УДК 517.956

В. А. Маловичко

О разрешимости краевых задач для некоторых систем дифференциальных уравнений

Доказана однозначная сильная разрешимость краевых задач для псевдогиперболической и гиперболо-параболической систем.

Доведена однозначна сильна розв'язність граничних задач для псевдогіперболічної та гіперболо-параболічної систем.

1. Пусть G — ограниченная область в R^n с кусочно-гладкой границей ∂G. В цилиндрической области $\Omega = G \times (0, T)$, $T > 0$, рассмотрим систему

$$L_1 u(x, t) \equiv (K(x, t) u_t)_t + A(x) u_t - (A^{ij}(x) u_{x_i t})_{x_j} - \\ - (B^{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j} + A^i(x) u_{x_i t} + C(x, t) u = f(x, t), \qquad (1)$$

коэффициентами которой являются симметричные матрицы порядка m, причем $A^{ij} = A^{ji}$, $B^{ij} = B^{ji}$ и для любых векторов z, $z_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, выполняются неравенства

$$A(x) zz \geqslant 0, \quad A^{ij}(x) z_i z_j \geqslant 0, \quad x \in G,$$

$$K(x, 0) zz \geqslant \alpha_1 zz, \quad K(x, T) zz \geqslant \alpha_2 zz, \quad \alpha_{1,2} > 0, \quad x \in G,$$

$$B^{ij}(x, t) z_i z_j \geqslant \alpha_3 z_i z_i, \quad C(x, t) zz \geqslant 0, \quad \alpha_3 > 0, \quad (x, t) \in \Omega$$

(по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до n); u, f — m-мерные вектор-функции (дальше будем называть их функциями). Предполагается также, что все коэффициенты системы (1) один раз непрерывно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$.

Частным случаем системы (1) является уравнение, описывающее распространение возмущений в вязких средах [1].

З а д а ч а 1. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = u|_\Sigma = 0, \qquad (2)$$

где $\Sigma = \partial G \times (0, T)$.

З а д а ч а 2. В области Ω найти решение системы $L_1^* v(x, t) = f(x, t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = v|_\Sigma = 0, \qquad (3)$$

где L_1^* — оператор, формально сопряженный с оператором L_1.

Легко проверить непосредственной проверкой, что задачи 1, 2 взаимно сопряженные.

Введем обозначения: W, W^* — пространства гладких в $\overline{\Omega}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (2) и (3); H_+ (H_+^*) — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства W (W^*) по норме

$$\| u \|^2 = \int_\Omega (u_t u_t + A^{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} + B^{ij} u_{x_i} u_{x_j})\, d\Omega;$$

H_- (H_-^*) — пространство с негативной нормой [2, с. 46], построенное по $L_2(\Omega)$ и H_+ (H_+^*).

Лемма 1. *Для всех функций $u \in H_+$, $v \in H_+^*$ выполняются неравенства*

$$\| L_1 u \|_{H_-^*} \leqslant \gamma_1 \| u \|_{H_+}, \quad \gamma_1 > 0, \tag{4}$$

$$\| L_1^* v \|_{H_-} \leqslant \gamma_2 \| v \|_{H_+^*}, \quad \gamma_2 > 0. \tag{5}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (4) достаточно показать, что оно справедливо для функций $u \in W$. Пусть $u \in W$. Интегрируя по частям, имеем

$$\| L_1 u \|_{H_-^*} = \sup_{v \in H_+^*} \frac{(L_1 u, v)_{L_2(\Omega)}}{\| v \|_{H_+^*}} = \sup_{v \in W^*} \frac{(L_1 u, v)_{L_2(\Omega)}}{\| v \|_{H_+^*}} =$$

$$= \sup_{v \in W^*} \frac{1}{\| v \|_{H_+^*}} \int_\Omega (- K u_t v_t + A u_t v + A^{ij} u_{x_i t} v_{x_j} +$$

$$+ B^{ij} u_{x_i} v_{x_j} - A^i u_{x_i} v_t + C u v)\, d\Omega \leqslant \sup_{v \in W^*} \frac{\gamma_1 \| u \|_{H_+} \| v \|_{H_+^*}}{\| v \|_{H_+^*}} = \gamma_1 \| u \|_{H_+}.$$

Неравенство (5) доказывается аналогично.

