УДК 519.21

С. А. Мельник

Линеаризация управляемых эволюционных стохастических систем в гильбертовом пространстве

Рассмотрена задача управления решением нелинейного эволюционного стохастич уравнения в гильбертовом пространстве. Показано, что в малой окрестности нуля нел ная задача может быть приближена линейно-квадратичной. Получено соотношение, ı ляющее продолжить ε-оптимальную цену за пределы указанной окрестности.

Розглянута задача керування розв'язком нелінійного еволюційного стохастичного рі ня у гільбертовому просторі. Показано, що в малому околі нуля нелінійна задача мож наближена лінійно-квадратичною. Одержано співвідношення, яке дозволяє продо ε-оптимальну ціну за межі вказаного околу.

В настоящей статье рассматривается задача управления решением нелі ного эволюционного стохастического уравнения в гильбертовом прос стве с функционалом стоимости интегрального типа. Метод построения тимального управления состоит в следующем: выпуская систему из п вольной начальной точки, не противоречащей условиям существован единственности решения, ожидаем попадания процесса в малую ε-ок ность нуля. В указанной окрестности нелинейная задача приближаетс нейно-квадратичной, после чего ε-оптимальное управление для исхо задачи находится как точка минимума некоторого функционала.

Пусть заданы $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — полное вероятностное пространство (ределенным на нем неубывающим потоком σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\}$, дейс тельные сепарабельные рефлексивные гильбертовы пространства V E, U и сопряженные к ним, причем справедливы вложения $V \subset H \equiv$ $\subset V^*$ и V плотно в H в норме H.

Введем обозначения: $\|\cdot\|_X$ и $(\cdot,\cdot)_X$ — норма и скалярное произ ние в пространстве $X \in \{V, H, E, U\}$, $\|\cdot\|$ — норма линейного опера $|||\cdot|||_X^2 = M\|\cdot\|_X^2$, «$v^*, v$» — значение функционала $v^* \in V^*$ на $v \in V$, w винеровский процесс относительно $\mathscr{F}_t$ со значениями в E, ядерным метричным неотрицательным ковариационным оператором Q и характ тикой $\langle w\rangle_t = \operatorname{tr} Qt$, $\mathscr{L}_Q(E, H)$ — пространство линейных операторов Ф реводящих $Q^{1/2}E$ в H, таких, что $\Phi Q^{1/2}$ — оператор Гильберта — Шм $\|\cdot\|_Q$ — норма в $\mathscr{L}_Q(E, H)$.

Пусть при каждых $(t, v, u, \omega) \in [0, +\infty) \times V \times U \times \Omega$ $A(t, v, u, \omega)$ $B(t, v, u, \omega) \in \mathscr{L}_Q(E, H)$ и при каждых $v \in V$, $u \in U$ функции $A(t, v, u,$ $B(t, v, u, \omega)$ измеримы по (t, ω) и $\mathscr{F}_t$-согласованны, φ — $\mathscr{F}_0$-измер функция со значениями в H такая, что $|||\varphi|||_H < +\infty$.

Рассмотрим минимизационную задачу управления решением ур ния

$$\xi^u(t) = \varphi + \int_s^t A(r, \xi^u(r), u(r))\, dr + \int_s^t B(r, \xi^u(r), u(r))\, dw(r)$$

с функционалом стоимости

$$J(\xi^u, u) = M \int_s^{+\infty} F(r, \xi^u(r), u(r))\, dr. \tag{2}$$

Здесь (1) понимается как равенство элементов в V^*.

Обозначим через $\mathcal{U}$ множество линейно ограниченных липшицевых функционалов $u(t, v)$, определенных на $[0, +\infty) \times H \times \Omega$, которые при любом $v \in H$ являются неупреждающими функциями, принимающими значения в $L_2([0, +\infty), \Omega, U)$. Элементы $\mathcal{U}$ будем называть допустимыми управлениями.

