаксні.

Пусть J — область главных идеалов, G — группа. Бесконечный JG-модуль A называется минимально бесконечным, если для всякого ненулевого подмодуля $A_1 \leqslant A$ индекс $|A : A_1|$ конечен и пересечение всех таких подмодулей нулевое. Нетрудно заметить, что минимально бесконечный JG-модуль A либо без J-кручения, либо анулируется некоторым простым элементом кольца J.

Минимально бесконечные модули естественным образом возникают при изучении разрешимых групп со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп. Группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для нормальных подгрупп (условию Min — ∞ — N), если она не содержит ни одной бесконечной убывающей цепочки нормальных подгрупп, все факторы которой бесконечны. Важным элементом строения этих групп являются минимально бесконечные подгруппы. Бесконечная абелева нормальная подгруппа A группы G называется минимально бесконечной, если для всякой собственной G-допустимой подгруппы A_1 индекс $|A : A_1|$ конечен и пересечение всех таких подгрупп единично. Минимально бесконечная подгруппа, очевидно, будет минимально бесконечным $\mathbb{Z}G$-модулем.

Минимально бесконечные модули над полициклическими группами изучены в [1]. В работе [2] изучались минимально бесконечные модули нильпотентной группы G конечного свободного ранга, причем предполагалось, что J — либо кольцо целых чисел, либо групповая алгебра бесконечной циклической группы $\langle t\rangle$ над конечным полем F. В данной работе также сохраняются эти предположения относительно J. В работе [2] показано, что если A — минимально бесконечный JG-модуль, где G — нильпотентная группа конечного свободного ранга и $C_G(A) = 1$, то группа G — полициклическая. В данной работе показано, что если модуль A без J-кручения, то аналогичное утверждение верно и для разрешимых групп конечного свободного ранга (теорема 2). В случае, когда модуль A аннулируется некоторым простым элементом кольца J, этот факт уже не справедлив (пример 1). Однако, если потребовать, чтобы центр группы G был бесконечным, то группа G будет полициклической (теорема 2).

J-модуль без кручения A назовем α-аппроксимируемым модулем, если для некоторого простого элемента α кольца J все индексы $|A : A\alpha^n|$ конечны и $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A\alpha^n = 0$. Теорема 2 доказывается на основании теоремы 1 о разрешимых группах автоморфизмов α-аппроксимируемых модулей. С помощью теоремы 1 также показано, что финитно-аппроксимируемые разрешимые группы без кручения с условием $\mathrm{Min} - \infty - N$ минимаксны (теорема 3). Основные результаты работы анонсированы в [3].

Лемма 1. *Пусть A — α-аппроксимируемый J-модуль. Тогда* $A \leqslant \bigoplus_{i=1}^{k} (J_\alpha)_i$ *и* $\mathrm{Aut}\, A \leqslant \mathrm{GL}_k(J_\alpha)$, *где J_α — пополнение кольца J в α-адической топологии.*

Доказательство. Введем в A и в J α-адическую топологию с фундаментальной системой окрестностей нуля $\{A\alpha^n\}$ в A и $\{J\alpha^n\}$ в J. Тогда A будет топологическим J-модулем, $\mathrm{Aut}\, A$ — группой его топологических автоморфизмов. Существует топологический J_α-модуль $\hat{A}$, являющийся пополнением топологического J-модуля A (см. [4], гл. 10). Фактор-модуль $A/A\alpha$ конечен, поэтому для некоторого подмодуля $M = \bigoplus_{i=1}^{k} \langle a_i\rangle$ получим $A/A\alpha = \bigoplus_{i=1}^{k} \langle a_i + A\alpha\rangle$. Тогда по индукции можно показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$A/A\alpha^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \langle a_i + A\alpha^n\rangle. \tag{1}$$

Действительно, пусть $A/A\alpha^{n-1} = \bigoplus_{i=1}^{k} \langle a_i + A\alpha^{n-1}\rangle$. Так как модуль A без J-кручения, то отображение $a \mapsto a\alpha^n$ будет изоморфизмом модуля A. Поэтому $A\alpha^{n-1}/A\alpha^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \langle a_i\alpha^{n-1} + A\alpha^n\rangle$. Из последнего равенства и предположения индукции следует соотношение (1). Из (1) следует, что подмодуль M всюду плотен в A, поэтому $A \leqslant \hat{M} \leqslant \hat{A}$ и, значит, $\hat{M} = \hat{A}$. Но $\hat{M} \simeq \varprojlim M/M\alpha^n$ (см [4], гл 10), откуда нетрудно получить $\hat{M} \simeq \varprojlim \bigoplus_{i=1}^{k} \langle a_i\rangle/\langle a_i\rangle\alpha^n \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} \varprojlim \langle a_i\rangle/\langle a_i\rangle\alpha^n$. Таким образом, $A \leqslant \bigoplus_{i=1}^{k} (J_\alpha)_i$. Любой автоморфизм $f \in \mathrm{Aut}\, A$ можно продолжить по непрерывности до автоморфизма $\bar{f} \in \mathrm{Aut}\, \hat{A}$, причем сужение $\bar{f}$ на A совпадает с f. Отображение $\varphi : f \mapsto \bar{f}$ будет изоморфизмом, поэтому $\mathrm{Aut}\, A \leqslant \mathrm{Aut}\, \hat{A} = \mathrm{GL}_k(J_\alpha)$. Лемма доказана.

