УДК 519.21

В. И. Масол

О случайных двоичных последовательностях с заданным числом ступеней

Изучаются избранные статистики случайной n-мерной двоичной последовательности, состоящей из m_0 нулей, m_1 единиц, $m_0 + m_1 = n$, и k ступеней при различных ограничениях на m_0, m_1, k.

Вивчаються вибрані статистики випадкової n-мірної двійкової послідовності, яка складається з m_0 нулів, m_1 одиниць, $m_0 + m_1 = n$, і k східців при різних обмеженнях на m_0, m_1, k.

Пусть $\Omega(k, m_0, m_1)$ — множество двоичных последовательностей, каждая из которых содержит m_0 нулей, m_1 единиц, $m_0 + m_1 = n$, k ступеней. Ступень n-мерного (0, 1)-вектора f — это пара $(i, i+1)$, $i = \overline{1, n-1}$, такая, что $f(i) > f(i+1)$, где $f(\nu)$ — компонента вектора f, $1 \leqslant \nu \leqslant n$. В настоящей статье изучается асимптотическое поведение при $n \to \infty$ некоторых статистик последовательности, случайно извлекаемой из $\Omega(k, m_0, m_1)$, а также устанавливаются соотношения, позволяющие вычислять мощности подмножеств введенного множества, каждый элемент которых обладает заданным признаком (например, фиксированным числом инверсий, главным индексом). Всюду далее $m_0 \geqslant k$, $m_1 \geqslant k$, $k \geqslant 1$.

1. Инверсией n-мерного (0,1)-вектора f называется пара (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$, такая, что $f(i) > f(j)$. Пусть $N(I, k, m_0, m_1)$ — число двоичных последовательностей, каждая из которых содержит I инверсий, k ступеней, m_0 нулей, m_1 единиц. Находим

$$N(I, k, m_0, m_1) = \sum_{\nu=1}^{n-2k+1} \sum_{\alpha+\beta=\nu-1} N(I-(m_0-\alpha)(\beta+1),\ k-1,\ m_0-\alpha-1,\ m_1-\beta-1),$$

где $N(I, 0, a, b) = \{1,$ если $I = 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 0 — в противном случае$\}$, здесь и в дальнейшем α, β — целые числа, $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. При вычислении $N(I, k, m_0, m_1)$ можно использовать следующее легко проверяемое соотношение: $N(I, k, m_0, m_1) = N(I, k, m_0', m_1')$, где $m_0' = m_1$, $m_1' = m_0$.

Обозначим через ξ_{kn} число инверсий двоичной последовательности, извлеченной случайно и равновероятно из множества $\Omega(k, m_0, m_1)$. Используя равенство [1]

$$|\Omega(k, m_0, m_1)| = C_{m_0}^k C_{m_1}^k, \tag{1}$$

нетрудно доказать лемму 1.

Лемма 1. *Для $t \in (-\infty, \infty)$ математическое ожидание случайной величины ξ_{kn}^t удовлетворяет соотношению*

$$M\xi_{kn}^t = (C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \sum \Big(\sum_{i=1}^{k} (1+\gamma_i)(k-i+1+\delta_i+\delta_{i+1}+\ldots+\delta_k) \Big)^t, \tag{2}$$

де Σ обозначает суммирование по всем решениям в целых неотрицательных числах уравнений $\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_k = m_1-k$, $\delta_0+\delta_1+\ldots+\delta_k = m_0-k$.

Для обозначения сходимости по распределению случайного вектора $(\zeta_{1n}, \ldots, \zeta_{mn})$ к случайному вектору $(\zeta_{10}, \ldots, \zeta_{m0})$ при $n \to \infty$, т. е. $F_n(x_1, \ldots, x_m) \to F_0(x_1, \ldots, x_m)$, $n \to \infty$, во всех точках $(x_1, \ldots, x_m)$ непрерывности предельной функции F_0, где F_ν — функция распределения случайного вектора $(\zeta_{1\nu}, \ldots, \zeta_{m\nu})$, $\nu \geqslant 0$, примем запись

$$(\zeta_{1n}, \ldots, \zeta_{mn}) \xrightarrow{d} (\zeta_{10}, \ldots, \zeta_{m0}), \quad n \to \infty,$$

в которой при $m = 1$ круглые скобки будут опускаться.