Лемма 2. *Если в области Ω для любых векторов z, $z_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, и некоторого числа $\alpha > 0$ выполняются неравенства*

$$\begin{gathered}
[K(x, t) + (T - t)(2A(x) - K_t(x, t) - A^i_{x_i}(x))]\, zz \geqslant \alpha zz, \\
[B^{ij}(x, t) + (T - t) B^{ij}_t(x, t)]\, z_i z_j \geqslant \alpha B^{ij}(x, t)\, z_i z_j, \\
[C(x, t) + (T - t) C_t(x, t)]\, zz \geqslant 0,
\end{gathered} \tag{6}$$

то для любой функции $u \in H_+$ выполняется неравенство

$$\| L_1 u \|_{H_-^*} \geqslant \gamma_3 \| u \|_{L_2(\Omega)}, \quad \gamma_3 > 0. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть

$$v(x, t) = \int_t^T (T - \tau)\, u(x, \tau)\, d\tau, \qquad u \in W.$$

Очевидно, что $v \in W^*$ и $v_t(x, t) = -(T - t)\, u(x, t)$. Применяя обобщенное неравенство Шварца и интегрируя по частям, получаем

$$\| L_1 u \|_{H_-^*} \| v \|_{H_+^*} \geqslant \int_\Omega (Lu)\, v\, d\Omega = \int_\Omega (- K u_t v_t - A u v_t -$$

$$- A^{ij} u_{x_i} v_{x_j t} + B^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + A^i u v_{x_i t} + A^i_{x_i} u v_t + C u v)\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega (T - t) K u_t u\, d\Omega + \int_\Omega (T - t)^{-1} (A v_t v_t + A^{ij} v_{x_i t} v_{x_j t} - B^{ij} v_{x_i t} v_{x_j} -$$

$$- A^l v_t v_{x_i t} - A^i_{x_i} v_t v_t - C v_t v)\, d\Omega \geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega \{[K - (T-t) K_t]\, uu +$$

$$+ 2 (T-t)^{-1} A v_t v_t + 2 (T-t)^{-1} A^{ij} v_{x_i t} v_{x_j t} + (T-t)^{-2} [B^{ij} + (T-t) B^{ij}_t] \times$$

$$\times v_{x_i} v_{x_j} - (T-t)^{-1} A^i_{x_i} v_t v_t + (T-t)^{-2} [C + (T-t) C_t]\, vv\}\, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega (T-t)^{-2} \{[K + (T-t)(2A - K_t - A^i_{x_i})]\, v_t v_t +$$

$$+ 2 (T-t) A^{ij} v_{x_i t} v_{x_j t} + [B^{ij} + (T-t) B^{ij}_t]\, v_{x_i} v_{x_j} +$$

$$+ [C + (T-t) C_t]\, vv\}\, d\Omega \geqslant \gamma_3 \Big\{ \int_\Omega (T-t)^{-2} [v_t v_t + 2 (T-t) A^{ij} v_{x_i t} v_{x_j t} +$$

$$+ B^{ij} v_{x_i} v_{x_j}]\, d\Omega \Big\}^{1/2} \| v \|_{H^*_+}. \tag{8}$$

Сокращая (8) на $\| v \|_{H^*_+}$, имеем

$$\| L_1 u \|_{H^*_-} \geqslant \gamma_3 \left[\int_\Omega (T-t)^{-2} v_t v_t d\Omega \right]^{1/2} = \gamma_3 \| u \|_{L_2(\Omega)}. \tag{9}$$

Используя предельный переход, легко проверить, что неравенство (9) выполняется для всех $u \in H_+$.