Отметим, что если $J = \mathbb{Z}$, то J_α — кольцо целых p-адических чисел, а если $J = F\langle t\rangle$, то J_α — алгебра формальных степенных рядов с коэффициентами из поля $F_1 = J/J\alpha$. Лемма 1 является несложным обобщением леммы 15 из [5].

Теорема 1. *Разрешимая группа автоморфизмов G α-аппроксимируемого J-модуля A обладает нормальной подгруппой G_1 конечного индекса, коммутант $G_2 = [G_1, G_1]$ который нильпотентен. Модуль A обладает конечным рядом G-допустимых подмодулей, в факторах которого подгруппа G_2 действует тождественно.*

Доказательство. Согласно лемме 1 $A \leqslant \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (J_\alpha)_i$ и $\operatorname{Aut} A \leqslant \operatorname{GL}_n(J_\alpha)$. Обозначим через C алгебраическое замыкание поля частных кольца J_α. Тогда $A \leqslant \bigoplus\limits_{i=1}^{n} (C)_i = V$ и $G \leqslant \operatorname{GL}_n(C)$.

По теореме Колчина—Мальцева [6] группа G обладает триангулируемой нормальной подгруппой G_1 конечного индекса. Это означает, что в некотором базисе векторного пространства V автоморфизмы из подгруппы G_1 запишутся в виде треугольных матриц, т. е. $G_1 \leqslant T_n(C)$ и $G_2 = [G_1, G_1] \leqslant \operatorname{UT}_n(C)$, поэтому подгруппа G_2 нильпотентная. Пространство V обладает центральным относительно группы унитреугольных матриц, а значит, и относительно подгруппы G_2 рядом подпространств. Так как G_2 — нормальная подгруппа группы G, то централизатор подгруппы G_2 в пространстве V G-допустим. Поэтому верхний центральный относительно подгруппы G_2 ряд состоит из G-допустимых подпространств. При пересечении этого ряда с подмодулем A получаем конечный ряд G-допустимых подмодулей, в факторах которого подгруппа G_2 действует тождественно. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть A — минимально бесконечный FG-модуль, где F — конечное поле и $C_G(A) = 1$. Если центр группы G бесконечен, то в нем существует элемент бесконечного порядка t такой, что модуль A без J-кручения, где $J = F\langle t\rangle$.*

Доказательство. Покажем, что для любого элемента $0 \neq a \in A$ и любой подгруппы D из центра Z группы G выполняется соотношение

$$\operatorname{Ann}_{FD}(a) = \operatorname{Ann}_{FD}(A). \tag{2}$$

Пусть $d \in \operatorname{Ann}_{FD}(a)$. Отображение $\varphi : b \mapsto bd$, где $b \in A$ — эндоморфизм модуля A, причем $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$. Тогда из минимальной бесконечности модуля A следует $|\varphi(A)| = |A/\operatorname{Ker}\varphi| < \infty$, и значит, $\varphi(A) = 0$, т. е. $d \in \operatorname{Ann}_{FD}(A)$.

