УДК 519.21

Н. Н. Леоненко

Предельные теоремы для мер пребывания в областях векторных гауссовских случайных полей

Изучаются меры пребывания в областях векторных гауссовских случайных полей при сильной зависимости. Показано, что наличие сильной зависимости между компонентами поля приводит к изменению характера нормировки и предельного распределения мер пребывания в областях с подвижными границами.

Вивчаються міри перебування в областях векторних гаусівських випадкових полів при сильній залежності. Показано, що наявність сильної залежності між компонентами поля призводить до зміни характеру нормування і граничного розподілу мір перебування в областях з рухомими межами.

Настоящая работа посвящена изучению предельных распределений нелинейных функционалов от однородных изотропных векторных гауссовских случайных полей. Рассматриваются функционалы, имеющие смысл мер пребывания в многомерных областях векторных гауссовских полей. Показано, что вид предельного распределения и характер нормировки зависит от вида области, а наличие сильной зависимости между компонентами поля приводит к изменению предельного распределения мер пребывания в областях с подвижными границами. Отметим, что при сильной зависимости времена пребывания стационарных гауссовских одномерных процессов изучались в работах [1, 2], а многомерных — в работах [3—7]. Предельные теоремы функционалов геометрического типа (в том числе мер пребывания) от однородных изотропных гауссовских полей изучались в работах [8—11]. Предельные распределения будут задаваться кратными стохастическими интегралами (к. с. и.), теория которых изложена в работах [12—14].

1. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, $\mathfrak{B}^n$ — σ-алгебра борелевских множеств R^n, $v_n(r)=\{x\in R^n: \|x\|<r\}$ — шар объема $|v_n(r)| = r^n|v_n(1)|$, где $|v_n(1)|$ — объем единичного шара в R^n, $\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение в R^n.

Пусть $\varphi(u)$, $u\in R^1$ и $\Phi(t)$, $t\in R^1$, — плотность и функция распределения соответственно стандартного нормального закона, $H_k(u)=(-1)^k\times \times[\varphi(u)]^{-1}(d^k/du^k\ \varphi(u))$, $k=0, 1, \ldots$, — полиномы Чебышева — *Эрмита*, образующие полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве

$L_2(R^1, \varphi(u)\,du)$. Известно, что $H_1(u)=u$, $H_2(u)=u^2-1, \dots$. Если ν $=(k_1, \dots, k_p)$ — мультииндекс, $u=(u_1, \dots, u_p)\in R^p$, $p\geqslant 1$, то определ $\varphi(\|u\|)=\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant p}\varphi(u_j)$, $E_\nu(u)=\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant p}H_{k_j}(u_j)$. Известно, что полино $\{E_\nu(u)\}_\nu$ образуют полную ортогональную систему в гильбертовом про ранстве

$$L_2(R^p, \varphi(\|u\|)\,du)=\left\{g(u),\ u\in R^p : \int\limits_{R^p} g^2(u)\,\varphi(\|u\|)\,du<\infty\right\}.$$

Для целого $k\geqslant 0$ определим множество $S_k=\{\nu=(k_1, \dots, k_p)\colon k_j\geqslant$ $1\leqslant j\leqslant p,\ k_1+\dots+k_p=k\}$. Функция $g_r(u)\in L_2(R^p, \varphi(\|u\|)\,du)$ допус ет разложение в сходящийся в среднем квадратическом ряд

$$g_r(u)=\sum_{k\geqslant 0}\sum_{S_k}C_r(\nu)\,E_\nu(u)=\sum_{k\geqslant 0}\sum_{\nu\in S_k}C_r(k_1, \dots, k_p)\,E_\nu(u),$$

где

$$C_r(\nu)=C_r(k_1, \dots, k_p)=\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant p}k_j!\Big)^{-1}\int\limits_{R^p} g_r(u)\,E_\nu(u)\,\varphi(\|u\|)\,du.$$

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — полное вероятностное пространство. Введем та условия:

А. Пусть $\xi(\omega, x)=\xi(x)=[\xi_1(x), \dots, \xi_p(x)]'$, $\omega\in\Omega$, $x\in R^n$, — изме мое сепарабельное непрерывное в среднем квадратическом однородное и тропное векторное гауссовское поле с $M\xi(x)=0$ и корреляционной фу цией $R_\xi=R(\|x\|)=M\xi(0)\,\xi(x)'=(R_{ij}(\|x\|))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$, причем $R_{ij}(\|x\|$ $=a(\|x\|)$ при $i=j$, $R_{ij}=b(\|x\|)$ при $i\neq j$, где $a(0)=1$, $b(0)=\rho_0\in[0,$ $a(\|x\|)=L(\|x\|)/\|x\|^\alpha$, $b(\|x\|)=\rho_\infty L(\|x\|)/\|x\|^\alpha$ при $\|x\|\to\infty$, где $\alpha>$ $\rho_\infty\in[0, 1)$, а $L(t)$, $t\in(0, \infty)$, — медленно меняющаяся на бесконечно функция, ограниченная в каждом ограниченном интервале.

