УДК 517.986

Й. Реберг

Кратность представления группы Пуанкаре на пространстве двучастичных состояний

Определяется, какие представления группы Пуанкаре могут возникнуть в пространстве, построенном по четырехточечному функционалу W_4 в предположении, что кроме аксиом положительной определенности и Лоренц-инвариантности имеет место асимптотическая полнота.

Визначається, які представлення групи Пуанкаре можуть виникнути у просторі, побудованому по чотирьохточковому функціоналу W_4 в припущенні, що крім аксіом додатньої визначеності та Лоренц-інваріантності має місце асимптотична повнота.

Найти характеристические представления для функционалов Уайтмана — это классическая проблема аксиоматической теории квантованных полей. Ю. М. Березанский [1, 2], Ю. С. Самойленко [3], Л. М. Корсунский и Ю. С. Самойленко [4] построили представления для уайтмановских функционалов в виде интегралов от положительных элементарных ядер. Структура этих элементарных ядер была исследована в работах Ю. С. Самойленко [3] и Й. Реберга [5]. Однако до сих пор ничего не известно о том, какие неприводимые компоненты встречаются в возникающих здесь представлениях группы Пуанкаре и какова их кратность. В дальнейшем обозначим через $\mathcal{H}_2$ гильбертово пополнение $S(\mathbb{R}'') \otimes S(\mathbb{R}'')$ по норме, индуцированной W_4 на этом пространстве, через $\mathfrak{A}_2$ соответствующее представление группы Пуанкаре. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* W_4 — *четыреточечный функционал квантового поля* $(\mathcal{H}, D, A, \mathfrak{A}, \omega)$, *который удовлетворяет аксиомам Хаага — Рюэля* [6] *Тогда в* $\mathcal{H}_2$ *существует* $\mathfrak{A}_2$*-инвариантный ортогональный проектор* P *такой, что для всех* $f, g \in C_0^\infty\left(\bigcup_{m\in]m_0-\varepsilon, m_0+\varepsilon[} \Omega_m\right)$, Ω_m — *массовый гиперболоид, справедливо* 1) $PA(e^{itM}f)\, A(e^{itm}g)\,\omega \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$; 2 $(1-P)\,\mathfrak{A}_2\,(1-P)$ *содержит все неприводимые представления, принадлежащие массам* $m > 2m$ *с четным спином. Кратность этих представлений по крайней мере один и не более двух* $(M : \mathbb{R}^4 \ni x = (x_0, \tilde{x}) \to x_0 - (m_0^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{1/2}.)$

Доказательство. Предположим (с точностью до унитарного преобразования), что $\mathcal{H} = \sum_i L^2(V^+, s_j, C^{\nu(j)})$ и $\mathfrak{A}_2$ действует таким образом: $(\mathfrak{A}_2(\Lambda, a)\,\psi)_j(y) = e^{i[a,y]\psi_j(\Lambda^{-1}(y))}$ при $a \in \mathbb{R}^4$, Λ — гиперболический элемент группы Лоренца. Пусть P_r — канонический проектор $\sum_j L^2(V^+, s_j, C^{\nu(j)}$ на $L^2(V^+, s_r, C^{\nu(r)}$. Справедливо следующее предложение.

Предложение. *Отображение* $S(\mathbb{R}^4) \otimes S(\mathbb{R}^4) : f \otimes g \to A(f)\,A(g)\,\omega$ *имеет следующую аналитическую структуру: существуют распределения* $\xi T_{j,y}\xi_{j,y}$; $T_{j,y} : S(\mathbb{R}^4) \to C^{\nu(j)}$ *такие, что для каждого индекса* $j \in \mathbb{N}$ *функция* $V^+ \ni y \to T_{j,y}(f(y - \cdot)\cdot g)$ *принадлежит классу эквивалентности элемента* $P_j A(f)\, A(g)\,\omega$ *в* $L^2(V^+, S_j, C^{\nu(j)})$. *Распределения* $T_{j,y}$ *допускают разложение* $T_{j,y} = T_{j,y}^{1,1} + T_{j,y}^{1,2} + T_{j,y}^{2}$ *такое, что*

а) $T_{j,y}^{1,1}$ *мера на множестве* $\Omega_{m_0} \cap (y - \Omega_{m_0})$;

б) $$\langle T_{j,y}^{1,2}, f\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\varepsilon} \frac{f\left(\sqrt{(m_0^2 + \|\tilde{x}\|^2}, \tilde{x}\right) h_{j,y}(\tilde{x})}{y_0 - (m_0^2 + \|\tilde{x}\|^2)^{1/2} - (m_0^2 + \|\tilde{y} - \tilde{x}\|^2)^{1/2}}\, d\tilde{x},$$ *где*

$h_{j,y}$ — C^∞*-функция в окрестности множества* крит $(y) = \{\tilde{x} / \tilde{x} \in \mathbb{R}^3,\ y_0 = \sqrt{m_0^2 + \|\tilde{x}\|^2} + \sqrt{m_0^2 + \|\tilde{y} - \tilde{x}\|^2}\}$;

в) $\operatorname{supp} T^2_{j,y} \subset \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$;

г) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j,y} = -\lim\limits_{t\to-\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j,y} = h_{j,y}\cdot\alpha_y$, *где* α_y — *каноническая мера на алгебраическом компактном многообразии* $\Omega_{m_0} \cap (y - \Omega_{m_0})$.