Покажем, что для любой подгруппы $D \leqslant Z$ кольцо $K_D = FD/\operatorname{Ann}_{FD}(A)$ — область целостности. Пусть $b \in FD$, $b_1 \in FD$ и $bb_1 \in \operatorname{Ann}_{FD}(A)$. Если $b \notin \operatorname{Ann}_{FD}(A)$, то для некоторого $a \in A$ получим $ab \neq 0$. Тогда $b_1 \in \operatorname{Ann}_{FD}(ab) = \operatorname{Ann}_{FD}(A)$. Последнее равенство следует из соотношения (2). Так как конечная область целостности является полем, то для любой конечной подгруппы $D \leqslant Z$ кольцо K_D будет полем. Отсюда следует, что если $T = t(Z)$, то K_T — поле. Ввиду минимальной бесконечности модуль A аппроксимируется конечными K_T-модулями, и значит $|K_T| < \infty$, откуда $|T| < \infty$. Из бесконечности центра Z следует, что он содержит элемент t бесконечного порядка. Осталось показать, что A — модуль без J-кручения. Если для некоторого $d \in J$ и некоторого $a \in A$, $a \neq 0$, $ad = 0$, то из (2) следует $d \in \operatorname{Ann}_J(A)$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $1 - t^n \in \operatorname{Ann}_J(A)$, и значит, $t^n \in C_G(A) = 1$, что противоречит выбору элемента t. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс разрешимых групп G, у которых для всякой нормальной подгруппы G_1 конечного индекса фактор-группа $G_1/[G_1, G_1]$ имеет конечный свободный ранг. Отметим, что класс $\mathfrak{X}$ содержит разрешимые группы с условием $\operatorname{Min} - \infty - N$, а также разрешимые группы конечного свободного ранга.

Теорема 2. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, A — минимально бесконечный JG-модуль и $C_G(A) = 1$. Справедливы следующие утверждения:*

1 *Если модуль A без J-кручения, то группа G полициклическая.*

2. *Если модуль A аннулируется простым элементом кольца J, то группа G полициклическая, когда ее центр бесконечен.*

Доказательство. 1. Согласно теореме 1 группа G содержит нормальную подгруппу G_2, фактор-группа по которой есть конечное расширение абелевой группы, а модуль A обладает конечным рядом подмодулей, в факторах которого подгруппа G_2 действует тождественно, кроме того, эти факторы бесконечны. Тогда из минимальной бесконечности модуля A следует, что $G_2 = 1$. Таким образом, группа G есть конечное расширение абелевой нормальной подгруппы G_1. Так как A — нетеров JG-модуль, то из теоремы А работы [7] следует, что A — нетеров JG_1-модуль. Тогда из теорем 3.1 и 3.3 работы [2] следует, что J-ранг модуля A конечен и по теореме 4.1 из [2] группа G полициклическая.

2. Так как центр группы G бесконечен, то по лемме 2 в нем найдется элемент t бесконечного порядка такой, что модуль A без J_1-кручения, где $J_1 = F\langle t\rangle$, $F = J/J\alpha$, α — простой элемент кольца J, аннулирующий модуль A. Тогда в силу утверждения 1 теоремы группа G полициклическая. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что требование бесконечности центра в утверждении 2 теоремы 2 существенно.

Пример. Пусть F — конечное поле, $G = N \rtimes \langle g\rangle$, где $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа, $N = Q^{(p)}$ — группа p-ичных дробей, состоящая из рациональных чисел, знаменателями которых являются степени простого числа p, и для всякого $a \in N$ положим $g^{-1}ag = ap$. Тогда существует минимально бесконечный FG-модуль A такой, что $C_G(A) = 1$.

Так как для всякого $n \in \mathbb{N}$ любая $\langle g^n\rangle$-допустимая подгруппа $N_1 \leqslant N$ имеет в N конечный индекс, то из теоремы С работы [8] следует, что для всякого ненулевого G-допустимого идеала $D \trianglelefteq FG$ индекс $|FG : D|$ конечен. Пусть $\mathcal{J}$ — правый идеал кольца FG, порожденный элементом $(g-1)$. Покажем, что всякий правый идеал $\mathcal{J}_1 \trianglelefteq FG$ имеет в FG конечный индекс, если $\mathcal{J} < \mathcal{J}_1$. Действительно, всякий элемент $b \in FG$ можно представить в виде $b = (g-1)b_1 - a$, где $a \in FN$. Отсюда следует, что если $\mathcal{J}_1 > \mathcal{J}$, то $D = \mathcal{J}_1 \cap FN \neq 0$. Если $a \in D$, то $ag^{-1} = gag^{-1} = (g-1)ag + ag^{-1}$ и $a^g = g^{-1}ag = -(g-1)g^{-1}ag + ag$ также содержатся в D. Поэтому идеал D — G-допустим, а как показано выше, в этом случае $|FN/D| < \infty$. Фактор-модуль $A = FG/\mathcal{J}$ является циклическим FN-модулем, поэтому индекс $|FG : \mathcal{J}_1|$ тоже конечен. Таким образом, A — минимально бесконечный FG-модуль. Централизатор $C_G(A)$ инвариантен в группе G, поэтому, если $C_G(A) \neq 1$, то $C_G(A) \cap N \neq 1$. Но $\mathcal{J} \cap FN = 0$, и потому ни один элемент из подгруппы N не действует тождественно на A, т. е. $C_G(A) = 1$.