В связи с условием А введем числа

$$d_1=[1+(p-1)\rho_\infty]/[1+(p-1)\rho_0],\quad d_2=\dots=d_p=(1-\rho_\infty)/(1-\rho_0),$$

а также диагональную матрицу $V=\operatorname{diag}\{d_1, \dots, d_p\}$ и матрицу T $=(t_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ такую, что $t_{1j}=[p(1+(p-1)\rho_0]^{-1/2}$, $1\leqslant j\leqslant p$; t_{ij} $=[i(i-1)(1-\rho_0)]^{-1/2}$, $2\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant j<i$; $t_{ii}=(1-i)/[i(i-1)(1$ $-\rho_0)]^{1/2}$, $2\leqslant i<p$; $t_{ij}=0$, $2\leqslant i\leqslant p-1$, $i<j\leqslant p$.

Лемма 1. *При условии* А *случайное поле* $\eta(x)=T\xi(x)$, $x\in R^n$, *являет векторным однородным изотропным гауссовским полем с независимыми ко понентами, т. е.* $M\eta(x)=0$, $\widetilde{R}_\eta=\widetilde{R}(\|x\|)=(\widetilde{R}_{ij}(\|x\|))=M\eta(0)\,\eta(x)'$ $=V\dfrac{L(\|x\|)}{\|x\|^\alpha}$ *при* $\|x\|\to\infty$, *где* $\alpha>0$, *причем* $\widetilde{R}_{ii}(0)=1$, $i=1, \dots,$

Доказательство леммы 1 дано в п. 2.

Замечание 1. Используя результаты [15, с. 69], можно найти в матрицы $T^{-1}=(s_{ij})_{1\leqslant i\ j\leqslant p}$. Именно, $s_{i1}=\sqrt{(1+(p-1)\rho_0)/p}$, $1\leqslant i\leqslant$ $s_{ij}=\sqrt{(1-\rho_0)/i(i-1)}$, $2\leqslant i\leqslant p$, $1\leqslant i\leqslant j$; $s_{ii}=(1-i)/\sqrt{(1-\rho_0)/i(i-}$ $2\leqslant i\leqslant p$; $s_{ij}=0$, $2\leqslant i\leqslant p-1$, $j<i<p$.

Б. Функция $g_r(u)\in L_2(R^p, \varphi(\|u\|)\,du)$, причем существует целое $m\geqslant$ такое, что $C_r(\nu)=C_r(k_1, \dots, k_p)=0$, если $\nu=(k_1, \dots, k_p)\in S_k$, $1\leqslant k$ $\leqslant m-1$, однако $C_r(m_1, \dots, m_p)\neq 0$ хотя бы для одного набора $(m_1,$ $\dots, m_p)\in S_m$, $m_1+\dots+m_p=m$.

Рассмотрим случайное поле $g_r(\eta(x))=g_r(\eta_1(x), \dots, \eta_p(x))$, $x\in R^n$, г неслучайная функция $g_r(u)\in L_2(R^p, \varphi(\|u\|)\,du)$, а случайное поле $\eta($ $x\in R^n$, определено в лемме 1. Определим случайные процессы

$$K_r(t)=\int\limits_{v_n(rt^{1/n})} g_r(\eta(x))\,dx,\quad t\in[0, 1],$$

$$L_r^{(m)}(t)=\sum_{S_m} C_r(\nu)\int\limits_{v_n(rt^{1/n})} E_\nu(\eta(x))\,dx,\quad t\in[0,1].$$

Сформулируем одну теорему сравнения, доказательство которой дадим в п. 2.

Теорема 1. *Если выполнены условия* А, Б, *причем* $\alpha\in(0, n/m)$ *и при* $r\to\infty$

$$\zeta_r=\left[\sum_{S_m} C_r^2(m_1,\ldots,m_p)\right]^{-1}\int\limits_{R^p} g_r^2(u)\,\varphi(\|u\|)\,du=o\left(\frac{r^\alpha}{L(r)}\right),\tag{4}$$

то при $r\to\infty$ *конечномерные распределения случайных процессов* $X_r(t)=[K_r(t)-MK_r(t)]/\sqrt{DK_r(1)}$ *и случайных процессов*

$$X_{m,r}(t)=L_r^{(m)}(t)/\sqrt{DL_r^{(m)}(1)},\ t\in[0,1],$$

имеют одинаковые пределы (*если один из них существует*).

Замечание 2. Если функция $g_r(u)=g(u)$, $u\in R^p$, удовлетворяет условию Б и не зависит от $r>0$ (в этом случае коэффициенты $C_r(\nu)=C(\nu)$ (см. (2)) также не зависят от $r>0$), то условие (4) теоремы 1 выполняется.

Перейдем теперь к изучению предельных распределений функционалов

$$G(r)=\int\limits_{v_n(r)}\chi(\xi(x)\in\Delta)\,dx=|\{x\in v_n(r):\xi(x)\in\Delta\}|,\tag{5}$$

где $\chi(\cdot)$ — индикатор, $\Delta\in\mathfrak{B}^p$ (в общем случае граница множества Δ зависит от r).

