УДК 517.928.5

И. И. СТАРУН, канд. физ.-мат. наук (Нежин. пед. ин-т)

О решении задачи Коши для сингулярно возмущенной линейной системы

Изучается вопрос существования решения задачи Коши для линейной однородной системы с вырожденной матрицей и малым параметром при производной.

Вивчається питання існування розв'язку задачі Коші для лінійної однорідної системи з виродженою матрицею і малим параметром при похідній.

В работе [1] показано, что если пучок матриц $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ регулярный [2], а уравнение

$$\det(A_0(t) - \lambda B_0(t)) = 0 \tag{1}$$

имеет m, $1 \leqslant m \leqslant n$, простых корней или один корень кратности m, то система

$$\varepsilon B(t, \varepsilon)\dot{x} = A(t, \varepsilon)x, \tag{2}$$

где $(n \times n)$-матрицы $A(t, \varepsilon)$ и $B(t, \varepsilon)$ имеют представление

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s A_s(t), \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s B_s(t),$$

$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 < 1$, при определенных условиях имеет m частных формальных решений. Однако в [1] не ставился вопрос об общем решении системы (2), а поэтому не мог быть решен вопрос о существовании решения задачи Коши. В настоящей статье устраняется этот пробел в случае, когда $B(t, \varepsilon) \equiv B(t)$, $\det B(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T]$, т. е. решается задача

$$\varepsilon B(t)\dot{x} = A(t, \varepsilon)x, \tag{3}$$

$$x(0, \varepsilon) = a(\varepsilon) = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon^k a_k. \tag{4}$$

Укажем условия, при выполнении которых она разрешима, вид решения системы (3) и условия, при выполнении которых решение задачи (3), (4) имеет асимптотический характер.

Относительно матриц $B(t)$ и $A_s(t)$, $s \geqslant 0$, будем предполагать, что они удовлетворяют условию $B(t),\ A_s(t) \in C^\infty_{[0, T]}$.

В [1] установлено, что если rang $B(t) = r$, то уравнение (1) может иметь $0 \leqslant m \leqslant r$ корней (учитывая кратность). В [3] показано, что если $m = 0$ (т. е. $\det(A_0(t) - \lambda B(t)) \neq 0$ $\forall t \in [0, T]$, $\forall \lambda \in (-\infty; \infty)$), то система (3) имеет только тривиальное решение. Ясно, что в этом случае при $a(\varepsilon) \neq 0$ говорить о задаче Коши нет смысла. В настоящей работе рассматривается случай, когда $m = r$, т. е. когда определитель $\det(A_0(t) - \lambda B(t))$ удовлетворяет условию «ранг — степень» [4]. Относительно матрицы $B(t)$ предположим, что $\forall t \in [0, T]$ существует один и тот же отличный от нуля минор r-го порядка. Не нарушая общности будем предполагать, что этот минор расположен в левом верхнем углу, обозначим его через $B_{11}(t)$. Представим матрицу $B(t)$ в блочном виде

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

и введем в рассмотрение матрицы $L(t)$ и $S(t)$ [5]

$$L(t) = \begin{pmatrix} B_{11}^{-1}(t) & 0 \\ -B_{21}(t) B_{11}^{-1}(t) & E_2 \end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix} E_1 & -B_{11}^{-1}(t) B_{12}(t) \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где E_1, E_2 — единичные матрицы порядков соответственно r и $n-r$. Тогда, исходя из [2] (см. теорему 4, гл. 2, § 5) следует равенство

$$L(t)\,B(t)\,S(t) = M = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В системе (3) сделаем замену $x = S(t)\,y$ и умножив обе ее части на $L(t)$, получим систему

$$\varepsilon M\dot{y} = (C_0(t) + \varepsilon C(t,\varepsilon))\,y, \tag{7}$$

где

$$C(t,\varepsilon) = \sum_{j\geqslant 1} \varepsilon^{j-1} C_j(t), \quad C_1(t) = L(t)\,A_1(t)\,S(t) - L(t)\,B(t)\,S'(t),$$

$$C_j(t) = L(t)\,A_j(t)\,S(t), \quad j \geqslant 0, \quad j \neq 1,$$

$$(' = d/dt).$$

Начальные условия (4) указанной заменой переводятся в следующие начальные условия:

$$y(0,\varepsilon) = S^{-1}(0)\,x(0,\varepsilon) = \tilde{a}(\varepsilon) = \operatorname{col}(\tilde{a}_1(\varepsilon),\ \tilde{a}_2(\varepsilon)). \tag{8}$$

Представим матрицы $C_0(t)$ и $C(t,\varepsilon)$ в блочном виде согласно структуре матрицы (6)

$$C_0(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{pmatrix}, \quad C(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} C_{11}(t,\varepsilon) & C_{12}(t,\varepsilon) \\ C_{21}(t,\varepsilon) & C_{22}(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$C_{ij}(t,\varepsilon) = \sum_{s\geqslant 1} \varepsilon^{s-1} C_{ij}^{(s)}(t), \quad i,j = 1,2.$$