Теорема 3. *Финитно-аппроксимируемая разрешимая группа без кручения G, удовлетворяющая условию $\mathrm{Min} - \infty - N$, минимаксна.*

Доказательство. Пусть A — максимальная абелева нормальная подгруппа группы G, B/A — максимальная абелева G-допустимая подгруппа фактор-группы $C_G(A)/A$. Из максимальности A следует $B \cap C_G(B) = A$. Тогда из максимальности B/A вытекает $C_G(B) = A$.

Для всякого $a \in B$ отображение $\varphi_a : b \mapsto [b, a]$ является гомоморфизмом подгруппы B в подгруппу A, причем $\mathrm{Ker}\,\varphi_a = C_B(a)$. Так как подгруппа A без кручения и не содержит делимых подгрупп, то такой будет и фактор-группа $B/C_B(a)$. Как показано выше, $C_G(B) = \bigcap_{a\in B} C_B(a) = A$, поэтому, используя теорему Ремака [6], получаем, что B/A без кручения и не содержит делимых подгрупп.

Так как A не содержит делимых подгрупп, то для некоторого простого числа p_1 получим $A \neq Ap_1$ и ввиду условия $\mathrm{Min} - \infty - N$, $|A : Ap_1| < \infty$. Пусть $A_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Ap_1^n$, исходя из тех же соображений для некоторого простого числа p_2 получим $A_1 \neq A_1p_2$ и $|A_1 : A_1p_2| < \infty$. Пусть $A_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1p_2^n$. Продолжая этот процесс, получаем ряд $A \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_n \geqslant A_{n+1} \geqslant \ldots$, который ввиду условия $\mathrm{Min} - \infty - N$ конечен.

Применив аналогичные рассуждения к фактору B/A, в подгруппе B получим ряд $1 = B_0 \trianglelefteq B_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq B_k = B$, составленный из G-допустимых подгрупп, факторы B_i/B_{i-1} которого являются p_i-аппроксимируемыми $\mathbb{Z}$-модулями, $1 \leqslant i \leqslant k$. В каждом из факторов B_i/B_{i-1} группа G индуцирует группу автоморфизмов, поэтому по теореме 1 в группе G существует нормальная подгруппа N_i, относительно которой фактор B_i/B_{i-1} обладает конечным центральным рядом, составленным из G-допустимых подгрупп, а фактор-группа G/N_i есть конечное расширение абелевой группы. Пусть $N = \bigcap_{i=1}^{k} N_i$. Тогда подгруппа B обладает конечным центральным относительно подгруппы N рядом G-допустимых подгрупп. Так как $C_G(B) = A \leqslant B$, то по теореме Калужнина [6] фактор-группа N/B нильпотентна, а значит, нильпотентна и вся подгруппа N. Согласно теореме Ремака $G/N \leqslant \sum_{i=1}^{k} (G/N_i)$, поэтому G/N есть конечное расширение абелевой подгруппы G_1/N. Условие $\mathrm{Min} - \infty - N$ переносится на подгруппы конечного индекса [9], поэтому группа G_1 удовлетворяет условию $\mathrm{Min} - \infty - N$. Группа G_1 метанильпотентна, значит, по теореме 4.3 из [2] она минимаксна. Тогда минимаксна и группа G. Теорема доказана.

1. *Robinson D. I. S., Wilson I. S.* Soluble groups with many policyclic quotients // Proc. London. Math. Soc.— 1984.— **48**, N 2.— P. 193—229.
2. *Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А., Тушев А. В.* Модули над нильпотентными группами конечного ранга // Алгебра и логика.— 1985.— **24**, № 6.— С. 631—666.
3. *Тушев А. В.* Финитно аппроксимируемые разрешимые группы без кручения со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп // XVII Всесоюз. алгебр. конф : Тез. сообщ. —Кишинев, 1985.— Ч. 2.— С. 175.
4. *Атья М., Макдональд И.* Введение в коммутативную алгебру.— М. : Мир, 1972.— 160 с.
5. *Курдаченко Л. А.* О некоторых условиях вложимости FC-группы в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения // Мат. сб.— 1981.— **114**, № 4.— С. 566—582.
6. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
7. *Wilson I. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index//Math. Z. B.— 1970.— **144**, N 1.— S. 19—21.
8. *Brooks Christophez I. B.* Ideals in group ring of soluble groups of finite rank // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1985.— **97**.— P. 27—55.
9. *Karbe M.* Schwache Kettenbedingungen in unendlichen Gruppen, PhD. Dissert.— Freiburg: Albert-Ludwigs Univ, 1984.

Днепропетр. ун-т

Получено 23.06.88