УДК 517.432

Ю. Е. Бохонов

О самосопряженных расширениях коммутирующих эрмитовых операторов

Доказывается возможность коммутирующего самосопряженного расширения двух формально коммутирующих эрмитовых операторов, один из которых самосопряжен после замыкания, а другой имеет равные дефектные числа. Операторы действуют в гильбертовом пространстве, построенном из тензорного произведения двух гильбертовых пространств пополнением по норме, определяемой положительно определенным ядром, удовлетворяющим некоторому условию мажорируемости. Результат может быть применен к проблеме интегральных представлений и продолжений положительно определенных ядер.

Доводиться можливість комутуючого самоспряженого розширення двох формально комутуючих ермітових операторів, з яких один самоспряжений після замикання, а другий має рівні дефектні числа. Оператори діють в гільбертовому просторі, побудованому з тензорного добутку двох гільбертових просторів поповненням за нормою, що визначається додатньо означеним ядром, яке задовольняє деякій умові мажоровності. Результат можна застосувати до проблеми інтегральних зображень і продовжень додатньо означених ядер.

Возможность коммутирующего самосопряженного расширения эрмитовых операторов тесно связана с проблемой интегральных представлений и продолжений положительно определенных ядер [1]. Случаи, когда несамосопряженный эрмитов оператор является вещественным относительно инволюции или имеет вещественную точку регулярного типа, рассматривались в [1—3]. Из этих условий автоматически следует равенство дефектных чисел оператора.

Будем использовать конструкцию, описанную в [1]. Пусть есть цепочка комплексных сепарабельных гильбертовых пространств $H_-\supseteq H_0\supseteq \supseteq H_+$, где $H_+=H_+^{(1)}\otimes H_+^{(2)}$, $H_0=H_0^{(1)}\otimes H_0^{(2)}$, $H_-=H_-^{(1)}\otimes H_-^{(2)}$ с инволюцией $h\to\bar h$. $K\in H_-\otimes H_-$ называется положительно определенным ядром, если для $u\in H_+$
$$\langle u,u\rangle\equiv(K,u\otimes\bar u)\geqslant 0. \tag{1}$$
Будем предполагать, что ядро невырождено, т. е. из $(K,\ u\otimes\bar u)=0$ следует $u=0$. Пополняя H_+ по норме $\langle\langle u\rangle\rangle=\sqrt{\langle u,\ u\rangle}$, получаем гильбертово пространство H_K. Замыкание в нем будем обозначать $[\cdot]$.

Пусть в $H_+^{(j)}$ действуют операторы B_j с плотной в $H_+^{(j)}$ областью определения $D(B_j)$, $j=1,\ 2$. Построим операторы
$$C_1=B_1\otimes\mathbf{1},\ C_2=\mathbf{1}\otimes B_2,\ D(C_1)=D(B_1)\otimes H_+^{(2)},\ D(C_2)=H_+^{(1)}\otimes D(B_2). \tag{2}$$
Далее будем предполагать, что C_1 и C_2 эрмитовы в H_K. Они коммутируют на векторах $u\in D(C_1)\cap D(C_2)$.

Зафиксируем $w\in H_+^{(1)}$, $w\neq 0$ и рассмотрим для $u,v\in H_+^{(2)}$ скалярное произведение
$$\langle u,v\rangle_w=\langle w\otimes u,w\otimes v\rangle. \tag{3}$$
(В силу невырожденности ядра K из $\langle u,u\rangle_w=0$ следует $u=0$.) Пополняя $H_+^{(1)}$ по норме $\langle\langle u\rangle\rangle_w=\sqrt{\langle u,u\rangle_w}$, получаем гильбертово пространство, которое будем обозначать $H_{K,w}^{(2)}$. Аналогично определяется $H_{K,u}^{(1)}$, $u\in H_+^{(2)}$.