Теорема 1. *Если при $n \to \infty$, $m_0 \to \infty$, $m_1 \to \infty$, $k \to q$, то $(m_0 m_1)^{-1}\xi_{kn} \xrightarrow{d} \xi_q$, $n \to \infty$, где ξ_q — случайная величина, однозначно определяемая своими моментами*

$$M\xi_q^\alpha = q!\,((\alpha+q)\,C_{\alpha+q}^\alpha)^{-1} \sum (-1)^{\alpha-Q} \Big(\prod_{j=1}^{q} \mu_j!/\nu_{j1}! \ldots \nu_{jj}! \Big) \times$$
$$\times \Big(\prod_{r=0}^{q-2} \Big(\sum_{j=q-r}^{q} \nu_{jq-r} \Big)! \Big) / (\alpha+q-1-Q)!, \tag{3}$$

$Q = \nu_{11} + \ldots + \nu_{q1}$, Σ обозначает суммирование по всем решениям в целых неотрицательных числах уравнений $\mu_1 + \ldots + \mu_q = \alpha$, $\nu_{j1}+\ldots+\nu_{jj} = \mu_j$, $j = \overline{1, q}$; q — целое число.

Доказательство. Используя лемму 1, находим $(m_0 m_1)^{-\alpha} M\xi_{kn}^\alpha \to M\xi_q^\alpha$, $n \to \infty$, где $M\xi_q^\alpha$ удовлетворяет соотношению (3). Поскольку ряд $\sum_{\alpha=0}^{\infty} u^\alpha M\xi_q^\alpha/\alpha!$ имеет ненулевой радиус сходимости, то последовательность моментов $M\xi_q^\alpha$, $\alpha = 0, 1, \ldots$, однозначно определяет закон распределения вероятностей [2, с. 231].

2. Главным индексом двоичной последовательности $f \in \Omega(k, m_0, m_1)$ называется число $D = \sum_{i=1}^{n-1} i\chi(f(i) > f(i+1))$, $\chi(E)$ — индикатор события E: $\chi(E) = 1$, если событие E выполняется, $\chi(E) = 0$ — в противном случае. Пусть $\Omega(D, k, m_0, m_1)$ — множество двоичных последовательностей, главный индекс каждой из которых равен D, $\Omega(D, k, m_0, m_1) \subseteq \Omega(k, m_0, m_1)$, $N(D, k, m_0, m_1) = |\Omega(D, k, m_0, m_1)|$. Тогда

$$N(D, k, m_0, m_1) = \sum \sum_{\alpha+\beta=\nu-1} N(D - \nu k - k + 1, k - 1,$$

$$m_0 - \alpha - 1,\ m_1 - \beta - 1),$$

где внешнее суммирование осуществляется по ν, $1 \leqslant \nu \leqslant \min(n - 2k + 1, [(D - [k/2]^2 - k + 1)/k])$, $N(D, 0, a, b) = \{1$, если $D = 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 0 — в противном случае$\}$. Нетрудно проверить равенство $N(D, k, m_0, m_1) = N(D, k, m_0', m_1')$, где $m_0' = m_1$, $m_1' = m_0$.

Обозначим через ζ_{kn} главный индекс двоичной последовательности, извлеченной случайно и равновероятно из $\Omega(k, m_0, m_1)$.

Лемма 2. *Для* $t \in (-\infty, \infty)$, $M\zeta_{kn}^t = (C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \sum \left(k^2 + \sum_{j=0}^{k-1} (k - j)\, \delta_j + \sum_{i=1}^{k} (k - i + 1)\, \gamma_i\right)^t$, *где* Σ — *суммирование, определенное в* (2).

Лемма 2 может быть использована при доказательстве теоремы 2.

Теорема 2. *Если при* $n \to \infty$, $m_0 \to \infty$, $m_1 \to \infty$, $n^{-1} m_0 \to a$, $k \to q$, *то* $n^{-1}\zeta_{kn} \xrightarrow{d} \zeta_q$, $n \to \infty$, *где* ζ_q — *случайная величина, однозначно определяемая своими моментами: для целых* $t \in [0, \infty)$

$$M\zeta_q^t = t!\,(q!)^2 \sum_{\alpha+\beta=t} a^\alpha (1 - a)^\beta T_{\alpha,q} T_{\beta,q} ((\alpha + q)!\ (\beta + q)!)^{-1},$$

$$T_{\alpha,q} = \sum_{\nu=0}^{\alpha} q^\nu T_{\alpha-\nu, q-1}, \quad T_{\alpha,1} \equiv 1.$$