Полагаем, что для коэффициентов уравнения (1) с вероятностью 1 при любом $t \geqslant 0$, любых $v, v_1, v_2 \in V$, $u, u_1, u_2 \in U$ и некоторых положительных константах C и α выполняются следующие условия:

1) функция «$A(t, v_1 + \lambda v_2, u), v$» непрерывна по λ на R^1;

2) $2\langle\langle A(t, v, u), v\rangle\rangle + \| B(t, v, u)\|_Q^2 + \alpha \| v\|_V^2 \leqslant -C(1 + \| v\|_H^2 + \| u\|_U^2)$;

3) $\| A(t, v, u)\|_{V^*}^2 \leqslant C(1 + \| v\|_V^2 + \| u\|_U^2)$;

4) $2\langle\langle A(t, v_1, u_1) - A(t, v_2, u_2), v_1 - v_2\rangle\rangle + \| B(t, v_1, u_1) - B(t, v_2, u_2)\|_Q^2 \leqslant$ $\leqslant C(\| v_1 - v_2\|_H^2 + \| u_1 - u_2\|_V^2)$;

5) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что в шаре $S_\varepsilon = \{v \in H : \| v\|_H < \varepsilon\}$ имеют место разложения

$$A(t, \xi, u) = A_1(t)\xi + A_2(t) u + \tilde{A}(t, \xi, u),$$

$$B(t, \xi, u) = B_1(t)\xi + B_2(t) u + \tilde{B}(t, \xi, u),$$

$$F(t, \xi, u) = (F_1(t)\xi, \xi)_H + (F_2(t) u, u)_U + \tilde{F}(t, \xi, u),$$

где

$$A_1 \in L_\infty([0, +\infty), \quad \mathcal{L}(V, V^*)), \quad A_2 \in L_\infty([0, +\infty), \quad \mathcal{L}(U, V^*)),$$

$$B_1 \in L_\infty([0, +\infty), \quad \mathcal{L}(V, \mathcal{L}_Q(E, H))), \quad B_2 \in L_\infty([0, +\infty), \quad \mathcal{L}(U, \mathcal{L}_Q(E, H))),$$

$$F_1 \in L_\infty([0, +\infty), \quad \mathcal{L}(H, H)), \quad F_2 \in L_\infty([0, +\infty), \quad \mathcal{L}(U, U));$$

6) $2\langle\langle A_1(t) v, v\rangle\rangle + 2\langle\langle A_2(t) u, v\rangle\rangle + \| B_1(t) v + B_2(t) u\|_Q^2 \leqslant C(\| v\|_H^2 +$ $+ \| u\|_U^2)$;

7) $\| A_1(t) v\|_{V^*}^2 \leqslant C\| v\|_V^2$, $\| A_2(t) u\|_{V^*}^2 \leqslant C\| u\|_U^2$;

8) $(F_1(t) v, v)_H \geqslant \nu_1 \| v\|_H^2$, $(F_2(t) u, u)_U \geqslant \nu_2 \| u\|_M^2$, $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$;

9) $\delta_1(t)\| v\|_H^2 \leqslant \tilde{F}(t, v, u) \leqslant \delta_2(t)(\| v\|_H^2 + \| u\|_U^2)$, где $\delta_2(t) \geqslant 0$ и $\int_0^{+\infty} \delta_2(t) \times$ $\times\, dt < +\infty$, $\delta_1(t)$ — функция произвольного знака, $\int_0^{+\infty} \delta_1(t)\, dt < +\infty$;

10) $\int_0^{+\infty} \| F_1(t)\|\, dt < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \| F_2(t)\|\, dt < +\infty.$

Условия 1—4 обеспечивают существование и единственность решения уравнения (1) [1, теоремы 2.1—2.3 гл. II].