Пусть $E_j = \{y/T^{1,1}_{j,y} = 0$ и $h_{j,y} = 0$ на крит $(y)\}$, Q_j — проектор в $L^2(V^+, \rho_j, C^{\nu(j)}$, который определен как оператор умножения на характеристическую функцию множества E_j, $P = \sum\limits_j Q_j P_j$.

Чтобы доказать 1 теоремы, необходимо и достаточно, чтобы для каждого j $\lim\limits_{t\to\pm\infty} Q_j P_j A(e^{itM} f) A(e^{itM} g)\omega = 0$. (Существование предела вытекает из теоремы Хаага — Рюэля.) По теореме Риса — Фишера можно вычислять этот предел поточечно. Очевидно, из определения проекторов Q_j и свойства г) имеем $\lim\limits_{t\to\pm\infty} Q_i P_i A(e^{itM} f) A e^{itM} g)\omega(y) = T^{1,2}_{j,y}(e^{itM(y-\cdot)} f(y-\cdot) \times \times g) = 0$ для каждого $y \in V^+$, что доказывает 1. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} A(e^{itM} f) A(e^{itM} g)\omega = \lim\limits_{t\to\pm\infty} (1-P) A(e^{itM} f) A(e^{itM} g)\omega = A^{\text{out}}_{(\text{in})}(f) A^{\text{out}}_{(\text{in})}(g)\omega$. Легко доказать, что $w - \lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itM(y-\cdot)} T_{j,y}$ равняется распределениям, которые соответствуют out- и in-полям (out- и in-поля унитарно эквивалентны свободному полю [7]). Неприводимые компоненты и кратности соответствующего представления $\mathfrak{A}^{\text{free}}_2$ свободного поля известны все неприводимые представления, принадлежащие массам $m > 2m$ с четным спином кратности один. Поэтому, для каждого $y \in \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$ и каждого четного s существует только один индекс j_1 такой, что

$$u(j_1) = 2s + 1, \lim_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} (T^{1,1}_{j,y} + T^{1,2}_{j,y}) \neq 0$$

и только один индекс j_2 такой, что $u(j_2) = 2s + 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} (T^{1,1}_{j,y} + T^{1,2}_{j,y}) \neq 0$. В силу $e^{itM(y-\cdot)} T^{1,1}_{j,y} + T^{1,1}_{j,y}$ и предложения 1г следует, что это возможно лишь в двух случаях:

1) для фиксированного четного числа s и $y \in \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$ существует один и только один индекс j_2 такой, что $\nu(j) = 2s + 1$ и

$$T^{1,1}_{j,y} \neq \pm \lim_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j,y} = \pm h_{j,y}\cdot d_y;$$

2) для каждого четного s и $y \in \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$ существует два и только два индекса j_1 и j_2 такие, что $\nu(j_1) = \nu(j_2) = 2s + 1$ и

$$\lim_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j_1,y} = T^{1,1}_{j_1,y} \neq 0, \quad \lim_{t\to-\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j_2,y} = T^{1,1}_{j_2,y} \neq 0.$$

Теорема доказана.

1. *Березанский Ю. М.* Интегральное представление положительно определенных функционалов типа Уайтмана // Укр. мат. журн.— 1967.— **19**, № 1.— С. 89—95.
2. *Березанский Ю. М.* Представление функционалов типа Вайтмана посредством континуальных интегралов // Функцион. анализ и его прил.— 1969.— **3**, вып. 2,— С. 1—18.
3. *Самойленко Ю. С.* Матричные ядра типа функционалов Уайтмана // Методы функцион. анализа в задачах мат. физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971.— С. 201—254.
4. *Корсунский Л. М., Самойленко Ю. С.* Интегральные представления инвариантных эрмитовых функционалов // Укр. мат. журн.— 1970.— **22**, № 1.— С. 91—96.
5. *Реберг Й.* Теорема представления для четыреточечных функционалов в аксиоматической теории квантованных полей.— Берлин, 1986.— (Препринт).
6. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М. : Наука, 1967.— 424 с.
7. *Йост Р.* Общая теория квантованных полей.— М. : Мир, 1967.— 236 с.

