УДК 517.54

О. В. Иванов

Обобщенные аналитические функции и аналитические подалгебры

Приводятся двухлистные аналоги теоремы о короне для алгебр произвольных ограниченных непрерывных функций в открытом круге с угловыми граничными значениями из аналитических подалгебр $\mathcal{A} \subseteq H^{\infty}$. Основной результат — описание структуры пространства максимальных идеалов таких алгебр в случае произвольной аналитической подалгебры $\mathcal{A} \subseteq H^{\infty}$.

Приведені дволисті аналоги теореми про корону для алгебр будь-яких обмежених неперервних функцій у відкритому колі з майже всюди кутовими граничними значеннями, які належать аналітичним підалгебрам $\mathcal{A} \subseteq H^{\infty}$. Основний результат — опис структури простору максимальних ідеалів таких алгебр у випадку будь-якої аналітичної підалгебри $\mathcal{A} \subseteq H^{\infty}$.

1. В отличие от алгебр Дугласа [1], теория аналитических подалгебр (см., например, [2]) далека еще от завершения. В работе [3] приведены аналоги теоремы о короне для алгебр непрерывных функций с граничными значениями из алгебр Дугласа. В настоящей статье часть этих результатов распространяется на алгебры непрерывных функций $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ с граничными значениями из аналитических подалгебр. Аналитической подалгеброй $\mathcal{A}$ называется замкнутая алгебра аналитических функций в круге с равномерной нормой и свойством $A \subseteq \mathcal{A} \subseteq H^{\infty}$, где A — диск алгебра. Нас, главным образом, будет интересовать геометрия пространства максимальных идеалов. Теорема 1 — некоторый аналог теоремы о короне. В теореме 2 приводится описание структуры пространства максимальных идеалов алгебр $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ в случае произвольной аналитической подалгебры $\mathcal{A}$. В качестве следствия приводится еще одно доказательство двухлистного аналога теоремы о короне.

2. Обозначим через L^{∞} банахову алгебру существенно ограниченных измеримых функций относительно нормированной меры Лебега m на T. Пусть H^{∞} — алгебра ограниченных аналитических функций на $D = \{z : |z| < 1\}$. Рассматривая граничные значения, отождествляем H^{∞} с замкнутой подалгеброй из L^{∞}. Каждая замкнутая подалгебра B между H^{∞} и L^{∞} называется алгеброй Дугласа [1]. Например, $B = H^{\infty} + C$ — алгебра Дугласа. Множество всех ненулевых мультипликативных линейных функционалов (гомоморфизмов) со слабой топологией на произвольной банаховой алгебре Y называется пространством максимальных идеалов алгебры Y и обозначается через $M(Y)$. Заметим, что алгебра H^{∞} не сепарабельна и не C^*-алгебра. Справедлива замечательная теорема Карлесона о короне:

$M(H^\infty)$ содержит круг D в качестве всюду плотного подмножества [1]. Аналогичная теорема справедлива и для некоторых аналитических подалгебр $\mathcal{A} \subseteq H^\infty$ [2, 4—6]. Например, $QC_A = QC \cap H^\infty$ — замкнутая подалгебра из H^∞ и по теореме Волффа пространство $M(QC_A)$ — компактификация круга D, причем $M(QC_A)\setminus D = M(QC)$, где QC — алгебра квазинепрерывных функций [1, с. 374]. Обозначим через $\mathcal{H}_{QC_A}$ банахову алгебру с равномерной нормой всех непрерывных в круге D функций, имеющих почти всюду угловые пределы из QC_A. Нас, в частности, интересует, в чем различие граничного поведения элементов $\mathcal{H}_{QC_A}$ и QC_A? Ответ в терминах пространств максимальных идеалов будет получен для произвольной аналитической подалгебры $\mathcal{A}$ (теорема 2).

Определение. *Обобщенной аналитической подалгеброй $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ назовем замкнутую алгебру всех непрерывных ограниченных функций в открытом круге D, имеющих почти всюди угловые пределы из $\mathcal{A}$, $A \subseteq \mathcal{A} \subseteq H^\infty$, с нормой*

$$\| f \| = \sup_{z \in D} | f(z) | .$$

Очевидно, $\mathcal{H}_{H^\infty}$ — наибольшая обобщенная аналитическая подалгебра. Описание $M(\mathcal{H}_B)$, где B — алгебра Дугласа, см. в [3,8]. Если для аналитической подалгебры $\mathcal{A}$ имеет место теорема о короне, то существует сюръекция $\pi: M(H^\infty) \to M(\mathcal{A})$, $\pi(z) = z$ для любой $z \in D$. Заметим, что пространство $M(L^\infty)$ является границей Шилова алгебры H^∞. Обозначим через $C_{\mathcal{A}} = C(\pi(M(L^\infty)))$ алгебру всех непрерывных функций на $\pi(M(L^\infty))$. Очевидно, $C_{\mathcal{A}}$ можно рассматривать как замкнутую подалгебру $C(M(L^\infty))$, учитывая, что $f \in C_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда $f \in C(M(L^\infty))$ и $f(\pi^{-1}(t)) = \mathrm{const}$ для любой точки $t \in \pi(M(L^\infty))$.