Будем использовать следующие обозначения:
$$\mathfrak{R}^{(2)}(z)=H_+^{(1)}\otimes(B_2-z\mathbf{1})\,D(B_2),\quad \mathfrak{R}_w^{(2)}(z)=w\otimes(B_2-z\mathbf{1})\,D(B_2),$$
$w\in H_+^{(1)}$, $\mathfrak{N}^{(2)}(z)$ — ортогональное в H_K дополнение к $\mathfrak{R}_w^{(2)}(z)$, дефектное подпространство оператора C_2, $\mathfrak{N}_w^{(2)}(z)$ — дефектное подпространство замыкания в $[w\otimes H_+^{(2)}]$ сужения C_2 на $w\otimes D(B_2)$, $N_w^{(2)}(z)$ — дефектное подпространство замыкания B_2 в $H_w^{(2)}$. Аналогичные обозначения вводятся в

случае операторов C_1 и B_1. Предположим, что существуют такие положительно определенные ядра $\alpha \in H_-^{(1)} \otimes H_-^{(1)}$, $\beta \in H_-^{(2)} \otimes H_-^{(2)}$, что для $u_1 \in H_+^{(1)}$, $u_2 \in H_+^{(2)}$

$$(K, u_1 \otimes u_2 \otimes \bar{u}_1 \otimes \bar{u}_2) \leqslant (\alpha, u_1 \otimes \bar{u}_1)(\beta, u_2 \otimes \bar{u}_2). \tag{4}$$

Используя изложенную конструкцию, можно построить пространства $H_\alpha^{(1)}$ и $H_\beta^{(2)}$. Из (4) следует, что если $u \in H_\alpha^{(1)}$, то $u \in H_{K,w}^{(2)}$ $\forall\, w \in H_+^{(1)}$.

В работе [4] рассматривался унитарный оператор $S_w : H_w^{(2)} \to [w \otimes H_+^{(2)}]$, $w \in H_+^{(1)}$, определенный для $u \in H_+^{(2)}$ формулой $S_w u = w \otimes u$. Если A — оператор с плотной в $H_+^{(2)}$ областью определения, $C = \mathbf{1} \otimes A$, то $S_w A u = CS_w u$, $u \in D(A)$. Это равенство можно распространить на векторы из области определения замыкания A в $H_w^{(2)}$.

Теорема. *Пусть при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ замыкание в $[H_+^{(1)} \otimes w_2]$ сужения C_1 на $D(B_1) \otimes w_2$ является самосопряженным оператором, при любом $w_1 \in H_w^{(1)}$ замыкание в $[w_1 \otimes H_+^{(2)}]$ сужения C_2 на $w \otimes D(B_2)$ имеет равные дефектные числа и при некотором $w \in H_+^{(1)}$ $N_w^{(2)}(z) \cup N_w^{(2)}(\bar{z}) \subset H_\beta^{(2)}$. Тогда в H_K существует коммутирующее самосопряженное расширение операторов C_1 и C_2.*

Доказательство. Из самосопряженности замыкания в $[H_+^{(1)} \otimes w_2]$ сужения C_1 на $D(B_1) \otimes w_2$ при любом $w_2 \in H_+^{(2)}$ следует самосопряженность замыкания C_1 в H_k [1, с. 634].

Рассмотрим преобразования Кэли операторов C_j, $j = 1, 2$: $V^{(j)}(z_j) = (C_j - \bar{z}_j \mathbf{1})(C_j - z_j \mathbf{1})^{-1}$, $\operatorname{Im} z_j \neq 0$. Они осуществляют изометрические отображения следующих множеств:

$$V^{(j)}(z_j) : (C_j - z_j \mathbf{1}) D(C_j) \to (C_j - \bar{z}_j \mathbf{1}) D(C_j), \tag{5}$$

причем $V^{(1)}(z_1)$ является унитарным оператором. Как доказано в [1, с. 642 — 644], множества $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$, $\mathfrak{N}^{(2)}(\bar{z}_2)$ инвариантны относительно $V^{(1)}(z_1)$, и на векторах из множества $(B_1 - z_1 \mathbf{1}) D(B_1) \otimes (B_2 - z_2 \mathbf{1}) D(B_2)$, плотного в $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$, операторы $V^{(1)}(z_1)$ и $V^{(2)}(z_2)$ коммутируют. Из унитарности $V^{(1)}(z_1)$ следует инвариантность $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$ и $\mathfrak{N}^{(2)}(\bar{z}_2)$ относительно $V^{(1)}(z_1)$ (это можно доказать, не пользуясь унитарностью $V^{(1)}(z_1)$ [4]).

