УДК 517.956

В. А. Маловичко

О краевых задачах для систем уравнений смешанного и составного типов

Изучается разрешимость краевых задач для трех систем дифференциальных уравнений смешанного и составного типов в многомерных областях. Доказаны теоремы существования и единственности решений этих задач.

Вивчається розв'язність граничних задач для трьох систем диференціальних рівнянь змішаного і складеного типів в багатовимірних областях. Доведені теореми існування та єдиності розв'язків цих задач.

В настоящей статье изучается разрешимость краевых задач для трех систем дифференциальных уравнений смешанного и составного типов второго и третьего порядка.

1. Пусть G — ограниченная область в R^n с кусочно гладкой границей ∂G. В цилиндрической области $Q=\{(x,t): x=(x_1,\dots,x_n)\in G,\ a<t<b,\ a<0,\ b>0\}$ рассмотрим систему

$$Lu(x,t)\equiv (K(x,t)u_t)_t-(A^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}-A(x)u_t+C(x,t)u=f(x,t), \qquad (1)$$

коэффициентами которой являются симметричные матрицы порядка m, причем $A,\ K,\ K_t,\ C,\ C_t\in C(\overline{Q}),\ A^{ij}\in C^1(\overline{Q}),\ A^{ij}=A^{ji}$ и для любых векторов $\xi,\ \xi_i\in R^m,\ i=\overline{1,n}$, выполняются неравенства

$$tK(x,t)\xi\xi<0,\quad x\in\overline{G},\quad t\neq 0,\quad \xi\neq 0,$$

$$A^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant \alpha\xi_i\xi_i,\quad (x,t)\in\overline{Q},\quad \alpha>0,$$

$$C(x,a)\xi\xi\geqslant 0,\quad x\in\overline{G},$$

(по повторяющимся индексам происходит суммирование от 1 до n); u и f — m-мерные вектор-функции (дальше будем называть их функциями).

Таким образом, система (1) является гиперболической при $t<0$ и эллиптической при $t>0$.

Задача 1. В области Q найти решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma}=u|_{t=b}=0, \qquad (2)$$

где $\Gamma=\partial G\times(a,b)$.

Задача 2. В области Q найти решение системы $L^*v(x,t)=f(x,t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{\Gamma}=v|_{t=a}=v_t|_{t=a}=v|_{t=b}=0, \qquad (3)$$

где L^* — оператор, формально сопряженный с оператором L.

Легко проверить, что задачи 1, 2 взаимно сопряжены.

Введем следующие обозначения: $U,\ U^*$ — пространства гладких в $\overline{Q}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (2) и (3); H_+ (H_+^*) — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства U (U^*) по норме

$$\|u\|=\left[\int\limits_Q (u_tu_t+A^{ij}u_{x_i}u_{x_j})\,dQ\right]^{1/2};$$

H_- (H_-^*) — пространство с негативной нормой [1, с. 46], построенное по $L_2(Q)$ и H_+ (H_+^*).

Лемма 1. *Если в области Q для любых векторов ξ, $\xi_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, и некоторых чисел $\mu > 0$, $\delta > 0$ выполняются неравенства*

$$[\mu K(x, t) - K_t(x, t) + 2A(x)]\,\xi\xi \geqslant \delta\xi\xi,$$
$$[\mu A^{ij}(x, t) + A_t^{ij}(x, t)]\,\xi_i\xi_j \geqslant \delta A^{ij}(x, t)\,\xi_i\xi_j, \tag{4}$$
$$[\mu C(x, t) + C_t(x, t)]\,\xi\xi \geqslant 0,$$

то для всех функций $u \in U$ выполняется неравенство

$$\| Lu \|_{L_2(Q)} \geqslant \gamma_1 \| u \|_{H_+}, \quad \gamma_1 > 0. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $u \in U$. Интегрируя по частям и учитывая, что все возникающие при этом интегралы по границе области Q неотрицательны, получаем неравенство

$$-\int\limits_Q \exp(\mu t)\, Luu_t dQ \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_Q \exp(\mu t)\,[(\mu K - K_t + 2A)\, u_t u_t +$$
$$+ (\mu A^{ij} + A_t^{ij})\, u_{x_i} u_{x_j} + (\mu C + C_t)\, uu]\, dQ \geqslant \alpha_1 \| u \|_{H_+}^2, \quad \alpha_1 > 0,$$

из которого нетрудно получить неравенство (5).

Из неравенства (5) следует единственность достаточно гладкого решения задачи 1.