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим задачу управления линеаризованной системой

$$\eta^u(t) = \varphi + \int_s^t [A_1(r)\eta^u(r) + A_2(r) u(r)]\, dr + \int_s^t [B_1(r)\eta^u(r) + B_2(r) u(r)]\, dw \tag{3}$$

с квадратичным функционалом стоимости

$$\bar{J}(\eta^u, u) = M \int_s^t [(F_1(r), \eta^u(r) \ \ \eta^u(r))_H + (F_2(r) u(r), u(r))_U]\, dr. \tag{4}$$

Условия 6, 7 обеспечивают существование и единственность решения уравнения (3).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 1—4. *Тогда при любых* $\varphi \in H$ *и* $s \in [0, +\infty)$ *существует конечный с вероятностью* 1 *момент времени* τ, *начиная с которого процесс* $\xi^u(t)$ *принадлежит шару* S_ε.

Доказательство. По формуле Ито для квадрата нормы с вероятностью 1 при любом $t \geqslant s$ справедливо равенство

$$\|\xi^u(t)\|_H^2 = \|\varphi\|_H^2 + 2\int_s^t \langle\langle A(r, \xi^u(r), u(r)), \xi^u(r)\rangle\rangle\, dr + \int_s^t \|B(r, \xi^u(r),$$

$$u(r))\|_Q^2 dr + 2\int_s^t B(r, \xi^u(r), u(r))\,\xi^u(r)\, dw. \tag{5}$$

Из условия 2 вытекает, что $\forall t$ с вероятностью 1 величина $2\langle\langle A(t, v, u), v\rangle\rangle + \|B(t, v, u)\|_Q^2$ неположительна, тогда $\|\xi^u(t)\|_H^2$ — неотрицательный супермартингал. После взятия математического ожидания от обеих частей (5) и применения условия 2 приходим к неравенству

$$|||\xi^u(t)|||_H^2 + \alpha\int_s^t |||\xi^u(r)|||_V^2 dr \leqslant |||\varphi|||_H^2 - C\int_s^t (1 + |||\xi^u(r)|||_H^2 + |||u|||_U^2)\, dr,$$

из которого после применения леммы Гроноулла получим

$$|||\xi^u(t)|||_H^2 \leqslant e^{-C_1(t-s)}\left(|||\varphi|||_H^2 - C_1 - C_1\int_s^t |||u(r)|||_U^2 dr\right). \tag{6}$$

При $t \to +\infty$ правая часть (6) стремится к нулю и при любом значении $|||\varphi|||_H^2$ найдется такое t, что $|||\xi^u(t)|||_H^2 < \varepsilon$. Поскольку $\|\xi^u(t)\|_H^2$ — неотрицательный супермартингал, то из того, что $|||\xi^u(t)|||_H^2 \to 0$ при $t \to +\infty$ следует $\|\xi^u(t)\|_H^2 \to 0$ с вероятностью 1 при $t \to +\infty$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* 6, 7 *и* $\|u(r, v)\|_U^2 \leqslant C\|v\|_H^2$. *Тогда найдется неотрицательная константа C такая, что* $|||\eta^u(t)|||_H^2 \leqslant C|||\varphi|||_H^2$.

Доказательство заключается в последовательном применении к $\|\eta^u(t)\|\|_H^2$ формулы Ито и леммы Гроноулла. Обозначим через $\tilde{v}(s, \varphi)$ и $\tilde{u}$ оптимальную цену и оптимальное управление для задачи (1), (2), а через $\bar{v}(s, \varphi)$ и $\bar{u}$ — оптимальную цену и оптимальное управление для задачи (3), (4).

Лемма 3. *Пусть* $|||\varphi|||_H^2 < \varepsilon$ *и выполнены условия* 5, 8—10. *Тогда*

$$-\varepsilon\int_s^{+\infty} [\delta_1(r) + \|F_1(r)\|]\, dr \leqslant J(\xi^{\tilde{u}}, \tilde{u}) - \bar{J}(\eta^{\bar{u}}, \bar{u}) \leqslant \varepsilon\int_s^{+\infty} [(1 + C)\,\delta_2(r) +$$

$$+ \|F_1(r)\|]\, dr.$$

Доказательство. Если $J(\xi^{\tilde{u}}, \tilde{u}) - \bar{J}(\eta^{\bar{u}}, \bar{u}) < 0$, то