Ин-т математики АН ГДР, Берлин
Получено 08.09.87

в) $\operatorname{supp} T^2_{j,y} \subset \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$;

г) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j,y} = -\lim\limits_{t\to-\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j,y} = h_{j,y}\cdot\alpha_y$, *где* α_y — *каноническая мера на алгебраическом компактном многообразии* $\Omega_{m_0} \cap (y - \Omega_{m_0})$.

Пусть $E_j = \{y/T^{1,1}_{j,y} = 0$ и $h_{j,y} = 0$ на крит $(y)\}$, Q_j — проектор в $L^2(V^+, \rho_j, C^{\nu(j)}$, который определен как оператор умножения на характеристическую функцию множества E_j, $P = \sum\limits_j Q_j P_j$.

Чтобы доказать 1 теоремы, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $j \lim\limits_{t\to\pm\infty} Q_j P_j A(e^{itM} f) A(e^{itM} g)\omega = 0$. (Существование предела вытекает из теоремы Хаага — Рюэля.) По теореме Риса — Фишера можно вычислять этот предел поточечно. Очевидно, из определения проекторов Q_j и свойства г) имеем $\lim\limits_{t\to\pm\infty} Q_i P_i A(e^{itM} f) A e^{itM} g)\omega(y) = T^{1,2}_{j,y}(e^{itM(y-\cdot)} f(y-\cdot) \times \times g) = 0$ для каждого $y \in V^+$, что доказывает 1. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} A(e^{itM} f) A(e^{itM} g)\omega = \lim\limits_{t\to\pm\infty}(1-P) A(e^{itM} f) A(e^{itM} g)\omega = A^{\text{out}}_{(\text{in})}(f) A^{\text{out}}_{(\text{in})}(g)\omega$. Легко доказать, что $w - \lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{itM(y-\cdot)} T_{j,y}$ равняется распределениям, которые соответствуют out- и in-полям (out- и in-поля унитарно эквивалентны свободному полю [7]). Неприводимые компоненты и кратности соответствующего представления $\mathfrak{A}_2^{\text{free}}$ свободного поля известны все неприводимые представления, принадлежащие массам $m > 2m$ с четным спином кратности один. Поэтому, для каждого $y \in \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$ и каждого четного s существует только один индекс j_1 такой, что

$$u(j_1) = 2s + 1, \lim_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} (T^{1,1}_{j,y} + T^{1,2}_{j,y}) \neq 0$$

и только один индекс j_2 такой, что $u(j_2) = 2s + 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} (T^{1,1}_{j,y} + T^{1,2}_{j,y}) \neq 0$. В силу $e^{itM(y-\cdot)} T^{1,1}_{j,y} + T^{1,1}_{j,y}$ и предложения 1г следует, что это возможно лишь в двух случаях:

1) для фиксированного четного числа s и $y \in \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$ существует один и только один индекс j_2 такой, что $\nu(j) = 2s + 1$ и

$$T^{1,1}_{j,y} \neq \pm \lim_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j,y} = \pm h_{j,y}\cdot d_y;$$

2) для каждого четного s и $y \in \bigcup\limits_{m>2m_0} \Omega_m$ существует два и только два индекса j_1 и j_2 такие, что $\nu(j_1) = \nu(j_2) = 2s + 1$ и

$$\lim_{t\to\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j_1,y} = T^{1,1}_{j_1,y} \neq 0, \quad \lim_{t\to-\infty} e^{itM(y-\cdot)} T^{1,2}_{j_2,y} = T^{1,1}_{j_2,y} \neq 0.$$

Теорема доказана.

1. *Березанский Ю. М.* Интегральное представление положительно определенных функционалов типа Уайтмана // Укр. мат. журн.— 1967.— **19**, № 1.— С. 89—95.
2. *Березанский Ю. М.* Представление функционалов типа Вайтмана посредством континуальных интегралов // Функцион. анализ и его прил.— 1969.— **3**, вып. 2,— С. 1—18.
3. *Самойленко Ю. С.* Матричные ядра типа функционалов Уайтмана // Методы функцион. анализа в задачах мат. физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971.— С. 201—254.
4. *Корсунский Л. М., Самойленко Ю. С.* Интегральные представления инвариантных эрмитовых функционалов // Укр. мат. журн.— 1970.— **22**, № 1.— С. 91—96.
5. *Реберг Й.* Теорема представления для четыреточечных функционалов в аксиоматической теории квантованных полей.— Берлин, 1986.— (Препринт).
6. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М. : Наука, 1967.— 424 с.
7. *Йост Р.* Общая теория квантованных полей.— М. : Мир, 1967.— 236 с.

Ин-т математики АН ГДР, Берлин
Получено 08.09.87