3. Пусть $\Omega(l_{\max}, k, m_0, m_1)(\Omega(l_{\min}, k, m_0, m_1))$ — подмножество множества $\Omega(k, m_0, m_1)$, состоящее из тех и только тех $(0, 1)$-векторов, у каждого из которых максимальная (минимальная) единичная серия имеет длину $l_{\max}(l_{\min})$; $N(L, k, m_0, m_1) = |\Omega(L, k, m_0, m_1)|$, $L \in \{l_{\max}, l_{\min}\}$. Тогда

$$N(l_{\max}), k, m_0, m_1) = \sum_{\nu=1}^{n-2k+1} \sum_{\alpha+\beta=\nu-1} \Big\{\chi(\beta \leqslant l_{\max} - 2)\, N(l_{\max}, k - 1,$$

$$m_0 - \alpha - 1,\ m_1 - \beta - 1) + \chi(\beta = l_{\max} - 1) \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{l_{\max}} N(l_{\max} - j, k - 1, m_0 - \alpha - 1, m_1 - \beta - 1)\Big\},$$

$N(l_{\max}, 0, a, b) = \{1$, если $l_{\max} = b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 0 — в противном случае$\}$,

$$N(l_{\min}, k, m_0, m_1) = \sum \sum_{\alpha+\beta=\nu-1} \Big\{\chi(\beta \geqslant l_{\min})\, N(l_{\min}, k - 1, m_0 - \alpha - 1,$$

$$m_1 - \beta - 1) + \chi(\beta = l_{\min} - 1) \Big[N(0,\ k - 1,\ m_0 - \alpha - 1,\ m_1 - \beta - 1) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m_1 - 2l_{\min}} N(l_{\min} + j, k - 1, m_0 - \alpha - 1, m_1 - \beta - 1)\Big]\Big\},$$

где внешнее суммирование осуществляется по ν, $1 \leqslant \nu \leqslant n-k-(k-1)l_{\min}$, $N(l_{\min}, 0, a, b) = \{1$, если $l_{\min} = b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; 0 — в противном случае$\}$.

Обозначим через $\eta_{kn}^{(1)}$ $(\eta_{kn}^{(2)})$ длину наибольшей (наименьшей) серии из единиц в (0, 1)-векторе, извлеченном случайно и равновероятно из $\Omega(k, m_0, m_1)$.

Лемма 3. *Для* $t \in (-\infty, \infty)$

$$M(\eta_{kn}^{(1)})^t = (m_1 - k + 1)^t - (C_{m_1}^k)^{-1} \sum ((m_1 - k - x + 1)^t - (m_1 - k - x)^t) R(m_1 - k - x),$$

где суммирование осуществляется по x, $0 \leqslant x \leqslant m_1 - k - 1 - [(m_1 - k)/(k+1)]$, $R(m_1 - k - x)$ — *число решений уравнения* $\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_k = m_1 - k$ *в целых неотрицательных числах при ограничениях* $\gamma_0 \leqslant m_1 - k - x$, $\gamma_i \leqslant m_1 - k - x - 1$, $i = \overline{1, k}$.

Лемма 4. *Для* $t \in (-\infty, \infty)$

$$M(\eta_{kn}^{(2)})^t = (C_{m_1}^k)^{-1} \Big(\sum_j (j^t - (j-1)^t) H(j) + \sum_\nu (\nu^t - (\nu-1)^t) S(\nu) \Big),$$

где суммирование осуществляется по j, $1 \leqslant j \leqslant [(m_1 - k)/(k+1)] + 1$, *и* ν, $1 \leqslant \nu \leqslant [(m_1 - k)/k] + 1$, $H(j)(S(\nu))$ — *число решений уравнения* $\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_k = m_1 - k$ $(\delta_1 + \ldots + \delta_k = m_1 - k)$ *в целых неотрицательных числах с ограничениями* $\gamma_0 \geqslant j$, $\gamma_i \geqslant j - 1$ $(\delta_i \geqslant \nu - 1)$, $i = \overline{1, k}$.

Замечание. Явный вид чисел $R(\cdot)$, $H(\cdot)$, $S(\cdot)$, фигурирующих в леммах 3 и 4, может быть получен с помощью равенства (3.22) из [3, с. 215].