Лемма 3. *Если в области Ω для любых векторов $z,\ z_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, и некоторого числа $\beta > 0$ выполняются неравенства*

$$\begin{gathered} [K(x, t) + t(2A(x) + K_t(x, t) - A^i_{x_i}(x))]\, zz \geqslant \beta zz, \\ (B^{ij}(x, t) - t B^{ij}_t(x, t))\, z_i z_j \geqslant \beta B^{ij}(x, t)\, z_i z_j, \\ (C(x, t) - t C_t(x, t))\, zz \geqslant 0, \end{gathered} \tag{10}$$

то для любой функции $v \in H^*_+$ выполняется неравенство

$$\| L^*_1 v \|_{H_-} \geqslant \gamma_4 \| v \|_{L_2(\Omega)}, \qquad \gamma_4 > 0. \tag{11}$$

Неравенство (11) доказывается аналогично неравенству (7) при помощи интегрирования по частям выражения $u L^*_1 v$, где

$$u(x, t) = \int_0^t \tau v(x, \tau)\, d\tau, \qquad v \in W^*.$$

Определение 1. *Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Функцию $u \in H_+$ назовем сильным решением задачи 1, если существует последовательность $u_k \in W$ такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{H_+} = \lim_{k \to \infty} \| L_1 u_k - f \|_{H^*_-} = 0.$$

Определение 2. *Пусть $f \in H^*_-$. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи 1, если существует последовательность $u_k \in W$ такая, что*

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{L_2(\Omega)} = \lim_{k \to \infty} \| L_1 u_k - f \|_{H^*_-} = 0.$$

Согласно [2, с. 98—107; 3, с. 183—186], следствием лемм 1—3 является следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполняются условия* (6), (10), *то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение $u \in H^*$ задачи 1 в смысле определения 1, а для любой функции $f \in H^*_-$ существует единственное сильное решение $u \in L_2(\Omega)$ задачи 1 в смысле определения 2.*

Аналогичные результаты справедливы и для задачи 2.

Отметим, что для псевдопараболической системы (при $K\equiv 0$, $A\equiv 1$, $A^i\equiv 0$, $C\equiv 0$, $A^{ij}(x)z_iz_j\geqslant\alpha_4 z_iz_i$, $\alpha_4>0$) подобные результаты получены в [4].

2. В области $Q=G\times(t_1, t_2)$, $t_1<0$, $t_2>0$ рассмотрим систему

$$L_2u(x, t)\equiv(a(x, t)u_t)_t-(a^{ij}(x, t)u_{x_i})_{x_j}+b(x)u_t+c(x, t)u=f(x, t), \quad (12)$$

коэффициентами которой являются симметричные матрицы порядка m, причем a, a_t, b, c, $c_t\in C(\overline{Q})$, $a^{ij}\in C^1(\overline{Q})$, $a^{ij}=a^{ji}$ и для любых векторов z, $z_i\in R^m$, $i=\overline{1, n}$, выполняются соотношения

$$a(x, t)zz>0, \quad x\in\overline{G}, \quad t_1\leqslant t<0, \quad z\neq 0,$$

$$a(x, t)=0, \quad x\in\overline{G}, \quad 0\leqslant t\leqslant t_2,$$

$$a^{ij}(x, t)z_iz_j>0, \quad (x, t)\in\overline{Q}, \quad z_iz_i>0,$$

$$b(x)zz\geqslant\alpha_5 zz, \quad x\in\overline{G}, \quad \alpha_5>0,$$

$$c(x, t)zz\geqslant\alpha_6 zz, \quad (x, t)\in\overline{Q}, \quad \alpha_6>0.$$

Таким образом, система (12) является гиперболической при $t<0$ и параболической при $t\geqslant 0$.

Задача 3. В области Q найти решение системы (12), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{t=t_1}=u_t|_{t=t_1}=u|_S=0, \quad (13)$$

где $S=\partial G\times(t_1, t_2)$.

Задача 4. В области Q найти решение системы $L_2^*v(x, t)=f(x, t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{t=t_2}=v|_S=0, \quad (14)$$

где L_2^* — оператор, формально сопряженный с оператором L_2.