Изучение предельных распределений функционалов (5) основано на следующем рассуждении:

$$G(r)=\int\limits_{v_n(r)}\chi(\xi(x)\in\Delta)\,dx=\int\limits_{v_n(r)}\chi(\eta(x)\in\tilde\Delta)\,dx,\tag{6}$$

$$\tilde\Delta=\{y\in R^p:T^{-1}y\in\Delta\},$$

где $\eta(x)$, $x\in R^n$, — векторное поле, построенное в лемме 1 ($\eta(x)$ имеет независимые компоненты). Используя вид матрицы T^{-1} (см. замечание 1), для конкретных областей $\Delta\in\mathfrak{B}^p$ можно найти вид множества $\tilde\Delta\in\mathfrak{B}^p$ и далее использовать теорему 1, согласно которой предельные распределения функционалов (5) будут такие же, как предельные распределения величин $X_{m,r}(1)$, которые можно записать в виде к. с. и.

Рассмотрим вначале меры пребывания в множестве $\Delta=\Delta_1=\{(y_1,\ldots,y_p)':y_1\geqslant 0,\ -\infty<y_j<\infty,\ j=2,\ldots,p\}$, т. е. будем интересоваться предельным распределением функционала $G_1(r)=|\{x\in v_n(r):\xi(x)\in\Delta_1\}|$.

Множество $\tilde\Delta_1$ (см. (6)) в этом случае имеет вид $\tilde\Delta_1=\{y\in R^p:\langle w,y\rangle\geqslant 0\}$, $w_1=(w_1,\ldots,w_p)'$, $w_1=\{[1+(p-1)\rho_0]/p\}^{1/2}$, $w_j=\{(1-\rho_0)/j\,(j-1)\}^{1/2}$, $j=2,\ldots,p$.

При $0\leqslant\alpha\leqslant n/m$ введем постоянную

$$c_1(n,m,\alpha)=m!\,2^{n-m\alpha+1}\pi^{n-1/2}\Gamma\left(\frac{n-m\alpha+1}{2}\right)\Big/\left[(n-m\alpha)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma\left(\frac{2n-m\alpha+2}{2}\right)\right]$$

(подробнее см. [9, с. 60]). Тогда при $\alpha\in(0,n)$, $r\to\infty$

$$MG_1(r)=|v_n(r)|\int\limits_{\tilde\Delta_1}\varphi(\|u\|)\,du,\quad DG_1(r)\backsim c_1(n,1,\alpha)\,c_2(p)\,r^{2n-\alpha}L(r),$$

где $c_2(p) = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \varkappa_j^2 d_j$, d_j определяются по (3), а $\varkappa_j = \int_{\tilde{\Delta}_1} u_j \varphi(\|u\|)\, du > 0$, $j = 1, \ldots, p$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* A *при* $\alpha \in (0, n)$. *Тогда при* $r \to \infty$ *случайные величины* $[G_1(r) - M\, G_1(r)]/\sqrt{DG_1(r)}$ *имеют асимптотически* (0, 1)-*нормальное распределение.*

Рассмотрим функционал (5), в котором множество $\Delta = \Delta_2 = v_p(1) \subset \subset R^p$ есть p-мерный шар единичного радиуса:

$$G_2(r) = |\{x \in v_n(r) : \xi(x) \in v_p(1)\}|.$$

В этом случае множество $\tilde{\Delta}_2$ (см. (6)) имеет вид эллипсоида $\tilde{\Delta}_2(1)$, где

$$\tilde{\Delta}_2(s) = \left\{(y_1, \ldots, y_p)' : \sum_{j=1}^{p} (y_j/\mu_j)^2 < s\right\}, \quad s > 0, \tag{7}$$

$$\mu_1 = \{1 + (p-1)\rho_0\}^{-1/2}, \quad \mu_2 = \ldots = \mu_p = \{1 - \rho_0\}^{-1/2}.$$

Можно показать, что при $\alpha \in (0, n/2)$, $r \to \infty$

$$MG_2(r) = |v_n(r)| \int_{\tilde{\Delta}_2(1)} \varphi(\|u\|)\, du, \quad DG_2(r) \backsim c_1(n, 2, \alpha)\, c_3(p)\, r^{2(n-\alpha)} L^2(r),$$

где $c_3(p) = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \nu_j^2 d_j^2$, числа d_j определяются по (3), а

$$\nu_1 = \int_{\tilde{\Delta}_2(1)} H_2(u_1)\, \varphi(\|u\|)\, du/2 < 0, \quad \nu_2 = \int_{\tilde{\Delta}_2(1)} H_2(u_2)\, \varphi(\|u\|)\, du/2 < 0,$$

$$\nu_3 = \ldots = \nu_p = \nu_2.$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* A, *причем* $\alpha \in (0, n/2)$. *Тогда при* $r \to \infty$ *распределение случайных величин* $[G_2(r) - MG_2(r)]/\sqrt{DG_2(r)}$ *такое же, как распределение величин*

$$\sum_{j=1}^{p} \nu_j \int_{v_n(r)} H_2(\eta_j(x))\, dx / r^{n-\alpha} L(r)\, d_j \sqrt{c_1(n, 2, \alpha)\, c_3(p)} \tag{8}$$

(*если одно из них существует*), *где* $H_2(u) = u^2 - 1$.