Лемма 2. *Если выполняются условия* (4), *то для всех функций $v \in H_+^*$ выполняется неравенство*

$$\| L^* v \|_{H_-} \geqslant \gamma_2 \| v \|_{L_2(Q)}, \quad \gamma_2 > 0. \tag{6}$$

Доказательство. Для функций $v \in U^*$ введем интегральное преобразование

$$u(x, t) = \int\limits_t^b \exp(-\mu\tau)\, v(x, \tau)\, d\tau.$$

Очевидно, $u \in U$ и $u_t(x, t) = -\exp(-\mu t)\, v(x, t)$.

Применяя обобщенное неравенство Шварца и интегрируя по частям, имеем

$$\| L^* v \|_{H_-} \| u \|_{H_+} \geqslant (L^* v, u)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q (-Kv_t u_t + A^{ij} v_{x_i} u_{x_j} - Avu_t + Cvu)\, dQ =$$
$$= \int\limits_Q \exp(-\mu t)\, Kv_t v dQ - \int\limits_Q \exp(\mu t)\,(A^{ij} u_{x_i t} u_{x_j} - Au_t u_t + Cu_t u)\, dQ \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_Q \exp(-\mu t)\,(\mu K - K_t)\, vvdQ + \frac{1}{2}\int\limits_Q \exp(\mu t)\,[(\mu A^{ij} + A_t^{ij})\, u_{x_i} u_{x_j} +$$
$$+ 2Au_t u_t + (\mu C + C_t)\, uu]\, dQ \geqslant \alpha_1 \| u \|_{H_+}^2. \tag{7}$$

Сокращая (7) на $\| u \|_{H_+}$, получаем

$$\| L^* v \|_{H_-} \geqslant \alpha_1 \| u \|_{H_+} \geqslant \alpha_1 \| u_t \|_{L_2(Q)} \geqslant \gamma_2 \| v \|_{L_2(Q)}. \tag{8}$$

Применив предельный переход, убедимся в справедливости неравенства (8) для всех $v \in H_+^*$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для всех функций $v \in H_+^*$ выполняется неравенство*

$$\| L^* v \|_{H_-} \leqslant \gamma_3 \| v \|_{H_+^*}, \quad \gamma_3 > 0. \tag{9}$$

Доказательство. Ввиду плотности U^* в H_+^* неравенство (9) достаточно доказать для функций $v \in U^*$. Пусть $v \in U^*$. Тогда

$$\| L^*v \|_{H_-} = \sup_{u \in H_+} \| u \|_{H_+}^{-1} (L^*v, u)_{L_2(Q)} = \sup_{u \in U} \| u \|_{H_+}^{-1} \int_Q (-Kv_t u_t + A^{ij} v_{x_i} u_{x_j} +$$

$$+ Av_t u + Cvu)\, dQ \leqslant \sup_{u \in U} \| u \|_{H_+}^{-1} \alpha_2 \left[\int_Q (u_t u_t + A^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + uu)\, dQ \right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\int_Q (v_t v_t + A^{ij} v_{x_i} v_{x_j} + vv)\, dQ \right]^{1/2}, \quad \alpha_2 > 0. \tag{10}$$

Применяя неравенство Коши, так же, как в [2, с. 63], можно показать

$$\int_Q uu dQ \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_Q u_t u_t dQ, \quad u \in U\,(U^*). \tag{11}$$

Из (10), (11) имеем

$$\| L^*v \|_{H_-} \leqslant \sup_{u \in U} \| u \|_{H_+}^{-1} \gamma_3 \| u \|_{H_+} \| v \|_{H_+^*} = \gamma_3 \| v \|_{H_+^*}.$$

Лемма доказана.

Определение 1. *Пусть $f \in L_2(Q)$. Функцию $u \in H_+$ назовем сильным решением задачи* 1, *если существует последовательность $u_k \in U$ такая, что $\| u_k - u \|_{H_+} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $\| Lu_k - f \|_{H_-^*} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.*

Теорема 1. *Если выполняются условия* (4), *то для любой функции $f \in L_2(Q)$ существует сильное решение $u \in H_+$ задачи* 1.

