УДК 512.64

Е. Г. Косман

Изоморфизмы силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы. II. Основная теорема

Рассматриваются получающиеся пополнением силовские p-подгруппы ограниченной линейной группы счетномерного векторного пространства счетной мощности над конечным полем характеристики p. Развивается геометрический подход О'Миры для описания изоморфизмов линейных групп, которые не являются богатыми и, вообще говоря, даже достаточно богатыми трансвекциями. Доказано, что между двумя изоморфными силовскими p-подгруппами существует изоморфизм стандартного вида, который индуцируется некоторым локально внутренним автоморфизмом ограниченной линейной группы.

Розглядаються одержувані поповненням силовські p-підгрупи обмеженої лінійної групи зчисленновимірного векторного простору зчисленної потужності над скінченним полем характеристики p. Розвивається геометричний підхід О'Міри для опису ізоморфізмів лінійних груп, які не являються багатими та, взагалі кажучи, навіть достатньо багатими трансвекціями. Доведено, що між двома ізоморфними силовськими p-підгрупами існує ізоморфізм стандартного вигляду, який індукується деяким локально внутрішнім автоморфізмом обмеженої лінійної групи.

В данной статье, являющейся продолжением работ [1—4], используются принятые в последних обозначения и определения.

Дополнительно введем следующие обозначения: $\mathcal{L}$ — множество прямых пространства V; $\mathcal{H}$ — множество гиперплоскостей относительно тотального подпространства $\overline{W}$ пространства V'; $P(L, H)$ — подгруппа, состоящая из e и всех трансвекций группы P с вычетной прямой $L \in \mathcal{L}$ и неподвижной гиперплоскостью $H \in \mathcal{H}$; $P(L)$ — подгруппа, состоящая из e и всех трансвекций группы P с вычетной прямой $L \in \mathcal{L}$: $P(H)$ — подгруппа, состоящая из e и всех трансвекций группы P с неподвижной гиперплоскостью $H \in \mathcal{H}$; $\mathcal{X} = \mathcal{L} \cup \mathcal{H}$, $P(X) = P(L)$ при $X = L \in \mathcal{L}$ и $P(X) = P(H)$ при $X = H \in \mathcal{H}$; $\mathcal{X}(P) = \mathcal{L}(P) \cup \mathcal{H}(P) = \{X \in \mathcal{X} \mid P(X) \neq \{e\}\}$.

Обозначим через $\widehat{\ }: \overline{GL}(V) \to \overline{GL}(W)$ контраградиентный изоморфизм, а через $\hat{\Delta}$ — образ подгруппы Δ группы $\overline{GL}(V)$ при контраградиентном изоморфизме.

Переход от свойства сохранения трансвекций к основной теореме об изоморфизме силовских p-подгрупп почти в точности таков же, как и в [5]. Опишем его в общих чертах.

Лемма 1. *Для любых* $X, Y \in \mathcal{X}(P)$, *любых* $L, K \in \mathcal{L}(P)$ *и любых* $H, J \in \mathcal{H}(P)$ *имеем*

1) $P(X) = P(Y) \Leftrightarrow X = Y$;

2) $P(L, H) = P(K, J) \Leftrightarrow L = K$ *и* $H = J$ (*при условии, что* $L \subset H$ *и* $K \subset J$);

3) $P(L)^{\wedge} = \hat{P}(L^0)$, $P(H)^{\wedge} = \hat{P}(H^0)$;

4) $P(L, H)^{\wedge} = \hat{P}(H^0, L^0)$ (*при условии, что* $L \subset H$);

5) $P(X) \cap P(Y) \neq e \Leftrightarrow Y \subset Y$ *или* $Y \subset X$;

6) $P(X)$ — *максимальная подгруппа в* P, *состоящая только из трансвекций*;

7) *всякая максимальная подгруппа трансвекций из* P *имеет вид* $P(X)$.

Пусть P и S — две изоморфные силовские p-подгруппы из $\mathfrak{P}(V)$, а f — изоморфизм, сохраняющий трансвекции [4]. Поскольку для каждого X из $\mathcal{X}(P)$ $P(X)$ является максимальной подгруппой в P, состоящей только из трансвекций, то учитывая указанные выше факты, $f(P(X))$ — максимальная подгруппа в S, состоящая только из трансвекций, т. е. $f(P(X)) = S(X_1)$ для некоторого единственного $X_1 \in \mathcal{X}(S)$. Тогда по изоморфизму f можно построить отображение $\pi : \mathcal{X}(P) \to \mathcal{X}(S)$, полагая $\pi X = X_1$.