Леммы 3 и 4 с учетом замечания позволяют сформулировать теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Если при* $n \to \infty$, $m_1 \to \infty$, $k \to q$, *то* $m_1^{-1}\eta_{kn}^{(1)} \xrightarrow{d} \eta_q^{(1)}$, $n \to \infty$, *где* $\eta_q^{(1)}$ — *случайная величина, однозначно определяемая своими моментами*

$$M(\eta_q^{(1)})^\alpha = 1 - (-1)^{\alpha+q}\alpha(q+1)^{-1} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} (-1)^\nu C_{\alpha-1}^\nu (C_{q+\alpha-\nu}^{q+1})^{-1} \times \sum_{\mu=2}^{q+1} (-1)^\mu C_{q+1}^\mu \mu^q (1 - \mu^{-1})^{q+\alpha-\nu}.$$

Теорема 4. *В условиях теоремы 3* $m_1^{-1}\eta_{kn}^{(2)} \xrightarrow{d} \eta_q^{(2)}$, $n \to \infty$, *где* $\eta_q^{(2)}$ — *случайная величина, однозначно определяемая своими моментами* $M(\eta_q^{(2)})^\alpha = ((q+1)^\alpha C_{\alpha+q}^\alpha)^{-1}$.

4. Пусть из $\Omega(k, m_0, m_1)$ случайно и равновероятно извлечена последовательность f. Обозначим $\rho_{kn}^- = \min\{i : f(i) = 1\}$, $\rho_{kn}^+ = \max\{i : f(i) = 1\}$, $\rho_{kn} = \rho_{kn}^+ - \rho_{kn}^- + 1$.

Теорема 5. *Пусть* r *и* s — *целые числа*, $r, s \in [1, n]$. *Тогда*

$$P(\rho_{kn}^- = r) = C_{m_0 - r}^{k-1} / C_{m_0}^k, \tag{4}$$

$$P(\rho_{kn}^+ = s) = \begin{cases} 1 - km_1^{-1}, & s = n, \\ kC_{s-m_1}^{k-1} / m_1 C_{m_0}^k, & s < n, \end{cases} \tag{5}$$

$$P(\rho_{kn}^- = r, \ \rho_{kn}^+ = s) =$$

$$= \begin{cases} (1 - km_1^{-1}) P(\rho_{kn}^- = r), & s = n, \\ kC_{s-m_1-r}^{k-2}/m_1 C_{m_0}^k, & s < n, \quad k \geqslant 2, \\ 1/m_0 m_1, & s = r + m_1 - 1, \quad s < n, \quad k = 1, \\ 0, & s \neq r + m_1 - 1, \quad s < n, \quad k = 1; \end{cases} \tag{6}$$

$$P(\rho_{kn} = r) =$$

$$= \begin{cases} (k(n-r) m_1^{-1} C_{r-m_1-1}^{k-2} + (1 - km_1^{-1}) \quad C_{r-m_1-1}^{k-1})/C_{m_0}^k, & k \geqslant 2, \\ 1/m_1, \quad r = m_1, & k = 1, \\ (m_1 - 1)/m_0 m_1, \quad m_1 + 1 \leqslant r \leqslant n, & k = 1, \\ 0, \quad r < m_1, & k = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (4) достаточно заметить, что число $N(r, k, m_0, m_1)$ (0,1)-векторов $v \in \Omega(k, m_0, m_1)$, у каждого из которых $r = \min\{i : v(i) = 1\}$, удовлетворяет равенству

$$N(r, k, m_0, m_1) = \sum_{\beta=0}^{m_1-k} |\Omega(k-1, m_0 - r, m_1 - \beta - 1)|$$

и применить (1). Аналогично можно установить соотношения (5)—(7). Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть при* $n \to \infty$, $m_0^{-1} k \to \gamma_0$, $m_1^{-1} k \to \gamma_1$, $m_0 \to \infty$. *Тогда для целых фиксированных* $r \geqslant 1$ *и* $s \geqslant 0$ *при* $n \to \infty$

$$P(\rho_{kn}^- = r) \to \gamma_0 (1 - \gamma_0)^{r-1},$$

$$P(n - \rho_{kn}^+ = s) \to \{1 - \gamma_1, \ s = 0; \quad \gamma_1 \gamma_0 (1 - \gamma_0)^{s-1}, \ s \geqslant 1\},$$

$$P(\rho_{kn}^- = r, \ n - \rho_{kn}^+ = s) \to \{(1 - \gamma_1) \gamma_0 (1 - \gamma_0)^{r-1},$$

$$s = 0; \quad \gamma_1 \gamma_0^2 (1 - \gamma_0)^{s+r-2}, \quad s \geqslant 1\},$$

$$P(n - \rho_{kn} = s) \to \{(1 - \gamma_1) \gamma_0, \ s = 0;$$

$$\gamma_0 (1 - \gamma_0)^{s-1} (s \gamma_1 \gamma_0 + (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_0)), \ s \geqslant 1\},$$

где $0^0 = 1$.