Лемма 1. *Замкнутая алгебра $C_{\mathcal{A}}$ изометрически изоморфна некоторой замкнутой подалгебре $L^\infty_{\mathcal{A}}$ алгебры L^∞ и*

$$M(C_{\mathcal{A}}) = M(L^\infty_{\mathcal{A}}) = \pi(M(L^\infty)). \tag{1}$$

Доказательство. Легко видеть, что указанное перед леммой вложение $C_{\mathcal{A}} \subseteq C(M(L^\infty))$ есть изометрия. Далее, естественный изоморфизм $L^\infty \leftrightarrow C(M(L^\infty))$ [7, с. 31] дает изометрический изоморфизм $C_{\mathcal{A}} \subseteq C(M(L^\infty))$ на некоторую замкнутую подалгебру $L^\infty_{\mathcal{A}} \subseteq L^\infty$. Равенство $M(C_{\mathcal{A}}) = \pi(M(L^\infty))$ следует из определения $C_{\mathcal{A}}$, а $M(C_{\mathcal{A}}) = M(L^\infty_{\mathcal{A}})$— из изометрической изоморфности алгебр $C_{\mathcal{A}}$ и $L^\infty_{\mathcal{A}}$.

Приведем пример широкого класса таких алгебр $\mathcal{A}$. Пусть B, $H^\infty \subseteq B \subseteq L^\infty$, — алгебра Дугласа, X — замкнутая C^*-алгебра, $C_B \subseteq X \subseteq Q_B$, где C_B и Q_B — C^*-алгебры Сарасона [1, с. 384]. Тогда искомый пример дают алгебры $\mathcal{A}_X \overset{\mathrm{de}}{=} H^\infty \cap X$ [4].

Пусть $\mathcal{H}_0$ — замкнутый идеал всех непрерывных в круге D функций, имеющих почти всюду нулевые угловые пределы.

Лемма 2. *Для любой аналитической подалгебры $\mathcal{A}$*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathcal{H}_0.$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, а f — соответствующая граничная функция из $\mathcal{A}$. Тогда $F|_T = f|_T$ и $F - f \in \mathcal{H}_0$. Поэтому $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A} + \mathcal{H}_0$. Обратное включение очевидно.

3. Перейдем к описанию пространства $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$. Для $f \in \mathcal{H}_{L^\infty}$ пусть $P_z(f|_T)$ обозначает значение гармонического продолжения $f|_T$ в точке $z \in$

$\in D$. Под $f|_T$ понимаем граничную функцию, индуцированную угловыми пределами. На алгебре $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ определим гомоморфизмы $\varphi_z(f) = f(z)$ и $\psi_z(f) = P_z(f|_T)$, $z \in D$. Обозначим через V и W подпространства $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ вида $V = \{\varphi_z : z \in D\}$ и $W = \{\psi_z : z \in D\}$. Тогда вложения

$$i_1 : D \to V \subseteq M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}),\ i_1(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi_z \in V,$$

$$i_2 : D \to W \subseteq M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}),\ i_2(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \psi_z \in W.$$

Ясно, что i_1 и i_2 — гомоморфизмы.

Основной результат этого пункта состоит в том, что гомоморфизмы указанного типа образуют всюду плотное подмножество в $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ при условии, что открытый круг всюду плотен в $M(\mathcal{A})$.

Как и в случае алгебры H^{∞}, доказывается следующая лемма [1, с. 192].

Лемма 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) множество $V \cup W$ всюду плотно в $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$;

2) для произвольного конечного набора функций $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, обладающих свойством

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\varphi_z(f_j)| \geqslant \delta_1 > 0, \tag{2}$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\psi_z(f_j)| \geqslant \delta_2 > 0, \tag{3}$$

для любой точки $z \in D$ существуют функции $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z)\, g_j(z) = 1 \ \text{для любой}\ z \in D.$$