Задачи 3, 4, как несложно проверить, взаимно сопряженные.

Пусть $\widetilde{W}$, $\widetilde{W}^*$ — пространства гладких в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (13) и (14); $\widetilde{H}_+$ $(\widetilde{H}_+^*)$ — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства $\widetilde{W}$ $(\widetilde{W}^*)$ по норме

$$\|u\|^2=\int\limits_Q(u_iu_t+a^{ij}u_{x_i}u_{x_j}+uu)\,dQ;$$

$\widetilde{H}_-$ $(\widetilde{H}_-^*)$ — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(Q)$ и $\widetilde{H}_+$ $(\widetilde{H}_+^*)$.

Лемма 4. *Для всех функций $u\in\widetilde{H}_+$, $v\in\widetilde{H}_+^*$ выполняются неравенства*

$$\|L_2u\|_{\widetilde{H}_-^*}\leqslant\gamma_5\|u\|_{\widetilde{H}_+}, \qquad \gamma_5>0,$$

$$\|L_2^*v\|_{\widetilde{H}_-}\leqslant\gamma_6\|v\|_{\widetilde{H}_+^*}, \qquad \gamma_6>0.$$

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 5. *Если в области Q для любых векторов z, $z_i\in R^m$, $i=\overline{1, n}$, и некоторых чисел $\mu_{1,2}>0$ выполняются неравенства*

$$[\mu_1 a(x, t)-a_t(x, t)+2b(x)]zz\geqslant\mu_2 zz, \quad (15)$$

$$[\mu_1 a^{ij}(x, t)+a_t^{ij}(x, t)]z_iz_j\geqslant\mu_2 a^{ij}(x, t)z_iz_j,$$

то для любой функции $u\in\widetilde{H}_+$ выполняется неравенство

$$\|L_2u\|_{\widetilde{H}_-^*}\geqslant\gamma_7\|u\|_{L_2(Q)}, \qquad \gamma_7>0. \quad (16)$$

Доказательство. Выберем такое большое число $\mu > \mu_1$, чтобы в области Q выполнялось неравенство

$$[\mu c(x, t) + c_t(x, t)]\, zz \geq \mu_2 zz, \qquad z \in R^m,$$

и положим

$$v(x, t) = \int_t^{t_2} \exp(-\mu\tau)\, u(x, \tau)\, d\tau, \qquad u \in \widetilde{W}.$$

Очевидно, что при этом $v \in \widetilde{W}^*$ и $v_t(x, t) = -\exp(-\mu t)\, u(x, t)$. Применяя обобщенное неравенство Шварца и интегрируя по частям, получаем

$$\| L_2 u \|_{\widetilde{H}^*_-} \| v \|_{\widetilde{H}^*_+} \geq \int_Q (L_2 u)\, v dQ = \int_Q (-a u_t v_t + a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} - b u v_t + c u v)\, dQ =$$

$$= \int_Q \exp(-\mu t)\, a u_t u dQ + \int_Q \exp(\mu t)\, (-a^{ij} v_{x_i t} v_{x_j} + b v_t v_t - c v_t v)\, dQ \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_Q \exp(-\mu t)\, (\mu a - a_t)\, u u dQ +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_Q \exp(\mu t)\, [(\mu a^{ij} + a_t^{ij})\, v_{x_i} v_{x_j} + 2 b v_t v_t + (\mu c + c_t)\, v v]\, dQ \geq$$

$$\geq \delta_1 \int_Q \exp(\mu t)\, (v_t v_t + a^{ij} v_{x_i} v_{x_j} + v v)\, dQ \geq \gamma_7 \| u \|_{L_2(Q)} \| v \|_{\widetilde{H}^*_+}, \quad \delta_1 > 0. \qquad (17)$$

Сократив в (17) на $\| v \|_{\widetilde{H}^*_+}$ и осуществив предельный переход, докажем неравенство (16) для всех $u \in \widetilde{H}_+$.