Согласно лемме 2 из [4] следует, что $\det R_4(t) \neq 0 \ \ \forall t \in [0,T]$. Следовательно, при достаточно малых ε и $\det(R_4(t) + \varepsilon C_{22}(t,\varepsilon)) \neq 0$ существует матрица $(R_4(t) + \varepsilon C_{22}(t,\varepsilon))^{-1}$, причем, как показано в [6],

$$(R_4(t) + \varepsilon C_{22}(t,\varepsilon))^{-1} = R_4^{-1}(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s F_s(t), \tag{9}$$

где $F_1(t) = -R_4^{-1}(t)\,C_{22}^{(1)}(t)\,R_4^{-1}(t)$, $F_s(t) = -R_4^{-1}(t) \sum_{k=1}^{s} C_{22}^{(k)}(t)\,F_{s-k}(t)$, $s = 2, 3, \ldots$.

Тогда система (7) примет вид

$$\varepsilon\dot{u} = (R_1(t) + \varepsilon C_{12}(t,\varepsilon))\,u + (R_2(t) + \varepsilon C_{12}(t,\varepsilon))\,v, \tag{10}$$

$$0 = (R_3(t) + \varepsilon C_{21}(t,\varepsilon))\,u + (R_4(t) + \varepsilon C_{22}(t,\varepsilon))\,v. \tag{11}$$

Из (11) однозначно определяется вектор v, причем с учетом (9)

$$v = -(R_4^{-1}(t)\,R_3(t) + H(t,\varepsilon))\,u, \tag{12}$$

а $H(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H_s(t)$, $H_s(t) = \sum_{k=1}^{s} F_k(t)\,C_{21}^{(s-k)}(t)$. Подставляя (12) в (10) и вводя в рассмотрение матрицы

$$\Phi_0(t) = R_1(t) - R_2(t)\,R_4^{-1}(t)\,R_3(t), \quad \Phi_s(t) = -R_2(t)\,F_s(t) + C_{11}^{(s-1)}(t) -$$

$$- C_{12}^{(s-1)}(t)\,R_4^{-1}(t)\,R_3(t) - \sum_{k=1}^{s-1} C_{12}^{(k)}(t)\,F_{s-1-k}(t), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \Phi_s(t),$$

приходим к системе

$$\varepsilon \dot{u} = (\Phi_0(t) + \varepsilon \Phi(t, \varepsilon))\, u, \tag{13}$$

которая подробно исследована, например в [6—8]. Используя формулы Шура для вычисления определителей блочных матриц [2], нетрудно установить, что характеристическое уравнение системы (13)

$$\det(\Phi_0(t) - \lambda E_1) = 0 \tag{14}$$

равносильно уравнению (1).

Исходя из (11) делаем вывод, что начальный вектор $\tilde{a}(\varepsilon)$ должен удовлетворять условию

$$(R_3(0) + \varepsilon C_{21}(0, \varepsilon))\, \tilde{a}_1(\varepsilon) + (R_4(0) + \varepsilon C_{22}(0, \varepsilon))\, \tilde{a}_2(\varepsilon) = 0. \tag{15}$$

Такой вектор будем называть допустимым для системы (7) (а вектор $a(\varepsilon) = S(0)\,\tilde{a}(\varepsilon)$ — допустимым для системы (3)). Ясно, что из (15) вектор $\tilde{a}_2(\varepsilon)$ однозначно выражается через вектор $\tilde{a}_1(\varepsilon)$, который может быть произвольно заданным. Поэтому для системы (13) зададим следующие начальные условия:

$$u(0, \varepsilon) = \tilde{a}_1(\varepsilon). \tag{16}$$

Предположим, что уравнение (14) имеет r простых корней $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, r}$. Тогда [6] система (13) имеет общее формальное решение вида

$$u(t, \varepsilon) = U(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t W(\tau)\, d\tau\right) c, \tag{17}$$

где $(r \times r)$-матрица $U(t, \varepsilon)$ представима формальным рядом $U(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U_s(t)$, а $W(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \ldots, \lambda_r(t)\}$, c — произвольный постоянный вектор. Образуем m-приближение решения (17), т. е. вектор

$$u_m(t, \varepsilon) = U_m(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t W(\tau)\, d\tau\right) c = \left(\sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_s(t)\right) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t W(\tau)\, d\tau\right) c, \tag{18}$$

и предположим, что выполняются условия

$$u(0, \varepsilon) = u_m(0, \varepsilon) = \tilde{a}_1(\varepsilon) \tag{19}$$

и

$$\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{20}$$

Тогда [6] имеет место асимптотическая оценка

$$\| u(t, \varepsilon) - u_m(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^m K, \tag{21}$$