Замечание 3. Если выполнено условие A при $\alpha \in (0, n/2)$, то предельное распределение величин (8) можно представить в явном виде, отталкиваясь от результатов [11, 12]. Именно, при $\alpha \in (0, n/2)$ предельное распределение величин (8) имеет вид

$$\{c_1(n, 2, \alpha)\, c_3(p)\}^{-1/2} \sum_{j=1}^{p} \nu_j d_j^{-1} \overline{X}_{2,j}(1),$$

где $\overline{X}_{2,j}(1)$, $1 \leqslant j \leqslant p$, — независимые копии случайных величин $\overline{X}_2(1)$ [9, с. 115], т. е.

$$\overline{X}_2(1) = (2\pi)^{n/2} \int_{R^{2n}}' \mathcal{J}_{n/2}(\|\lambda_1 + \lambda_2\|)\, \|\lambda_1 + \lambda_2\|^{-n/2} Z_{F_0}(d\lambda_1)\, Z_{F_0}(d\lambda_2), \tag{9}$$

где $\mathcal{J}_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu > -1/2$, а в правой части (9) стоит к. с. и. по некоторой гауссовской случайной мере $Z_{F_0}(\cdot)$, подчиненной локально конечной мере $F_0(\cdot)$, которая описана в леме 2.10.3 [9]. Заметим, что $M[\overline{X}_2(1)]^2 < \infty$.

Перейдем теперь к изучению мер пребывания в множествах с подвижными границами. Пусть $f(r) \uparrow \infty$, $r \to \infty$, — непрерывная функция. Рассмотрим функционал

$$G_3(r) = |\{x \in v_n(r) : \xi(x) \bar{\in} v_p(\sqrt{f(r)})\}| = \int_{v_n(r)} \chi(\xi(x) \in \Delta_3(r))\, dx, \qquad (10)$$

где $\Delta_3(r) = R^p \setminus v_p(\sqrt{f(r)})$. В дальнейшем покажем, что

$$MG_3(r) = |v_n(r)| \int_{\tilde{\Delta}_3(r)} \varphi(\|u\|)\, du, \quad \tilde{\Delta}_3(r) = R^p \setminus \tilde{\Delta}_2(\sqrt{f(r)})$$

(см. (7)).

Характер нормировки и предельные распределения функционала $G_3(r)$ зависят от постоянной $k_* = (\mu_1^2 - \mu_2^2)/2 \geqslant 0$, где числа μ_1 и μ_2 определяются соотношениями (7). Заметим, что $k_* = 0$ тогда и только тогда, когда $\rho_0 = 0$ (см. условие A), т. е. когда векторное гауссовское поле имеет независимые компоненты.

Заметим, что при $n = 1$ случай $k_* = 0$ изучался в работах [3—6].

В дальнейшем будет показано, что при $k_* = 0$, $\alpha \in (0, n/2)$.

$$DG_3(r) = A_1^2(r) \backsim c_1(n, 2, \alpha)\, |v_p(1)|^2\, (2\pi)^{-p}\, e^{-f(r)}\, [f(r)]^p\, r^{2(n-\alpha)} L^2(r), \qquad (11)$$

$$r \to \infty.$$

Если же $k_* > 0$, $\alpha \in (0, n/2)$, $r \to \infty$, то

$$DG_3(r) = A_2^2(r) \backsim c_1(n, 2, \alpha)\, (p-1)^2\, \mu_1^2 \mu_2^{2(p-1)} k_*^{-(p-1)} d_2^2 \pi 2^{p-1} \times$$

$$\times f(r)\, e^{-\mu_2^2 f(r)}\, r^{2(n-\alpha)} L^2(r). \qquad (12)$$

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* A *при* $\alpha \in (0, n/2)$, *причем* $p \geqslant 2$ *и* $f(r) = o(\log r)$ *при* $r \to \infty$. *Тогда, если* $k_* = 0$, *то при* $r \to \infty$ *предельное распределение случайных величин* $[G_3(r) - MG_3(r)]/A_1(r)$ *такое же, как предельное распределение величин*

$$\sum_{j=1}^{p} d_j^{-1} \int_{v_n(r)} H_2(\eta_j(x))\, dx / r^{n-\alpha} L(r) \sqrt{c_1(n, 2, \alpha)\, 2p} \qquad (13)$$

(*если одно из них существует*). *Если же* $k_* > 0$, *то при* $r \to \infty$ *предельное распределение величин* $[G_3(r) - MG_3(r)/]A_2(r)$ *такое же, как предельное распределение величин*

$$\sum_{j=2}^{p} \int_{v_n(r)} H_2(\eta_j(x))\, dx / r^{n-\alpha} L(r) \sqrt{c_1(n, 2, \alpha)\, (p-1)\, d_2} \qquad (14)$$

(*если одно из них существует*).

Замечание 4. При $\alpha \in (0, n/2)$, $p \geqslant 2$ и $r \to \infty$ предельные распределения величин (13) и (14) существуют и имеют вид

$$\sum_{j=1}^{p} d_j^{-1} \bar{X}_{2,j}(1) / \sqrt{2pc_1(n, 2, \alpha)}, \qquad \sum_{j=2}^{p} \bar{X}_{2,j}(1) / \sqrt{2c_1(n, 2, \alpha)\, (p-1)\, d_2}$$

соответственно, где $\bar{X}_{2,j}$, $j = 1, \ldots, p$,— независимые копии случайных величин (9).