Легко видеть, что $f \in N_w^{(2)}(z_2)$, если и только если $S_w f \in \mathfrak{N}_w^{(2)}(z_2)$ [4]. Пусть $f \in N_w^{(2)}(z_2)$, тогда из условия теоремы и (4) получаем, что $f \in N_{w'}^{(2)}(z_2)$ для любого $w' \in H_+^{(1)}$. Поэтому как множества эти подпространства совпадают. Это множество будем обозначать $N^{(2)}(z_2)$.

Пусть $w_1 \in D(B_1)$. Положим $x = (B_1 - z_1 \mathbf{1}) w_1$, $y = (B_1 - \bar{z}_1 \mathbf{1}) w_1$. При этом легко видеть, что $V^{(1)}(z_1) S_x w_2 = S_y w_2$ для $w_2 \in H_+^{(2)}$. Это равенство можно продолжить на элементы из $N^{(2)}(z_2)$. Пусть $T : N_w^{(2)}(z_2) \to N_w^{(2)}(\bar{z}_2)$ — некоторый линейный непрерывный оператор с ограниченным обратным, существующий в силу равенства размерностей этих подпространств. Он определен сразу для всех $w \in H_+^{(1)}$, так как $N_w^{(2)}(z_2)$, а также $N_w^{(2)}(\bar{z}_2)$ совпадают как множества при различных $w \in H_w^{(1)}$. Определим линейный оператор $\tilde{T} : \mathfrak{N}^{(2)}(z_2) \to \mathfrak{N}^{(2)}(\bar{z}_2)$ на векторах $S_w f$ формулой $\tilde{T} S_w f = S_w T f$ и по линейности распространим его на линейные комбинации таких векторов. Из свойств T и S_w следует, что $\tilde{T}$ продолжается по непрерывности на $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$ и осуществляет взаимно однозначное отображение его на $\mathfrak{N}^{(2)}(\bar{z}_2)$, а значит, имеет ограниченный обратный.

Пусть $S_x f \in \mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$. Тогда

$$V_u^{(1)}(z_1) \tilde{T} S_x f = V^{(1)}(z_1) S_x T f = V^{(1)}(z_1) S_x f = S_y f,$$

$$\tilde{T} V^{(1)}(z_1) S_x f = \tilde{T} S_y f = S_y T f = S_y f,$$

откуда следует коммутируемость $V^{(1)}(z_1)$ и $\tilde{T}$ на векторах $S_x f$, а значит, и на всем $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$, поскольку линейные комбинации таких векторов плотны в $\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)$. В таком случае, как доказано в [3], существует унитарный оператор $W:\mathfrak{N}^{(2)}(z_2)\to\mathfrak{N}^{(2)}(\bar{z}_2)$ такой, что $V^{(1)}(z_1)W = WV^{(1)}(z_1)$. Оператор $\tilde{V}^{(2)}(z_2) = V^{(2)}(z_2)\oplus W$ является унитарным продолжением $V^{(1)}(z_1)$ на все пространство H_K, коммутирующим с $V^{(1)}(z_1)$. Обратное преобразование Кэли дает самосопряженное коммутирующее расширение операторов C_1 и C_2 в H_K.

Замечание. Можно рассматривать максимальный в H_K оператор C_1 и C_2, имеющий дефектные числа, не зависящие от $w_1\in H_+^{(1)}$ (их равенство, вообще говоря, не предполагается), причем при некотором $w\in H_+^{(1)}$ $\bar{N}_w^{(2)}(z_2)\cup N_w^{(2)}(\bar{z}_2)\subset H_\beta$. Тогда, рассуждая, как и при доказательстве теоремы, можно показать, что существует коммутирующее максимальное расширение в H_K этих операторов (считается, что максимальные операторы коммутируют, если коммутируют их преобразования Кэли). Из [4] следует возможность их коммутирующего самосопряженного расширения с выходом из H_K.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
2. *Исмагилов Р. С.* Самосопряженные расширения системы коммутирующих симметрических операторов // Докл. АН СССР.— 1960.— **133**, № 3.— С. 511—514.
3. *Исмагилов Р. С.* Самосопряженные расширения коммутирующих симметрических операторов // Успехи мат. наук.— 1962.— **17**, № 1.— С. 177—181.
4. *Бохонов Ю. Е.* Коммутирующие самосопряженные расширения систем эрмитовых операторов // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 2.— С. 149—153.

Киев. политехн. ин-т

Получено 19.12.88