где $K > 0$ — постоянная, не зависящая от ε. Если же не все корни уравнения (14) удовлетворяют условию (20), но удовлетворяют условию: (i) функции $\operatorname{Re}(\lambda_i(t) - \lambda_j(t))$, $i, j = \overline{1, r}$, не меняют знак $\forall t \in [0, T]$, то вместо оценки (21) выполняются следующие оценки [6]:

$$\| u^{(\nu)}(t, \varepsilon) - u_m^{(\nu)}(t, \varepsilon) \| \leqslant K \varepsilon^m \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \operatorname{Re} \lambda_\nu(\tau)\, d\tau\right), \quad \nu = \overline{1, r},$$

где $u^{(\nu)}(t, \varepsilon) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_s^{(\nu)}(t)\right) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \lambda_\nu(\tau)\, d\tau\right)$ — частные решения системы (13) — столбцы матрицы $U(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t W(\tau)\, d\tau\right)$, а $u_m^{(\nu)}(t, \varepsilon)$ — соответствующее m-приближение.

Если уравнение (14) имеет один корень $\lambda_0(t)$ кратности r, которому соответствует, например, один элементарный делитель $(\lambda - \lambda_0(t))^r$, то рядом преобразований [6] система (13) приводится к системе вида

$$\mu^h \dot{v} = (\Omega(t) + \mu H(t, \mu)) v, \tag{22}$$

где $\mu = \varepsilon^{1/\rho}$, $\rho = r$ или $\rho = r - 1$, $0 < h < r$ — целое число, $\Omega(t) = \operatorname{diag}\{\omega_1(t), \ldots, \omega_r(t)\}$, а функции $\omega_j(t)$, $j = \overline{1, r}$, различны $\forall t \in [0, T]$ и удовлетворяют условию (i).

Общее формальное решение системы (22) имеет вид [6, 7]

$$v(t, \varepsilon) = V(t, \mu) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda(t, \mu) \, d\tau\right) c, \tag{23}$$

где $(r \times r)$-матрицы $V(t, \mu)$ и $\Lambda(t, \mu)$ имеют представления

$$V(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s V_s(t), \quad \Lambda(t, \mu) = \Omega(t) + \sum_{s=1}^{h-1} \mu^s \Lambda_s(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t, \mu), \ldots, \lambda_r(t, \mu)\}.$$

Построив m-приближение для решения (23), для частных решений будем иметь асимптотические оценки [6]

$$\| v^{(\nu)}(t, \varepsilon) - v_m^{(\nu)}(t, \varepsilon) \| \leqslant K \varepsilon^{\frac{m+1}{r} - 1} \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \operatorname{Re} \lambda_\nu(\tau, \mu) \, d\tau\right), \quad \nu = \overline{1, r}.$$

Если же предположить, что выполняются условия

$$\operatorname{Re}(\lambda_0(t) + \lambda_\nu(t, \mu)) \leqslant 0, \quad \nu = \overline{1, r},$$
$$(\Phi_0(t) u, u) \leqslant 0$$

((x, y) — скалярное произведение), то, как показано в [8], для решения системы (13) справедлива асимптотическая оценка

$$\| u(t, \varepsilon) - u_m(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^{\frac{m+1}{r} - 2} K.$$

Построив решение $u(t, \varepsilon)$ задачи Коши (13), (16), последовательно определим векторы $v(t, \varepsilon) = (R_4(t) + \varepsilon C_{22}(t, \varepsilon))^{-1} (R_3(t) + \varepsilon C_{21}(t, \varepsilon)) u(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon) = \operatorname{col}(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon))$ и, наконец, решение системы (3) $x(t, \varepsilon) = S(t) y(t, \varepsilon)$.

1. *Старун И. И.* Построение асимптотических решений сингулярно возмущенных линейных систем // Дифференц. уравнения.— 1985.— 21, № 10.— С. 1822—1823.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
3. *Старун И. И.* Интегрирование сингулярно возмущенной системы с вырожденой матрицей при производной // Нелинейные проблемы дифференц. уравнений и мат. физики : Тез. докл. всесоюзн. конф. (Тернополь, 12—15 сент. 1989 г.).—Тернополь, 1989.— С. 400—401.
4. *Чистяков В. Ф.* О линеаризации вырожденных систем квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Приближенные методы решения операторных уравнений и их прил.— Иркутск : СЭИ СО АН СССР, 1982.— С. 146—157.
5. *Sibuya Y.* Some Global properties of Matrices of Functions of one variable // Math. Ann.— 1965.— 161, N 1.— P. 67—77.
6. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— Киев : Вища шк., 1989.— 287 с.
7. *Тэрритин Х. Л.* Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр // Математика.— 1957.—1, № 2.— С. 29—59.
8. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк., 1971.— 228 с.

Получено 06.09.90