2. Приведем доказательство леммы 1. Используя процедуру ортогонализации [15, с. 69], получаем, что существует ортогональная матрица $\mathcal{O}$ такая, что $\tilde{V} = \mathcal{O}' R_\xi \mathcal{O} = \mathrm{diag}\{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_2\}$, где $\rho_1 = a(\|x\|) + (p-1)\, b(\|x\|)$, $\rho_2 = a(\|x\|) - b(\|x\|)$ — корни уравнения $\det(R_\xi - \rho I) = 0$ (I — единичная матрица). Корню ρ_1 соответствует собственный вектор $(p^{-1/2}, \ldots, p^{-1/2})$, а корню ρ_2 отвечают $(p-1)$ собственных векторов $([i(i-1)]^{-1/2}, \ldots, [i(i-1)]^{-1/2}, \ (1-i)/[i(i-1)]^{1/2}, 0, \ldots, 0)$, $2 \leqslant i \leqslant p$. Выбрав указанные векторы в качестве строк матрицы $\mathcal{O}$, построим поле

$\tilde{\eta}(x) = \mathscr{O}\xi(x)$ с $M\tilde{\eta}(x) = 0$, $M\tilde{\eta}(0)\tilde{\eta}'(x) = \tilde{V}L(\|x\|)/\|x\|^{\alpha}$. Введем диагональную матрицу $W = \operatorname{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$, где μ_j определяются по (7). Тогда поле $\eta(x) = T\xi(x)$, $T = W\mathscr{O}$ имеет корреляционную матрицу $\tilde{R}_\eta$ такую, что $\tilde{R}_{ii}(0) = 1$, $i = 1, \dots, p$.

Лемма 2. *Пусть* $(\xi_1, \dots, \xi_{2p})$ — $2p$-*мерный гауссовский вектор с* $M\xi_j = 0$, $M\xi_j^2 = 1$, $1 \leqslant j \leqslant 2p$, $M\xi_j\xi_{j+p} = r_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$; $M\xi_j\xi_k = 0$, $(j, k) \overline{\in}$ $\overline{\in} \{(i, j): (j+p, j+p), (j, j+p), 1 \leqslant j \leqslant p\}$. *Тогда*

$$M \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} H_{k_j}(\xi_j) H_{m_j}(\xi_{j+p}) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} \delta_{k_j}^{m_j} k_j! \, r_j^{k_j},$$

где δ_k^m — *символ Кронекера.*

Утверждение леммы 2 является специальным случаем диаграммной формулы (см., например, [16]).

Лемма 3. *Пусть* ζ_1 *и* ζ_2 — *независимые случайные векторы, имеющие равномерное распределение в шаре* $v_n(r) \subset R^n$. *Тогда плотность распределения расстояния* $\rho = \|\zeta_1 - \zeta_2\|$ *имеет вид* $p_\rho(z) = nz^{n-1}r^{-n}I_{\mu(z,r)} \times$ $\times \left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mu(z, r) = 1 - \left(\frac{z}{2r}\right)^2$, *где* $I_\mu(p, q) = \int\limits_0^\mu t^{p-1}(1-t)^{q-1} \times$ $\times dt/B(p, q)$ — *неполная бета-функция.*

По поводу леммы 3 см. [17, с. 182].

Пусть $f(\rho)$, $\rho \geqslant 0$, — борелевская функция, $c_4(n) = \dfrac{4\pi^n}{n\Gamma^2(n/2)}$. Тогда в обозначениях леммы 3

$$\int\limits_{v_n(r)} \int\limits_{v_n(r)} f(\|x-y\|)\,dx\,dy = |v_n(r)|^2 Mf(\|\zeta_1 - \zeta_2\|) =$$

$$= c_4(n)\, r^n \int\limits_0^{2r} z^{n-1} f(z) I_{\mu(z,r)}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) dz.$$

Доказательство теоремы 1. Очевидно $MK_r(t) = tr^n |v_n(1)| \times$ $\times C_r(0, \dots, 0)$. Пусть $U_r(t_j) = X_r(t_j) - X_{m,r}(t_j)$, $a_j \in R^1$, $t_j \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, q$. Покажем, что $\lim\limits_{r\to\infty} M\left[\sum\limits_{j=1}^q a_j U_r(t_j)\right]^2 = 0$. Для этого достаточно показать, что $MU_r^2(t) \to 0$, $r \to \infty$. В силу условия Б $K_r(t) - MK_r(t) = A_r(t) + L_r^{(m)}(t)$, где в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$

$$A_r(t) = \sum_{\nu \geqslant m+1} \sum_{S_\nu} C_r(\nu) \int\limits_{v_n(rt^{1/n})} E_\nu(\eta(x))\,dx, \quad t \in [0, 1].$$

По лемме 2

$$ML_r^{(m)}(t)\, A_r(t) = \sum_{\nu, \nu' \geqslant m+1} \sum_{S_\nu} \sum_{S_{\nu'}} C_r(\nu) C_r(\nu') \times$$

$$\times \int\limits_{v_n(rt^{1/n})} \int\limits_{v_n(rt^{1/n})} ME_\nu(\eta(x)) E_\nu(\eta(y))\,dx\,dy = 0. \tag{15}$$

