УДК 519.45

Н. Ф. Сесекин, П. В. Шумяцкий

Об одной характеризации бесконечной черниковской группы

Доказано, что бесконечная локально конечная группа тогда и только тогда является черниковской группой, когда ее декартов квадрат $G \times G$ содержит такую подгруппу T конечного индекса, что $\mathrm{Aut}\, T$ обладает четверной подгруппой V с черниковским централизатором $C_T(V)$ и слабо изолированными в T централизаторами инволюций из V.

Доведено, що нескінченна локально скінченна група тоді і тільки тоді є черніковською групою, коли її декартовий квадрат $G \times G$ містить таку підгрупу T скінченного індексу, що $\mathrm{Aut}\, T$ має четверну підгрупу V з черніковським централізатором $C_T(V)$ і слабо ізольованими в T централізаторами інволюцій із V.

Конечное расширение абелевой группы с условием минимальности называется черниковской группой. Изучая локально конечные группы с черниковскими централизаторами инволюций, А. А. Шафиро и В. П. Шунков установили [1] характеризацию бесконечной черниковской группы, не являющейся конечным расширением квазициклической группы, по свойствам централизаторов некоторых инволюций ее голоморфа. В данной статье рассмотрены локально конечные группы, допускающие четверную группу автоморфизмов, централизатор которой является черниковской группой. В результате получена новая характеризация черниковских групп.

Пусть G—группа, φ— ее автоморфизм. Обозначим через $[G, \varphi]$ подгруппу из G, порожденную всеми элементами вида $[x, \varphi] = x^{-1}x^{\varphi}$, где $x \in G$.

Выражение «G удовлетворяет условию φ-тождественности» означает, что для любой убывающей цепочки φ-допустимых подгрупп $G = G_1 \supseteq \supseteq G_2 \supseteq \ldots$ найдется такое натуральное число k, что $[G_k, \varphi] = [G_{k+1}, \varphi] = = \ldots$

Централизатор $C_G(\varphi)$ называется сильно изолированным в G, если φ тождественно действует на $C_G(x)$ при любом неединичном элементе x из $C_G(\varphi)$. Централизатор $C_G(\varphi)$ называется слабо изолированным в G, если при любом неединичном элементе x из $C_G(\varphi)$ подгруппа $C_G(x)$ удовлетворяет условию φ-тождественности.

В данной статье доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — локально конечная группа, допускающая четверную группу автоморфизмов V, централизатор которой $C_G(V)$ является черниковской группой. Если каждая инволюция из V имеет в G слабо изолированный централизатор, то G — черниковская группа.*

1. Вспомогательные предложения.

1. *Пусть V — конечная π-группа автоморфизмов локально конечной π'-группы G. Если N — нормальная V-допустимая подгруппа из G, то*

$$C_{G/N}(V) = C_G(V)\, N/N.$$

2. *Пусть G — локально конечная группа без инволюций, φ — ее автоморфизм порядка 2, $H = C_G(\varphi)$, $I = \{x \in G;\ x^{\varphi} = x^{-1}\}$.*

Тогда

1) $G = IH = HI$;
2) *два элемента из H, сопряженные в G, сопряжены в H;*
3) *если T — подгруппа из H, то $N_G(T) = C_G(T)\, N_H(T)$;*
4) *если T — подгруппа из I, то T — абелева.*

© Н. Ф. СЕСЕКИН, П. В. ШУМЯЦКИЙ, 1990

3. *Пусть G — локально конечная группа без инволюций, V — ее четверная группа автоморфизмов. Если G_1, G_2, G_3 — централизаторы в G различных инволюций из V, то $G = G_1G_2G_3$.*

Доказательства этих предложений изложены в [2, с. 224; 341; 3, с. 555]. Следующее предложение вытекает из леммы 3.1 и теоремы 3.17 из [4].

4. *Пусть p — простое число, G — почти локально разрешимая периодическая группа, допускающая конечную элементарную абелеву p-группу автоморфизмов V такую, что $C_G(V)$ удовлетворяет условию минимальности для p-подгрупп. Тогда $G/O_{p'}(G)$ — черниковская группа.*

Лемма 1. *Пусть G — локально конечная группа, допускающая инволютивный автоморфизм φ, централизатор которого $C_G(\varphi)$ — черниковская группа. Если G удовлетворяет условию φ-тождественности, то G — черниковская группа.*

Доказательство. А. О. Азар [5] (см. также [6]) показал, что G является почти локально разрешимой группой. В силу предложения 4 можно считать, что G не имеет инволюций. Пусть G не является черниковской группой. По теореме Зайцева [7] в G найдется не черниковская φ-допустимая абелева подгруппа A. По предложению 2 (1) подгруппа $[A, \varphi]$ также не является черниковской. Понятно, что для любой подгруппы B из $[A, \varphi]$ имеет место равенство $B = [B, \varphi]$, поэтому G не удовлетворяет условию φ-тождественности. Лемма доказана.