Если $M(\mathcal{A})$ является компактификацией открытого круга, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Множество $V \cup W$ всюду плотно в пространстве $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 3. Возьмем $f_j \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$. Согласно лемме 2 $f_j = f_{1j} + f_{2j}$, где $f_{1j} \in \mathcal{A}$, $f_{2j} \in \mathcal{H}_0$. Положим $h \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f_j g_j^* - 1$, где g_j^* — решение задачи о короне в $\mathcal{A}$ (с данными f_j), которое существует в силу (3). Легко видеть, что $h \in \mathcal{H}_0$. Тогда в силу (2) функция

$$g_j^{**} = \frac{\bar{f}_j}{\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2}\, h$$

принадлежит идеалу $\mathcal{H}_0$. Очевидно, $\sum_{j=1}^{n} g_j^{**} f_j = h$. Наконец, пусть

$$g_j \overset{\mathrm{def}}{=} g_j^* - g_j^{**} \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} f_j g_j = \sum_{j=1}^{n} f_j (g_j^* - g_j^{**}) = h + 1 - h = 1,$$

что завершает доказательство.

4. В этом пункте мы получим дополнительную информацию о строении $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ для произвольной аналитической подалгебры $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная аналитическая подалгебра. Тогда*

$$M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) = M(\mathcal{A}) \cup M(\mathcal{H}_0),$$

причем $M(\mathcal{A}) \cap M(\mathcal{H}_0) = \varnothing$.

Доказательство. По лемме 2 $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}/\mathcal{H}_0 = \mathcal{A}$. Тогда по теореме 6.2 из [7, с. 25]

$$M(\mathcal{A}) = \{m \in M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) : m(\mathcal{H}_0) = 0\}.$$

Докажем, что

$$M(\mathcal{H}_0) = \{m \in M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) : m(\mathcal{H}_0) \neq 0\} \stackrel{\text{def}}{=} R.$$

Для этого достаточно показать, что проекция $i : R \to M(\mathcal{H}_0)$, $i(m) \stackrel{\text{def}}{=} m \mid \mathcal{H}_0$, — гомеоморфизм. Обозначим $m \mid \mathcal{H}_0 = \tilde{m}$ и для любого $\tilde{m} \in M(\mathcal{H}_0)$ положим $m(f) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\tilde{m}(fg)}{\tilde{m}(g)}$, где функция g выбрана из условия $\tilde{m}(g) \neq 0$ и фиксирована. Очевидно, $m(f)$ — гомоморфизм на $\mathcal{H}_B$; $m(f)$ не зависит от выбора $g \in \mathcal{H}_0$, так как в противном случае из $\tilde{m}(fg_1)/\tilde{m}(g_1) \neq \tilde{m}(fg_2)/\tilde{m}(g_2)$ получаем противоречие $\tilde{m}(fg_1g_2) \neq \tilde{m}(fg_1g_2)$. Итак, $i^{-1}(\tilde{m}) = m$ и $i^{-1}: M(\mathcal{H}_0) \to R$. Докажем, что i — биекция. Возьмем $m_1, m_2 \in R$ и $m_1 \neq m_2$. Предположим, что $i(m_1) = i(m_2)$. Тогда существует $g \in \mathcal{H}_0$ такая, что $\tilde{m}_1(g) = \tilde{m}_2(g) \neq 0$. Следовательно, $\tilde{m}_1(fg)/\tilde{m}_1(g) = \tilde{m}_2(fg)/\tilde{m}_2(g)$, т.е. $m_1 = m_2$ — противоречие. Итак, $i(m_1) \neq i(m_2)$. Обратно, пусть $\tilde{m}_1 \neq \tilde{m}_2$, тогда, очевидно, $i^{-1}(\tilde{m}_1) \neq i^{-1}(\tilde{m}_2)$. Это доказывает, что i — биекция R на $M(\mathcal{H}_0)$. Непрерывность i очевидна. Докажем непрерывность i^{-1}. Пусть $\tilde{m}_\alpha \to \tilde{m}_0$, где $\tilde{m}_0 \in M(\mathcal{H}_0)$ и $\{\tilde{m}_\alpha\}$ — направленность точек $M(\mathcal{H}_0)$. Возьмем $g \in \mathcal{H}_0$ такую, что $\tilde{m}_0(g) \geqslant \delta_0 > 0$. Тогда можно считать, что $\tilde{m}_\alpha(g) \geqslant \delta/2$. Поэтому

$$i^{-1}(\tilde{m}_\alpha)(f) = \tilde{m}_\alpha(fg_0)/\tilde{m}_\alpha(g_0) \to \tilde{m}_0(fg)/\tilde{m}_0(g_0) = i^{-1}(\tilde{m}_0)(f),$$

т.е. i^{-1} — непрерывное отображение. Итак, R и $M(\mathcal{H}_0)$ — гомеоморфны. Поэтому $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) = M(\mathcal{A}) \cup M(\mathcal{H}_0)$ и из доказательства следует $M(\mathcal{A}) \cap M(\mathcal{H}_0) = \varnothing$.