Следовательно, $DK_r(t) = DL_r^{(m)}(t) + DA_r(t)$. Используя лемму 2, условие А и соотношение (15), получаем при $\alpha \in (0, n/m)$, $r \to \infty$

$$DL_r^{(m)}(t) = \sum_{\nu \in S_m} \sum_{\nu' \in S_m} C_r(\nu) C_r(\nu') \int\limits_{v_n(rt^{1/n})} \int\limits_{v_n(rt^{1/n})} ME_\nu(\eta(x)) E_{\nu'}(\eta(y))\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{\nu \in S_m} C_r^2(\nu) \int_{v_n(rt^{1/n})} \int_{v_n(rt^{1/n})} ([a(\| x - y \|) + (p-1) b(\| x - y \|)]/\mu_1^2)^{m_1} \times$$

$$\times m_1! \prod_{2 \leqslant j \leqslant p} m_j! \, ([a(\| x - y \|) - b(\| x - y \|)]/\mu_j^2)^{m_j} \, dx dy =$$

$$= c_4(n) \, tr^n \sum_{\nu \in S_m} C_r^2(\nu) \int_0^{2rt^{1/n}} z^{n-1} I_{\mu(z,r)}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) m_1! \, ([z^{-\alpha} L(z) +$$

$$+ (p-1) \rho_\infty z^{-\alpha} L(z)]/\mu_1^2)^{m_1} \prod_{2 \leqslant j \leqslant p} mj! \, ([z^{-\alpha} L(z) - \rho_\infty z^{-\alpha} L(z)]/\mu_j^2)^{m_j} \, dz \sim$$

$$\sim c_1(n, m, \alpha) \Big[\sum_{\nu \in S_m} C_r^2(\nu) \prod_{1 \leqslant j \leqslant m} m_j! \, d_j^{m_j} \Big] t^{2-(m\alpha)/n} r^{2n - m\alpha} L^m(rt^{1/n}). \tag{16}$$

Аналогично предыдущему

$$DA_r(t) = c_4(n) \, tr^n \sum_{l \geqslant m+1} \sum_{\nu \in S_l} C_r^2(\nu) \int_0^{2rt^{1/n}} z^{n-1} I_{\mu(z,r)}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times k_1! \, ([a(z) + (p-1) b(z)]/\mu_1^2)^{k_1} \prod_{2 \leqslant j \leqslant p} k_j! \, ([a(z) - b(z)]/\mu_j^2)^{k_j} \, dz. \tag{17}$$

Для любого мультииндекса $\nu = (k_1, \ldots, k_p)$ такого, что $k_1 + \ldots + k_p \geqslant \geqslant m + 1$, существует мультииндекс $q = (q_1, \ldots, q_p)$, зависящий от ν, такой, что $q_j \leqslant k_j$, $\sum_{j=1}^{p} q_j \geqslant m + 1$. Поэтому из (17) следует оценка

$$DA_r(t) \leqslant c_4(n) \, tr^n \sum_{l \geqslant m+1} \sum_{\nu \in S_l} C_r^2(\nu) \int_0^{2rt^{1/n}} z^{n-1} I_{\mu(z,r)}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times k_1! \, ([a(z) + (p-1) b(z)]/\mu_1^2)^{q_1} \prod_{2 \leqslant j \leqslant p} k_j! \, ([a(z) - b(z)]/\mu_j^2)^{q_j} \, dz \leqslant$$

$$\leqslant c_4(n) \, tr^n \sum_{l \geqslant m+1} \sum_{\nu \in S_l} C_r^2(\nu) \prod_{1 \leqslant j \leqslant p} k_j! \, d_j^{q_j} \int_0^{2rt^{1/n}} z^{n-1} \times$$

$$\times L(z) \, z^{-(m+1)\alpha} I_{\mu(z,r)}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) dz. \tag{18}$$

Согласно равенству Парсеваля [18]

$$\sum_{l \geqslant 0} \sum_{\nu \in S_l} C_r^2(\nu) / \prod_{j=1}^{p} k_j! = \int_{R^p} g_r^2(u) \, \varphi(\| u \|) \, du < \infty. \tag{19}$$

Выполнив в (18) замену переменных $\tilde{z} = z/2r$, из (18), (19) получаем

$$DA_r(t) \leqslant c_5 t^{2-(m+1)\alpha/n} r^{2n-(m+1)\alpha} L^{m+1}(rt^{1/n}) \int_{R^p} g_r^2(u) \, \varphi(\| u \|) \, du. \tag{20}$$

Используя (16), (20), получаем

$$DA_r(t)/DL_r^{(m)}(t) \leqslant c_6 L(r) \, r^{-\alpha} \zeta_r, \; c_6 > 0,$$

где ζ_r определяется согласно (4).

Следовательно, при $r \to \infty$ $DA_r(t) = o(DL_r^{(m)}(t))$, $MU_r^2(t) \to 0$, $t \in [0, 1]$, причем $DK_r(1) \sim DL_r^{(m)}(1)$, $r \to \infty$.