В леммах 2 и 3 предполагается выполнимость условий предложения 2.

Лемма 2. *Если H сильно изолирована в G, то G — группа Фробениуса с дополнительным множителем H и абелевым ядром I.*

Доказательство. Используя предложение 2, легко доказать что для любого элемента x из $G \setminus H$ пересечение $x^{-1}Hx \cap H$ тривиально, поэтому G — группа Фробениуса с дополнительным множителем H [8]. Множество всех элементов из G, не сопряженных с элементами из H, является φ-допустимым, поэтому ядро F группы G является φ-допустимым. Из того, что $G = FH$, $F \cap H = 1$ и из предложения 2 вытекает, что $F = I$ и F — абелева группа.

Лемма 3. *Если N — нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H, то при любом x из H справедливо включение $C_{G/N}(xN) \subseteq C_G(x)\, H/N$.*

Доказательство. Полный прообраз C в G подгруппы $C_{G/N}(xN)$ нормализует подгруппу $\langle x, N\rangle$. Теперь из утверждения 3 предположения 2 следует доказательство леммы.

2. Доказательство теоремы. Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3 различные инволюции из V, $H = C_G(V)$, $K = O_{2'}(G)$, $G_i = C_G(\varphi_i)$, $K_i = K \cap G_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Для удобства изложения доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

Лемма 4. *Каждый неединичный элемент h из H имеет в G черниковский централизатор.*

Доказательство. Пусть $R = C_G(h)$. По лемме 1 при любом i из $\{1, 2, 3\}$ подгруппа $R \cap G_i$ является черниковской. Следовательно, по теореме Шафиро и Шункова [1] R — черниковская группа.

Лемма 5. *G/K — черниковская группа.*

Доказательство. Если G почти локально разрешима, то лемма вытекает из предложения 4. Предположим, что G не является почти локально разрешимой. Тогда по теореме Фейта и Томпсона [9] G обладает инволюциями. Ясно, что среди них найдется инволюция τ, которая содержится в H. По предыдущей лемме $C_G(\tau)$ — черниковская группа, откуда вытекает, что G — почти разрешимая группа [5].

Лемма 6. *Если $H = 1$, то G — черниковская группа.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда по теореме Шафиро и Шункова [1] можно считать, что G_3 не является черниковской группой. Если G_3 сильно изолирована в G, то по лемме 2 G — группа Фробениуса с дополнительным множителем G_3 и абелевым ядром $I = \{x \in G;\ x^{\varphi_3} = x^{-1}\}$. Поскольку $I = \langle G_1, G_2\rangle$ [10], то $\langle G_1, G_2\rangle$ — абелева группа. Если одна из подгрупп G_1, G_2 тривиальна, то по предложению 2

G — абелева группа, откуда, используя лемму 1, легко вывести, что G_3 — черниковская группа. Поэтому обе подгруппы G_1 и G_2 не тривиальны. Следовательно, G_1 удовлетворяет условию φ_2-тождественности, а G_2 — условию φ_1-тождественности. Теперь по лемме 1 обе они черниковские и, следовательно, I — самоцентрализуемая нормальная черниковская подгруппа из G. Отсюда вытекает, что I имеет в G конечный индекс [11] и подгруппа G_3 конечна, что противоречит принятым предположениям. Таким образом, мы показали, что G_3 не может быть сильно изолированной в G.

Пусть x — такой неединичный элемент из G_3, что φ_3 не тождественно действует на $C_G(x)$. Тогда по предложению 3 можно считать, что $1 \neq C_{G_2}(x) = L$. Отметим, что L удовлетворяет условию φ_3-тождественности, поэтому согласно лемме 1 L — черниковская группа. Понятно, что в G_3 найдется подгруппа M, максимальная со свойством $1 \neq C_{G_2}(M) \subseteq L$. Пусть $C = C_G(M)$, $C_i = C \cap G_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. По предложению 2 $C_3 = G_3$. Так как C_1 и C_2 удовлетворяют условию φ_3-тождественности, то согласно лемме 1 они — черниковские группы, причем $C_2 \neq 1$. Поскольку для любого неединичного элемента y из C_2 централизатор $C_{G_3}(y)$ удовлетворяет условию φ_2-тождественности, по лемме 1 M — черниковская группа.