$$J(\xi^{\tilde{u}}, \tilde{u}) - \bar{J}(\eta^{\bar{u}}, \bar{u}) \geqslant J(\xi^{\tilde{u}}, \tilde{u}) - \bar{J}(\eta^{\tilde{u}}, \tilde{u}) = J(\xi^{\tilde{u}}, \tilde{u}) - \bar{J}(\xi^{\tilde{u}}, \tilde{u}) +$$

$$+ \bar{J}(\xi^{\tilde{u}}, \tilde{u}) - \bar{J}(\eta^{\tilde{u}}, \tilde{u}) = M\int_s^{+\infty} \tilde{F}(r, \xi^{\tilde{u}}(r), \tilde{u}(r))\, dr + M\int_s^{+\infty} (F_1(r)(\xi^{\tilde{u}}(r) -$$

$$- \eta^{\tilde{u}}(r)), (\xi^{\tilde{u}}(r) + \eta^{\tilde{u}}(r)))_H dr \geqslant -\varepsilon\int_s^{+\infty} [\delta_1(r) + \|F_1(r)\|]\, dr.$$

Если же указанная разность положительна, то

$$J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) - \bar J(\eta^{\bar u}, \bar u) \leqslant J(\xi^{\bar u}, \bar u) - \bar J(\eta^{\bar u}, \bar u) = J(\xi^{\bar u}, \bar u) - \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) +$$

$$+ \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) - \bar J(\eta^{\bar u}, \bar u) = M \int_s^{+\infty} [\tilde F(r, \xi^{\bar u}(r), \bar u(r)) + (F_1(r)(\xi^{\bar u}(r) - \eta^{\bar u}(r)),$$

$$(\xi^{\bar u}(r) + \eta^{\bar u}(r))_H] dr \leqslant \varepsilon \int_s^{+\infty} [(1 + C)\delta_2(r) + \| F_1(r) \|] dr.$$

Лемма 4. *При условиях леммы 3 справедливы неравенства*

$$-\varepsilon \int_s^{+\infty} [\delta_1(r) + 2 \| F_1(r) \|] dr \leqslant J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) - \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) \leqslant \varepsilon (1 + C) \int_s^{+\infty} \delta_2(r) dr.$$

Доказательство. Оценка сверху

$$J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) - \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) \leqslant J(\xi^{\bar u}, \bar u) - \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) = M \int_s^{+\infty} \tilde F(r, \xi^{\bar u}(r), \bar u(r)) dr \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon (1 + C) \int_s^{+\infty} \delta_2(r) dr.$$

Оценка снизу

$$J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) - \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) = J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) - \bar J(\eta^{\bar u}, \bar u) + \bar J(\eta^{\bar u}, \bar u) - \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) = J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) -$$

$$- \bar J(\eta^{\bar u}, \bar u) + M \int_s^{+\infty} (F_1(r)(\xi^{\bar u}(r) + \eta^{\bar u}(r)), \eta^{\bar u}(r) - \xi^{\bar u}(r))_H dr \geqslant - \varepsilon \int_s^{+\infty} [\delta_1(r) +$$

$$+ 2 \| F_1(r) \|] dr.$$

Последнее неравенство следует из леммы 1.

Лемма 5. *При условиях леммы 3 справедливы неравенства*

$$0 \leqslant J(\xi^{\bar u}, \bar u) - J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) \leqslant \varepsilon \int_s^{+\infty} [(1 + C)\delta_2(r) - \delta_1(r) + 2 \| F_1(r) \|] dr$$