Теорему 6 несложно доказать, используя теорему 5 и лемму 5.

Лемма 5. *При* $k \to \infty$ $\sum_{j=1}^{k-1} (m_0 - j)^{-1} = -(1 + O(k^{-1})) \ln (1 - (k - 1) m_0^{-1})$.

Теорема 7. *Если при* $n \to \infty$, $m_1^{-1} k \to \gamma_1$, $n^{-1} m_0 \to a$, $k \to q$, $m_0 \to \infty$, *то* $n^{-1} \rho_{kn} \xrightarrow{d} \rho_q$, $n \to \infty$, *где* ρ_q — *случайная величина, однозначно определяемая своими моментами*

$$M\rho_q^\alpha = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\alpha} (-a)^\nu C_\alpha^\nu / C_{q+\nu}^\nu, & a \in [0, 1), \\ q(\alpha + q)^{-1} \{\gamma_1 (q - 1)(q + \alpha + 1)^{-1} + 1 - \gamma_1\}, & a = 1. \end{cases}$$

Если при $n \to \infty$ *либо* $m_0 \not\to \infty$, *либо* $k \to \infty$, *то* $n^{-1} \rho_{kn} \xrightarrow{d} 1$, $n \to \infty$.

Теорема 8. *Если при* $n \to \infty$, $m_1^{-1} k \to \gamma_1$, $n^{-1} m_0 \to a$, $k \to q$, $m_0 \to \infty$, *то*

$$(\rho_{kn}^- / m_0, \ \rho_{kn}^+ / n) \xrightarrow{d} (\rho_q^-, \rho_q^+), \quad n \to \infty, \tag{8}$$

где (ρ_q^-, ρ_q^+) — *двумерный случайный вектор, однозначно определяемый своими моментами*

$$M(\rho_q^-)^\alpha (\rho_q^+)^\beta = (C_{q+\alpha}^\alpha)^{-1} + \gamma_1 \sum_{\nu=1}^{\beta} (-a)^\nu C_\beta^\nu (C_{q+\nu}^\nu C_{q+\nu+\alpha}^\alpha)^{-1}. \tag{9}$$

Если при $n\to\infty$ $k\to\infty$, *то*

$$(\rho_{kn}^-/m_0, \rho_{kn}^+/n) \xrightarrow{d} (0, 1), \quad n\to\infty. \tag{10}$$

Если при $n\to\infty$ $m_0\to m<\infty$, $k\to q$, *то*

$$(\rho_{kn}^-, \rho_{kn}^+/n) \xrightarrow{d} (\rho_q^-, 1), \quad n\to\infty, \tag{11}$$

где ρ_q^- — *случайная величина, однозначно определяемая своими моментами для* $t\in(-\infty,\infty)$

$$M(\rho_q^-)^t = \sum_{\nu=1}^{m-q+1} \nu^t C_{m-\nu}^{q-1}/C_m^q.$$

Доказательство теорем 7 и 8 основано на леммах 6 и 7.

Лемма 6. *Для* $t\in(-\infty,\infty)$

$$M\rho_{kn}^t = \Big(C_{m_1-1}^{k-1} \sum_{\delta=0}^{m_0-k} \sum_{\mu=0}^{m_0-k-\delta} (n-\delta-\mu+1)^t C_{m_0-\delta-\mu-2}^{k-2} +$$

$$+ C_{m_1-1}^k \sum_{\nu=0}^{m_0-k} (n-\nu)^t C_{m_0-\nu-1}^{k-1}\Big)/C_{m_0}^k C_{m_1}^k.$$