Доказательство теоремы 2 опускаем. Отметим лишь, что теорема 2 вытекает из теоремы 1 при $m = 1$ (см. условие Б).

Доказательство теоремы 3. Вычислим коэффициенты (2) разложения функции $g(u) = \chi(u \in v_p(1))$ в ряд (1) (здесь коэффициенты $C_r(\nu) = C(\nu)$ не зависят от r). Имеем $C(\nu) = 0$, $\nu = (k_1, \ldots, k_p) \in S_1$, т. е. $k_1 + \ldots + k_p = 1$, $k_j \geqslant 0$. Далее, $C(\nu) = 0$, если $\nu = (k_1, \ldots, k_p) \in S_2$, причем $k_i = k_j = 1$, $i \neq j$. Можно показать, что $C(2, 0, \ldots, 0) = \nu_1$, $C(0, 2, 0, \ldots, 0) = \ldots = C(0, \ldots, 0, 2) = \nu_2$. Теорема 3 вытекает из теоремы 1 при $m = 2$.

Доказательство теоремы 4. Использовав вид множества $\tilde{\Delta}_3(r)$ найдем коэффициенты (2) разложения функции $g_r(u) = \chi(\|u\|^2 > f(r))$ в ряд (1).

Пусть $k_* = 0$. Тогда $C_r(\nu) = 0$, $\nu = (k_1 \ldots, k_p) \in S_1$ или $(k_1, \ldots, k_p) \in S_2$, но $k_i = k_j = 1$ для некоторого $i \neq j$. Далее

$$C_r(2, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{2} \int\limits_{\tilde{\Delta}_3(r)} H_2(u_1) \varphi(\|u\|)\, du = |v_p(1)| (2\pi)^{-p/2} \times$$

$$\times e^{-f(r)/2} [f(r)]^{p/2} \frac{1}{2}, \ C_r(0, 2, 0, \ldots, 0) = C_r(0, 0, 2, 0, \ldots, 0) = \ldots$$

$$\ldots = C_r(2, 0, \ldots, 0).$$

Таким образом, выполнено условие Б при $m = 2$. Кроме того, при $r \to \infty$

$$\int\limits_{R^p} g_r^2(u) \varphi(\|u\|)\, du \backsim c_7 e^{-f(r)/2} [f(r)]^{(p-2)/2}, \quad c_7 > 0.$$

Тогда в силу теоремы 1 при $m = 2$ распределение случайных величин $[G_3(r) - MG_3(r)]/A_1(r)$ при $k_* = 0$ и $r \to \infty$ такое же, как распределение величин (13) (если одно из них существует).

Рассмотрим теперь случай $k_* > 0$. Как и раньше, имеем $C_r(k_1, \ldots, k_p) = 0$, если $(k_1, \ldots, k_p) \in S_1$ или $(k_1, \ldots, k_p) \in S_2$, но $k_i = k_j = 1$ для некоторых $i \neq j$. Далее, используя (7), а также одно соотношение из работы [19, с. 609], получаем при $r \to \infty$

$$C_r(2, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{2} \int\limits_{\tilde{\Delta}_3(r)} H_2(u_1) \varphi(\|u\|)\, du =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\tilde{\Delta}_2(f(r))} H_2(u_1) \varphi(\|u\|)\, du = -\mu_1 \mu_2^{p-1} \times$$

$$\times \int\limits_{y_2^2 + \ldots + y_p^2 \leqslant f(r)} \prod_{j=2}^{p} \varphi(\mu_2 y_j)\, dy_j \int\limits_0^{\sqrt{f(r) - (y_2^2 + \ldots + y_p^2)}} H_2(\mu_1 y_1) \varphi(\mu_1 y_1)\, dy_1 =$$

$$= (2\pi)^{-p/2} \mu_1 \mu_2^{p-1} \int\limits_{y_2^2 + \ldots + y_p^2 \leqslant f(r)} e^{-\mu_2^2 (y_2^2 + \ldots + y_p^2)/2} \times$$

$$\times e^{-\mu_1^2 (f(r) - (y_2^2 + \ldots + y_p^2))/2} \sqrt{f(r) - \sum_{j=2}^{p} y_j^2}\, dy_2 \ldots dy_p =$$

$$= (2\pi)^{-p/2} \mu_1 \mu_2^{p-1} e^{-\mu_1^2 f(r)/2} |v_p(1)| [f(r)]^{p/2} \int\limits_0^1 s^{p-2} e^{-s k_* f(r)} \times$$

$$\times \sqrt{1 - s^2}\, ds \backsim \mu_1 \mu_2^{p-1} (2\pi)^{-p/2} \pi^{(p-1)/2} k_*^{-(p-1)/2} \sqrt{f(r)}\, e^{-\mu_1^2 f(r)/2}.$$

Аналогично при $r \to \infty$

$$C_r(0, 2, 0, \dots, 0) = C_r(0, 0, 2, 0, \dots, 0) = \dots = C_r(0, 0, \dots, 0, 2) \sim$$

$$\sim \mu_1 \mu_2^{p-1} (2\pi)^{-p/2} \pi^{(p-1)/2} k_*^{-(p-1)/2} \sqrt{f(r)}\, e^{-\mu_2^2 f(r)/2}.$$