Лемма 2. *Отображение* π *обладает следующими свойствами*:

1) *оно взаимно однозначно отображает* $\mathcal{X}(P)$ *на* $\mathcal{X}(S)$;

2) $(X \subset Y$ *или* $Y \subset X) \Leftrightarrow (\pi X \subset \pi Y$ *или* $\pi Y \subset \pi X)$;

3) *либо* $\pi\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(S)$ *и* $\pi\mathcal{H}(P) = \mathcal{H}(S)$, *либо* $\pi\mathcal{L}(P) = \mathcal{H}(S)$ *и* $\pi\mathcal{H}(P) = \mathcal{L}(S)$.

Доказательство леммы полностью совпадает с доказательством предложения 5.5.10 в [6].

Лемма 3. *Отображение* π *продлевается до отображения* $\pi^*: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, *обладающего следующими свойствами*:

1) *оно взаимно однозначно отображает* $\mathcal{X}$ *на* $\mathcal{X}$;

2) $(X \subset Y$ *или* $Y \subset X) \Leftrightarrow (\pi^* X \subset \pi^* Y$ *или* $\pi^* Y \subset \pi^* X)$;

3) *либо* $\pi^*\mathcal{L} = \mathcal{L}$ и $\pi^*\mathcal{H} = \mathcal{H}$, *либо* $\pi^*\mathcal{L} = \mathcal{H}$ *и* $\pi^*\mathcal{H} = \mathcal{L}$.

Доказательство. По лемме 7 из [4] и теореме из [2]

$$\dim V^0(P) + \dim W^0(P) = \dim V^0(S) + \dim W^0(S) = k \leqslant 2.$$

Если $k = 0$, то $\mathcal{X}(P) = \mathcal{X}(S) = \mathcal{X}$ и утверждения данной леммы следуют из леммы 2.

Пусть $k = 1$ и $\dim V^0(P) = 0$, а $\dim W^0(P) = 1$ (случай $\dim V^0(P) = 1$ и $\dim W^0(P) = 0$ рассматривается аналогично). По теореме из [2] силовская p-подгруппа P имеет единственную максимальную нормальную подгруппу $N(a)$, состоящую только из трансвекций, где $N(a) = N(a; P) = \langle \tau_{a,\rho} \,|\, \langle a \rangle = W^0(P), \rho \in W(P) \rangle$. Из теоремы о сохранении трансвекций [4] следует, что $f(N(a))$ есть единственная максимальная нормальная подгруппа в S, состоящая только из трансвекций. Если $\dim W^0(S) = 1$ и $\dim V^0(S) = 0$, то $f(N(a)) = N(b) = N(b; S)$, где $\langle b \rangle = W^0(S)$.

Для любой силовской p-подгруппы $P \in \mathfrak{P}(V)$ $\mathcal{L}(P) =$ {множество прямых, порожденных векторами из $V(P)$}, а $\mathcal{H}(P) =$ {множество гиперплоскостей, порожденных функционалами из $W(P)$}. В рассматриваемом случае $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}$, а из п. 3 леммы 2 следует $\pi(\mathcal{L}(P)) = \mathcal{L}(S)$, так как $\pi(\langle a \rangle) = \langle b \rangle$. Следовательно, $\pi(\mathcal{H}(P)) = \mathcal{H}(S)$.

Пусть ρ_0 и φ_0 — любые такие функционалы в W, что $W = \langle W(P), \rho_0 \rangle = \langle W(S), \varphi_0 \rangle$ ($\rho_0(a) \neq 0$, $\varphi_0(b) \neq 0$). Тогда любой функционал ν из W представим в виде $\nu = \rho + \alpha\rho_0$ для некоторого $\rho \in W(P)$ и $\alpha \in F$. Из леммы 2 следует, что существует ассоциированное с π взаимно однозначное отображение $\pi' : W(P) \to W(S)$. Продлим отображение π' до отображения π'' функционалов на всем пространстве W следующим образом: *положим* $\pi''(\nu) = \pi'(\rho) + \alpha\varphi_0$ и $\pi''(\lambda\nu) = \lambda\pi''(\nu)$ для любых $\nu \in W$ и $\lambda \in F$. По взаимно однозначному отображению $\pi'' : W \to W$ строим отображение $\pi^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ по правилу $\pi^*(\langle \nu \rangle^0) = \langle \pi''(\nu) \rangle^0$ для любой гиперплоскости