Лемма 7. *Для* $t, s\in(-\infty,\infty)$

$$M(\rho_{kn}^-)^t (\rho_{kn}^+)^s = \Big(C_{m_1-1}^{k-1} \sum_{\delta=1}^{m_0-k+1} \sum_{\mu=1}^{m_0-k-\delta+1} \delta^t (n-\mu)^s C_{m_0-\delta-\mu}^{k-2} +$$

$$+ n^s C_{m_1-1}^k \sum_{\nu=1}^{m_0-k+1} \nu^t C_{m_0-\nu}^{k-1}\Big)/C_{m_0}^k C_{m_1}^k.$$

Доказательство теоремы 8. Проверим справедливость соотношения (8). Используя лемму 7, находим $M(\rho_{kn}^-)^\alpha (\rho_{kn}^+)^\beta \to M(\rho_q^-)^\alpha (\rho_q^+)^\beta$, $n\to\infty$, где $M(\rho_q^-)^\alpha (\rho_q^+)^\beta$ удовлетворяет соотношению (9). Поскольку

$$\sum_{t=1}^{\infty} (M(\rho_q^-)^{2t} + M(\rho_q^+)^{2t})^{-1/2t} = \infty,$$

то последовательность $M(\rho_q^-)^\alpha (\rho_q^+)^\beta$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots$, однозначно определяет закон распределения вероятностей [4, с. 167]. Аналогично можно проверить (10) и (11).

5. Будем говорить, что компоненты i и $i+2$ n-мерного (0, 1)-вектора f образуют 2-ступень, если $f(i) > f(i+2)$, $i=\overline{1, n-2}$. Обозначим через θ_{kn} число 2-ступеней (0,1)-вектора, извлеченного случайно и равновероятно из $\Omega(k, m_0, m_1)$.

Лемма 8. Справедливо равенство

$$M\theta_{kn}^\alpha = (C_{m_0}^k C_{m_1}^k)^{-1} \Sigma (\alpha!/\mu_1! \dots \mu_{2k}!)\, C_{m_1-k+A}^k C_{m_0-k+B}^k, \tag{12}$$

где суммирование осуществляется по целым $\mu_i \geqslant 0$, $i=\overline{1, 2k}$, $\mu_1 + \dots$ $\dots + \mu_{2k} = \alpha$, $A = \sum_{i=1}^{k} \chi(\mu_i = 0)$, $B = \sum_{i=1}^{k} \chi(\mu_{k+i} = 0)$.

Доказательство. Заметим

$$M\theta_{kn}^{\alpha}=(C_{m_0}^{k}C_{m_1}^{k})^{-1}\sum\Big(\sum_{i=1}^{k}(\chi(\delta_i\geqslant 1)+\chi(\gamma_i\geqslant 1))\Big)^{\alpha},$$

где Σ обозначает суммирование, определенное в (2). Применяя к правой части последнего равенства полиномиальную формулу и используя соотношение

$$\sum_{\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_k=m_1-k}\prod_{j=1}^{k}(\chi(\gamma_i\geqslant 1))^{\mu_j}=C_{m_1-k+A}^{k},$$

нетрудно получить (12). Лемма 8 позволяет сформулировать теорему 9.

Теорема 9. *Если при* $n\to\infty$ $m_0^{-1}k\to\gamma_0$, $m_1^{-1}k\to\gamma_1$, $\min(m_0,\ m_1)\to\infty$, *то* $k^{-1}\theta_{kn}\xrightarrow{d}2-\gamma_0-\gamma_1$, $n\to\infty$; *если при* $n\to\infty$ $k\to q$, $\min(m_0,\ m_1)\to m<\infty$, *то* $\theta_{kn}\xrightarrow{d}\theta_q$, $n\to\infty$, *где* θ_q — *случайная величина, однозначно определяемая своими моментами*

$$M\theta_q^{\alpha}=\sum_{i=0}^{\alpha}q^iC_{\alpha}^{i}\sum_{\nu=0}^{q}(\Delta^{q-\nu}0^{\alpha-i})\,C_q^{\nu}\prod_{j=0}^{q-\nu-1}(1-q(m-j)^{-1}),$$

Δ^a0^b — *число Моргана* [3, с. 42].

1. *Масол В. И.* О распределении некоторых статистик (0, 1)-вектора // Исслед. операций и АСУ.— 1987.— Вып. 29.— С. 23—27.
2. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 720 с.
3. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики.— М. : Наука, 1982.— 384 с.
4. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы).— М. : Наука, 1987.— 400 с.

Киев. ун-т

Получено 22.09.88