Поскольку при $k_* > 0$ и $r \to \infty$

$$C_r(2, 0, \dots, 0)/C_r(0, 2, 0, \dots, 0) = \exp\{-\mu_1^2 f(r)/2\} \exp\{\mu_2^2 f(r)/2\} \to 0, \quad (21)$$

то при $r \to \infty$ получаем

$$DG_3(r) = A_2^2(r) \sim c_1(n, 2, \alpha) r^{2(n-\alpha)} L^2(r)\, 2(p-1) d_2^2 C_r^2(0, 2, 0, \dots, 0),$$

откуда вытекает (12). Условие (4) теоремы 1 выполняется, поскольку при $r \to \infty$

$$\zeta_r \sim c_{10} [(f(r))^{p/2-1} e^{-f(r)/2}]/[f(r)\, e^{-\mu_2^2 f(r)}] =$$

$$= c_{10} \exp\left\{-\left[\mu_2^2 - \frac{1}{2}\right] f(r) - (p-2) \log f(r)]\right\} = o(r^{\alpha}/L(r)), \quad c_{10} > 0.$$

В силу теоремы 1 при $m = 2$, $k_* > 0$ предельное распределение величин $[G_3(r) - MG_3(r)]/A_2(r)$ такое же, как величин

$$\left[C_r(2, 0, \dots, 0) \int_{v_n(r)} H_2(\eta_1(x))\, dx + C_r(0, 2, 0, \dots, 0) \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{j=2}^{p} \int_{v_n(r)} H_2(\eta_j(x))\, dx\right] / [r^{n-\alpha} L(r)\, d_2 C_r(0, 2, 0, \dots, 0) \sqrt{c_1(n, 2, \alpha)(p-1)}], \quad (22)$$

если одно из них существует. Используя (21), получаем

$$\lim_{r \to \infty} D\left[C_r(2, 0, \dots, 0) \int_{v_n(r)} H_2(\eta_1(x))\, dx\right] / [r^{n-\alpha} L(r) \times$$

$$\left.\times C_r(0, 2, 0, \dots, 0) \sqrt{c_1(n, 2, \alpha)(p-1)}\right] = 0.$$

Таким образом, первое слагаемое в (22) сходится к нулю по вероятности. Следовательно, предельное распределение величин $[G_3(r) - MG_3(r)]/A_2(r)$ такое же, как и величин (14).

1. *Berman S. M.* High level sojourns for srongly dependent Gaussian processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1979.— **50**, N 2.— P. 223—236.
2. *Maejima M.* Some sojourn time problem for strongly dependent Gaussian processes // Ibid.— 1981.— **57**, N 1.— P. 1—14.
3. *Berman S. M.* Sojourns of vector Gaussian processes inside end outside sphere // Ibid.— 1984.— **66**, N 4.— P. 529—542.
4. *Maejima M.* Some sojourns time problems for 2-dimentional Gaussian processes // J. Multivar. Anal.— 1986.— **18**, N 1.— P. 52—69.
5. *Maejima M.* Sojourns of multidimentional Gaussian processes with dependent components // Yokohoma Math. J.— 1985.— **33**, N 1-2.— P. 121—130.
6. *Maejima M.* Sojourns of multidimentional Gaussian processes // Dependence in Probability and Statistics.— Birkhäuser, 1986.— P. 91—108.
7. *Taqqu M. S.* Sojourn in an elliptical domain // Stochast. Process. and Appl.— 1986.— **21**.— P. 319—326.
8. *Леоненко Н. Н.* О мерах превышения уровня гауссовским изотропным случайным полем // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1984.— Вып. 31.— С. 64—82.
9. *Леоненко Н. Н., Иванов А. В.* Статистический анализ случайных полей.— Киев : Вища шк., 1986.— 216 с.
10. *Леоненко Н.Н.* Предельные распределения характеристик превышения уравнений гауссовским случайным полем // Мат. заметки.— 1987.— **11**, № 4.— С. 608—618.
11. *Leonenko N. N.* Limit theorem for functionals of geometric type of homogeneouns izotropic random fields // Prob. Theory and Mathematical Statistics: Proc. ... Fourth Vilnius Conf.— Netherlands: VNU SCIENCEPRESS, 1987.— 2.— P. 173—202.
12. *Major P.* Multiple Wiener.— Ito integrals // Lect. Notes Math.— 1981.— **849**.— 127 p.
13. *Engel D.* The multiple stochastic integral // Mem. Amer. Math. Soc.— 1982.— **38**, N 265.— 82 p.

14. *Dobrushin R. L., Major P.* Non-central limit theorem for nonlinear functionals of Gaussian fields // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1979.— **50**, N 1.— P. 27—52.
15. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение.— М. : Наука, 1986.— 547 с.
16. *Taqqu M. S.* Law of iterated logarithm for sums of non-linear functions of Gaussian variables // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1977.— **40**, N 3.— P. 203—238.
17. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности.— М. : Наука, 1983.— 358 с.
18. *Grad H.* Note on *N*-dimentional Hermite polynomials // Communs Pure and Appl. Math.— 1949.— **11**, N 4.— P. 325—330.
19. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. II.— М. : Наука, 1984.— 640 с.

Киев. ун-т

Получено 15.12.87