Лемма 6. *Если в области Q для любых векторов $z, z_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, и некоторого числа $\mu_3 > 0$ выполняются неравенства*

$$\begin{gathered} [a(x, t) + (t - t_1)(a_t(x, t) + 2b(x))]\, zz \geq \mu_3 zz, \\ [a^{ij}(x, t) - (t - t_1)\, a_t^{ij}(x, t)]\, z_i z_j \geq \mu_3 a^{ij}(x, t)\, z_i z_j, \\ [c(x, t) - (t - t_1)\, c_t(x, t)]\, zz \geq \mu_3 zz, \end{gathered} \qquad (18)$$

то для любой функции $v \in \widetilde{H}^*_+$ выполняется неравенство

$$\| L_2^* v \|_{\widetilde{H}_-} \geq \gamma_8 \| v \|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_8 > 0. \qquad (19)$$

Доказательство. Пусть

$$u(x, t) = \int_{t_1}^{t} (\tau - t_1)\, v(x, \tau)\, d\tau, \qquad v \in \widetilde{W}^*.$$

Тогда $u \in \widetilde{W}$, $u_t(x, t) = (t - t_1)\, v(x, t)$. Применяя обобщенное неравенство Шварца и интегрируя по частям, имеем

$$\| L_2^* v \|_{\widetilde{H}_-} \| u \|_{\widetilde{H}_+} \geq \int_Q u L_2^* v dQ = \int_Q (-a u_t v_t + a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + b u_t v + c u v)\, dQ =$$

$$= -\int_Q (t - t_1)\, a v v_t dQ + \int_Q (t - t_1)^{-1} (a^{ij} u_{x_i} u_{x_j t} + b u_t u_t + c u u_t)\, dQ \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_Q [a + (t - t_1)\, a_t]\, v v dQ + \int_Q (t - t_1)^{-1} b u_t u_t dQ +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_Q (t - t_1)^{-2} \{[a^{ij} - (t - t_1)\, a_t^{ij}]\, u_{x_i} u_{x_j} + [c - (t - t_1)\, c_t]\, u u\}\, dQ \geq$$

$$\geq \delta_2 \int_Q (t - t_1)^{-2} (u_t u_t + a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u u)\, dQ \geq \gamma_8 \| v \|_{L_2(Q)} \| u \|_{\widetilde{H}_+}, \quad \delta_2 > 0. \quad (20)$$

Теперь для доказательства неравенства (19) остается только сократить в (20) на $\| u \|_{\widetilde{H}_+}$ и осуществить предельный переход.

Определение 3. *Пусть* $f \in L_2(Q)$. *Функцию* $u \in \widetilde{H}_+$ *назовем сильным решением задачи* 3, *если существует последовательность* $u_k \in \widetilde{\overset{\circ}{W}}$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{\widetilde{H}_+} = \lim_{k\to\infty} \| L_2 u_k - f \|_{\widetilde{H}^{\bullet}_-} = 0.$$

Определение 4. *Пусть* $f \in \widetilde{H}^{\bullet}_-$. *Функцию* $u \in L_2(Q)$ *назовем сильным решением задачи* 3, *если существует последовательность* $u_k \in \widetilde{W}$ *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{L_2(Q)} = \lim_{k\to\infty} \| L_2 u_k - f \|_{\widetilde{H}^{\bullet}_-} = 0.$$

Следствием лемм 4—6 является такая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (15), (18), *то для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *существует единственное сильное решение* $u \in \widetilde{H}^{\bullet}_+$ *задачи* 3 *в смысле определения* 1, *а для любой функции* $f \in \widetilde{H}^{\bullet}_-$ *существует единственное сильное решение* $u \in L_2(Q)$ *задачи* 3 *в смысле определения* 4.

Аналогичные результаты справедливы относительно разрешимости задачи 4.

1. *Сувейка И. В.* Смешанные задачи для уравнения распространения возмущений в вязких средах // Дифференц. уравнения.— 1983.— **19**, № 2.— С. 337—347.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
3. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 230 с.
4. *Ляшко С. И.* Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 3.— С. 368—371.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти
Получено 28.01.87