Пусть $\overline{C} = C/M$, $\overline{C}_3 = C_3/M$. Используя максимальность M, учитывая предложения 1 и лемму 3, легко видеть, что $\overline{C}_3$ сильно изолирована в $\overline{C}$. Повторяя теперь предыдущие рассуждения, получаем, что $\overline{C}$ — группа Фробениуса с дополнительным множителем $\overline{C}_3$ и абелевым черниковским ядром, откуда следует, что $\overline{C}_3$ — конечная группа. В этом случае G_3 — черниковская группа вопреки предположениям. Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. *K — черниковская группа.*

Предположим сначала, что любая V-допустимая нормальная подгруппа из K нетривиально пересекается с H. Тогда в силу черниковости H найдется минимальная V-допустимая нормальная подгруппа A из G. В этом случае A — абелева группа [4, с. 11]. Поскольку $A \cap H \neq 1$, по лемме 4 A — черниковская группа. Объединяя теперь лемму 4 с результатами работы [11], видим, что $C_K(h)$ является черниковской группой конечного индекса в K при любом неединичном элементе h из $H \cap A$. Следовательно, K — черниковская группа. Пусть теперь в K есть нормальная V-допустимая подгруппа S, тривиально пересекающаяся с H. По лемме 6 S — черниковская группа.

Положим $Z = C_K(S)$, $S_i = S \cap G_i$, $Z_i = Z \cap G_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Отметим, что ZS имеет в K конечный индекс [11]. Пусть Z — не черниковская группа. По теореме Шафиро и Шункова [1] можно считать, что Z_1 — не черниковская группа. Теперь по лемме 1 Z_1 не удовлетворяет условию φ_2-тождественности, откуда следует $S_2 = 1$. Аналогично $S_3 = 1$. Следовательно, по предложению 3 $S \subseteq G_1$. В этом случае Z удовлетворяет условию φ_1-тождественности. Отсюда в силу леммы 1 Z_2 и Z_3 — черниковские группы, и поэтому K_2 и K_3—черниковские группы. Теперь согласно результатам работы [5; 9] K —разрешимая группа. Рассуждая по индукции относительно ступени разрешимости K, можно считать, что коммутант группы K есть черниковская группа. В этом случае нормальное замыкание N подгруппы $H \cap K$ в K является черниковской группой. Тогда $NC_K(N)$ имеет в K конечный индекс [11]. Если $N \neq 1$, то по лемме 4 $NC_K(N)$ — черниковская группа, откуда K — черниковская группа. Если $N = 1$, то по лемме 6 K — черниковская группа. Лемма 7 доказана.

Теперь утверждение теоремы вытекает из лемм 5 и 7.

С помощью доказанной теоремы получается следующая характеризация бесконечных черниковских групп.

С л е д с т в и е. *Бесконечная локально конечная группа G тогда и только тогда является черниковской группой, когда ее декартов квадрат $G \times G$ содержит такую подгруппу конечного индекса T, что в* $\mathrm{Aut}\, T$ *имеется четверная подгруппа V с черниковским централизатором $C_T(V)$ и слабо изолированными в T централизаторами инволюций из V.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — бесконечная черниковская группа. Тогда в $G \times G$ найдется полная абелева подгруппа T конечного индекса и конечного ранга $\geqslant 2$. Очевидно, в $\mathrm{Aut}\, T$ имеется четверная подгруппа, удовлетворяющая условиям следствия.

Пусть теперь G — локально конечная группа, такая что $G \times G$ содержит подгруппу T конечного индекса, удовлетворяющую условиям следствия. Тогда по доказанной теореме T — черниковская группа. В этом случае $G \times G$, а следовательно, и G —черниковские группы, что и требовалось доказать.

1. *Шафиро А. А., Шунков В. П.* Об одной характеризации бесконечной черниковской группы, не являющейся конечным расширением квазициклической группы // Мат. сб.— 1978.— **107**, 12.— С. 289—303.
2. *Gorenstein D.* Finite groups.— New York: Harper and Row, 1968.— 527 p.
3. *Gorenstein D., Walter I. H.* On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups // Ill. J. Math.— 1962.— **6**, N 4.— P. 553—593.
4. *Kegel O., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1973.— p.
5. *Asar A. O.* The solution of a problem of Kegel and Wehrfritz // Proc. London Math. Soc.— 1982.— **45**, N 2.— P. 337—364.
6. *Павлюк И. И.* О проблеме Кегеля и Верфрица // VII Всесоюзн. симп. по теории групп.— Красноярск, 1980.
7. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН УССР. — 1974.— **214**, № 6.— С. 1250—1253.
8. *Бусаркин В. М., Старостин А. И.* О расщепляемых локально конечных группах // Мат. сб.— 1963.— **62**, № 3.— С. 275—294.
9. *Feit W., Thompson J. G.* Solvability of groups of odd orders // Pacif. J. Math.— 1963.— **13**, N 3.— P. 755—1029.
10. *Шумяцкий П. В.* Периодические группы с регулярной четверной группой автоморфизмов // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 11.— С. 78—82.
11. *Черников С. Н.* О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп // Мат. заметки.— 1968.— **4**, № 1.— С. 91—96.

Урал. ун-т

Получено 20.06.88