Доказательство. Неотрицательность разности вытекает из оптимальности $\tilde u$. Докажем правое неравенство

$$J(\xi^{\bar u}, \bar u) - J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) \leqslant J(\xi^{\bar u}, \bar u) - \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) + \bar J(\xi^{\bar u}, \bar u) - \bar J(\eta^{\bar u}, \bar u) + \bar J(\eta^{\tilde u}, \tilde u) -$$

$$- \bar J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) + \bar J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) - J(\xi^{\tilde u}, \tilde u) = M \int_s^{+\infty} [\tilde F(r, \xi^{\bar u}, \bar u) + (F_1(r)(\xi^{\bar u}(r) -$$

$$- \eta^{\bar u}(r)), \xi^{\bar u}(r) + \eta^{\bar u}(r))_H + \tilde F(r, \xi^{\tilde u}, \tilde u) - (F_1(r)(\xi^{\tilde u} - \eta^{\tilde u}), \xi^{\tilde u} + \eta^{\tilde u})_H] dr \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_s^{+\infty} [(1 + C)\delta_2(r) - \delta_1(r) + 2 \| F_1(r) \|] dr.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1—10. *Тогда оптимальная цена управления нелинейной системой* (1), (2) *имеет вид*

$$\tilde v(s, \varphi) = \inf_{u \in \mathcal{U}} M \Big\{ (\varphi, R(s)\varphi)_H + \varepsilon + \int_s^{\tau} [(\xi^u(r), R(r)\xi^u(r))_H +$$

$$+ 2\langle\langle A(r, \xi^u, u), R(r)\xi^u \rangle\rangle + F(r, \xi^u, u) + (B(r, \xi^u, u), R(r) B(r, \xi^u, u))_Q] dr.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \notin S_\varepsilon$. Согласно лемме 1 момент τ достижения процессом $\xi(t)$ шара S_ε с вероятностью 1 конечен и $\xi^u(\tau) \in S_\varepsilon$. В соответствии с принципом Беллмана и леммой 3

$$\tilde{v}(s,\varphi)=\inf_{u\in\mathcal{U}} M\int_s^{+\infty}F(r,\xi^u(r),u(r))\,dr=\inf_{u\in\mathcal{U}} M\left\{\int_s^{\tau}F(r,\xi^u(r),u(r))\,dr+\right.$$

$$\left.+\tilde{v}(\tau,\xi^u(\tau))\right\}=\inf_{u\in\mathcal{U}} M\left\{\int_s^{\tau}F(r,\xi^u(r),u(r))\,dr+\bar{v}(\tau,\xi^u(\tau))+\varepsilon\right\}. \qquad (7)$$

Как известно из теории управления линейными системами с квадратичным критерием качества, имеет место представление

$$\bar{u}(\tau,\xi^u(\tau))=(R(\tau)\,\xi^u(\tau),\xi^u(\tau))_H,$$

где $R(t)$ — решение соответствующего уравнения Риккати. Применив к последнему выражению формулу Ито [2, с. 20], получим следующее разложение:

$$\bar{v}(\tau,\xi^u(\tau))=(R(s)\,\varphi,\varphi)_H+\int_s^{\tau}\left[\left(\frac{dR(r)}{dr}\,\xi^u(r),\xi^u(r)\right)_H+2\langle\langle A(r,\xi^u,u),R(r)\xi^u\rangle\rangle+\right.$$

$$\left.+(B(r,\xi^u,u),R(r)\,B(r,\xi^u,u))_Q\right]dr+2\int_s^{\tau}(R(r)\,\xi^u(r),B(r,\xi^u,u)\,dw(r))_H.$$

Подставляя в (7) последнее соотношение, получаем утверждение теоремы. Если $\varphi\in S_\varepsilon$, то $s=\tau$ и утверждение теоремы вытекает из леммы 3. Теорема доказана.

Отличие полученных результатов от традиционных состоит в том, что соотношение в теореме не является уравнением и позволяет, зная ε-оптимальную цену в окрестности нуля, продолжить ее за пределы этой окрестности.

1. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики / ВИНИТИ.— 1979, **14.**— С. 71—147.
2. *Pardoux E.* Equations aux dérivées partielles stochastiques nonlinéaires monotones // Thèse ... doct. sci. math.— Paris, 1975.— 236 p.

Донец. ун-т

Получено 04.07.88