$\langle v\rangle^0 \in \mathcal{H}$. Отображение π^* определено корректно, поскольку $\pi^*(\langle\lambda v\rangle^0) = \langle\pi''(\lambda v)\rangle^0 = \langle\lambda\pi''(v)\rangle^0 = \langle\pi''(v)\rangle^0 = \pi^*(\langle v\rangle^0)$. На множестве прямых $\mathcal{L}$ положим $\pi^* = \pi$. Тогда согласно лемме 2 отображение $\pi^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ является искомым.

Если $\dim W^0(S) = 0$ и $\dim V^0(S) = 1$ $(\langle\varphi\rangle = V^0(S))$, то $f(N(a)) = N(\varphi; S)$ — единственная максимальная нормальная подгруппа в S, состоящая только из трансвекций. Из п. 3 леммы 2 $\pi(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$, так как $\pi(\langle a\rangle) = \langle\varphi^0\rangle$, $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}$ и $\mathcal{H}(S) = \mathcal{H}$. Тогда $\pi(\mathcal{H}(P)) = \mathcal{L}(S)$. Аналогично предыдущему случаю строится взаимно однозначное отображение $\pi' : W(P) \to V(S)$, ассоциированное с отображением π. Затем для вектора $b_0 \in V$ с условием $\langle V(S), b_0\rangle = V$ и функционала $\rho_0 \in W$ с условием $\langle W(P), \rho_0\rangle = W$ отображение π' продлевается до взаимно однозначного отображения $\pi'' : W \to V$ следующим образом: для любого $v = \rho + \alpha\rho_0$, где $\rho \in W(P)$, а $\alpha \in F$, положим $\pi''(v) = \pi'(\rho) + \alpha b_0$ и $\pi''(\lambda v) = \lambda\pi''(v)$ для всех $\lambda \in F$. По отображению $\pi'' : W \to V$ строим отображение $\pi^* : \mathcal{H} \to \mathcal{L}$ по правилу $\pi^*(\langle v\rangle^0) = \langle\pi''(v)\rangle$ для любой гиперплоскости $\langle v\rangle^0 \in \mathcal{H}$. Отображение π^* определено корректно, поскольку $\pi^*(\langle\lambda v\rangle^0) = \pi^*(\langle v\rangle^0)$. На множестве прямых $\mathcal{L}$ положим $\pi^* = \pi$. Тогда согласно лемме 2 отображение $\pi^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ является искомым.

Пусть $k = 2$. Тогда по теореме из [2] либо $f(N(a)) = N(b)$ и $f(N(\rho)) = N(\varphi)$, либо $f(N(a)) = N(\varphi)$ и $f(N(\rho)) = N(b)$, где $N(a)$ и $N(\rho)$ — две максимальные нормальные подгруппы в P, состоящие только из трансвекций, $N(b)$ и $N(\varphi)$ — две максимальные нормальные подгруппы в S, состоящие только из трансвекций, $\langle a\rangle = W^0(P)$, $\langle\rho\rangle = V^0(P)$, $\langle b\rangle = W^0(S)$, $\langle\varphi\rangle = V^0(S)$. При этом либо $\pi(\mathcal{L}(P)) = \mathcal{L}(S)$ и $\pi(\mathcal{H}(P)) = \mathcal{H}(S)$, либо $\pi(\mathcal{L}(P)) = \mathcal{H}(S)$ и $\pi(\mathcal{H}(P)) = \mathcal{L}(S)$. В обоих случаях π продлевается до $\pi^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ аналогично тому, как это было сделано выше при $k = 1$. Тогда согласно лемме 2 отображение $\pi^* : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ является искомым. Таким образом, лемма доказана.

Теперь доказывается (предложение 3.7 в [5]), что отображение π^* единственным образом можно продолжить до проективности либо проективного пространства V, если $\pi^*(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ и $\pi^*(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, либо проективного пространства W на проективное пространство V, если $\pi^*(\mathcal{L}) = \mathcal{H}$ и $\pi^*(\mathcal{H}) = \mathcal{L}$. А далее, используя основную теорему проективной геометрии и в точности следуя [5], доказываем теорему об изоморфизме силовских p-подгрупп из $\mathfrak{P}(V)$.