Теперь теорема 2 позволяет уточнить теорему 1.

Теорема 3. *Если $M(\mathcal{A})$ является компактификацией открытого круга, то*

1) *$V \cup W$ всюду плотно в $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$;*

2) $[V]_{M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})} = M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}})$, $[W]_{M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})} = M(\mathcal{A})$;

3) $[V]_{M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})} \cap [W]_{M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})} = M(L^\infty_{\mathcal{A}})$, *где $L^\infty_{\mathcal{A}}$ — C^*-алгебра из леммы 1, а $[\ldots]_{M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})}$ обозначает замыкание в пространстве $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$.*

Доказательство. Приведем доказательство, независящее от теоремы 1. Аналогично теореме 2 доказывается равенство $M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}}) = M(L^\infty_{\mathcal{A}}) \cup M(\mathcal{H}_0)$, причем $M(L^\infty_{\mathcal{A}}) \cap M(\mathcal{H}_0) = \varnothing$. С другой стороны, по определению алгебры $L^\infty_{\mathcal{A}}$ (см. лемму 1) $M(L^\infty_{\mathcal{A}}) \subseteq M(\mathcal{A})$. Поэтому

$$M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) = M(\mathcal{A}) \cup M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}})$$

и

$$M(\mathcal{A}) \cap M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}}) = M(L^\infty{}_{\mathcal{A}}). \tag{4}$$

Теперь с учетом (4) утверждения 1 и 3 будут следовать из утверждения 2. Докажем утверждение 2 теоремы 3. Так как W гомеоморфно кругу, то W всюду плотно в $M(\mathcal{A})$. Легко видеть, что $V \subseteq M(\mathcal{H}_0) \subseteq M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}})$, так как V гомеоморфно кругу. Кроме того, $M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}})$ — компактификация открытого круга D. Это означает, что V всюду плотно в компакте $M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}})$. Утверждение 2 теоремы доказано.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 3 показывает, что компакт $M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ представляет собой объединение двух компактификаций $M(\mathcal{A})$ и $M(\mathcal{H}_{L^\infty_{\mathcal{A}}})$, склееных по компакту $M(L^\infty_{\mathcal{A}})$, что позволяет нам говорить о «двухлистном» аналоге теоремы о короне.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\mathcal{A}$ — аналитическая подалгебра и $M(\mathcal{A})$ является компактификацией открытого круга. Диаграмму из [8] можно дополнить следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc}
M(L^\infty) & \subseteq & M(B) & \subseteq & M(H^\infty) & \to & M(\mathcal{A}) & \to & M(A) \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
L^\infty & \supseteq & B & \supseteq & H^\infty & \supseteq & \mathcal{A} & \supseteq & A \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{H}_{L^\infty} & \supseteq & \mathcal{H}_B & \supseteq & \mathcal{H}_{H^\infty} & \supseteq & \mathcal{H}_{\mathcal{A}} & \supseteq & \mathcal{H}_A \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
M(\mathcal{H}_{L^\infty}) & \subseteq & M(\mathcal{H}_B) & \subseteq & M(\mathcal{H}_{H^\infty}) & \to & M(\mathcal{H}_{\mathcal{A}}) & \to & M(\mathcal{H}_A),
\end{array}$$

где A — диск алгебра. Стрелки $\Downarrow$, $\Uparrow$ обозначают соответствующие пространства максимальных идеалов, стрелки $\uparrow$ — гомоморфизмы, стрелки $\to$ — естественные отображения, индуцированные вложениями алгебр.

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.— М. : Мир, 1984.— 469 с.
2. *Izuchi K., Izuchi Y.* Algebras of bounded analytic functions containing the dlisk algebras // Can. J. Math.— 1986.— **38**, N 1.— P. 87—108.
3. *Иванов О. В.* Обобщенные аналитические функции и двухлистная теорема о короне // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989.— № 5.— С. 10—11.
4. *Толоконников В. А.* Теорема о короне в алгебрах ограниченных аналитических функций.— Л., 1984.— 62 с.— Деп. ВИНИТИ, № 251-84.
5. *Chang S.-Y., Marshall D. E.* Some algebras of bounded analytic functions containing the disk algebra // Lect. Notes Math.— 1977.— N 604.— P. 12—20.
6. *Sunberg C., Wolff T.* Interpolating sequences for QA_B // Trans. Amer. Math. Soc.—1983.— **276**, N 2.— P. 551—581.
7. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры.— М. : Мир, 1973.— 336 с.
8. *Иванов О. В.* Обобщенные алгебры Дугласа и теорема о короне // Сиб. мат. журн.— 1990.— **31**, № 4.— С. 60—65.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 12.12.88