Теорема. *Пусть P и S — изоморфные силовские p-подгруппы из $\mathfrak{P}(V)$. Тогда существует сохраняющий трансвекции изоморфизм $f : P \to S$, представимый в одной из двух форм: либо $f(x) = gxg^{-1}$ для всех $x \in P$ для некоторой коллинеации g пространства V, либо $f(x) = h\hat{x}h^{-1}$ для всех $x \in P$ для некоторой коллинеации h пространства W на пространство V.*

Элемент σ группы $\overline{GL}(V)$ будем называть дилатацией [6], если существует такое разложение $V = U \oplus \langle v\rangle$, что $\sigma|_U = 1_U$ и $\sigma v = \alpha v$ для некоторого $\alpha \neq 0$ из F. Поскольку $GL(V_n)$ порождается своими трансвекциями и дилатациями для любого n, а $\overline{GL}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} GL(V_n)$, где $GL(V_n) \subset GL(V_{n+1})$, то $\overline{GL}(V)$ также порождается своими трансвекциями и дилатациями. По построению (доказательство леммы 3) коллинеация g из теоремы обладает тем свойством, что $gV = V$ и $Wg = Wg^{-1} = W$, а для коллинеации h — $hW = V$ и $h^{-1}V = W$. Поэтому изоморфизм f из теоремы является взаимно однозначным отображением как трансвекций, так и дилатаций группы $\overline{GL}(V)$, причем из вида f следует сохранение всех соотношений между трансвекциями и дилатациями в $\overline{GL}(V)$. Таким образом, справедливо следствие.

Следствие. *Силовские p-подгруппы P и S из $\mathfrak{P}(V)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует локально внутренний автоморфизм Λ группы $\overline{GL}(V)$, при котором $\Lambda P = S$.*

Замечание. При доказательстве леммы 3 в случае $\mathcal{X}(P) \neq \mathcal{X}$ и $\mathcal{X}(S) \neq \mathcal{X}$ выбирались функционалы ρ_0, $\varphi_0 \in W$ с условием $\langle W(P), \rho_0\rangle =$

$= \langle W(S), \varphi_0 \rangle = W$. Тогда справедливо следствие. Но существуют такие функционалы ρ, $\varphi \in V'$, что $\rho, \varphi \notin W$, $\langle W(P), \rho \rangle = U_1$, $\langle W(S), \varphi \rangle = U_2$, где U_1, U_2 — тотальные подпространства в V'. Обозначим через $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ множества гиперплоскостей относительно тотальных подпространств U_1 и U_2 соответственно, $\mathcal{X}_i = \mathcal{L} \cup \mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$. Тогда имеет место аналог леммы 3 для отображения $\pi^* : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$, а значит, и аналог теоремы, где h — коллинеация пространства U_2 на V, $\hat{} : GL(V) \to GL(U_2)$ — контраградиентный изоморфизм. При этом $gV = V$, а $Wg^{-1} = U_1 \neq W$, $h^{-1}V = U_2 \neq \neq W$. Отсюда следует, что при $\dim V^0(P) + \dim W^0(P) \neq 0$ существует изоморфизм $f : P \to S$, сохраняющий трансвекции, который не обязательно индуцируется некоторым локально внутренним автоморфизмом группы $GL(V)$, поскольку, например, для трансвекции $\tau_{a,\rho_0} \in GL(V)$, где $\rho_0 = \rho g$, $f(\tau_{a,\rho_0}) = g\tau_{a,\rho_0}g^{-1} = \tau_{ga,\rho}$ является линейным преобразованием пространства V, но не принадлежит $GL(V)$.

1. *Косман Е. Г.* Построение силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 173—179.
2. *Косман Е. Г.* О геометрической характеризации силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Там же.— 1988.— **40**, № 3.— С. 391—397.
3. *Косман Е. Г.* О нормальном строении силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы // Там же.— 1989.— **41**, № 10.— С. 1399—1403.
4. *Косман Е. Г.* Изоморфизмы силовских p-подгрупп ограниченной линейной группы. I. Сохранение трансвекций // Там же.— № 12.— С. 1649—1653.
5. *О'Мира О. Т.* Общая теория изоморфизмов линейных групп // Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами.— М. : Мир, 1980.— С. 58—118.
6. *О'Мира О. Т.* Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. —М.: Мир, 1976.— С. 57—167.

Ин-т ботаники АН УССР, Киев

Получено 13.09.88