Доказательство. Известно [1, с. 107], что из неравенства (6) следует существование слабого решения $u \in H_+$ задачи 1, т. е. существование такой функции $u \in H_+$, для которой выполняется равенство

$$(u, L^*v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad v \in U^*. \tag{12}$$

Поскольку U плотно в H_+, то найдется такая последовательность $u_k \in U$, что $\| u_k - u \|_{H_+} \underset{k\to\infty}{\to} 0$. Используя неравенство (9) и равенство (12), получаем

$$\| Lu_k - f \|_{H_-^*} = \sup_{v \in H_+^*} \| v \|_{H_+^*}^{-1} (Lu_k - f, v)_{L_2(Q)} = \sup_{v \in U^*} \| v \|_{H_+^*}^{-1} [(Lu_k,$$

$$v)_{L_2(Q)} - (f, v)_{L_2(Q)}] = \sup_{v \in U^*} \| v \|_{H_+^*}^{-1} [(u_k, L^*v)_{L_2(Q)} - (u, L^*v)_{L_2(Q)}] =$$

$$= \sup_{v \in U^*} \| v \|_{H_+}^{-1} (u_k - u, L^*v)_{L_2(Q)} \leqslant \sup_{v \in U^*} \| v \|_{H_+^*}^{-1} \| u_k - u \|_{H_+} \| L^*v \|_{H_-} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_3 \| u_k - u \|_{H_+} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Теорема доказана.

2. В области $\Omega = Q \times (0, Y)$, $Y > 0$, рассмотрим систему

$$L_1 u\,(x, y, t) \equiv \frac{\partial}{\partial y} [(K\,(x, t)\, u_t)_t - (A^{ij}\,(x, t)\, u_{x_i})_{x_j} - A\,(x)\, u_t +$$

$$+ C\,(x, t)\, u] - E\,(x, y)\, u_t = f\,(x, y, t), \tag{13}$$

где $E(x, y)$ — симметричная матрица порядка m, причем $E,\ E_y \in C(\overline{\Omega})$ и $E(x, Y)\,\xi\xi \geqslant 0$, $x \in \overline{G}$, $\xi \in R^m$.

Задача 3. В области Ω найти решение системы (13), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\,|_{\Gamma_1} = u\,|_{y=0} = u\,|_{t=b} = 0, \tag{14}$$

где $\Gamma_1 = \Gamma \times (0, Y)$.

Задача 4. В области Ω найти решение системы $L_1^* v(x, y, t) = f(x, y, t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{\Gamma_1} = v|_{y=Y} = v|_{t=a} = v_t|_{t=a} = v|_{t=b} = 0, \tag{15}$$

где L_1^* — оператор, формально сопряженный с оператором L_1.

Отметим, что задачи 3, 4 взаимно сопряженные.

Введем обозначения: V, V^* — пространства гладких в $\bar{\Omega}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (14) и (15); $\tilde{H}_+$ ($\tilde{H}_+^*$) — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства V (V^*) по норме

$$\| u \| = \left[\int_\Omega (u_{yt} u_{yt} + A^{ij} u_{x_i y} u_{x_j y})\, d\Omega \right]^{1/2};$$

$\tilde{H}_-$ ($\tilde{H}_-^*$) — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(\Omega)$ и $\tilde{H}_+$ ($\tilde{H}_+^*$).

Лемма 4. *Если выполняются условия* (4) *и для любого вектора* $\xi \in R^m$ *и некоторого числа* $\nu > 0$ *в области* Ω *выполняется неравенство*

$$[\nu E(x, y) - E_y(x, y)] \xi\xi \geqslant 0, \tag{16}$$

то для всех функций $u \in V$ *выполняется неравенство*

$$\| L_1 u \|_{L_2(\Omega)} \geqslant \gamma_4 \| u \|_{\tilde{H}_+}, \quad \gamma_4 > 0. \tag{17}$$

Неравенство (17) доказывается интегрированием по частям выражения $-\exp(\mu t - \nu y) L_1 u u_{yt}$, $u \in V$, так же, как неравенство (5).

Из неравенства (17) следует единственность достаточно гладкого решения задачи 3.

Лемма 5. *Если выполняются условия* (4), (16), *то для всех функций* $v \in \tilde{H}_+^*$ *выполняется неравенство*

$$\| L_1^* v \|_{\tilde{H}_-} \geqslant \gamma_5 \| v \|_{L_2(\Omega)}, \quad \gamma_5 > 0. \tag{18}$$

Доказательство. Для функций $v \in V^*$ введем интегральное преобразование

$$u(x, y, t) = \int_0^y dz \int_t^b \exp(-\mu\tau + \nu z)\, v(x, z, \tau)\, d\tau.$$

Очевидно, $u \in V$, $u_{yt}(x, y, t) = -\exp(-\mu t + \nu y)\, v(x, y, t)$.

Применяя обобщенное неравенство Шварца и интегрирование по частям, получаем

$$\| L_1^* v \|_{\tilde{H}_-} \| u \|_{\tilde{H}_+} \geqslant (L_1^* v, u)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \exp(-\mu t + \nu y) K v_t v\, d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega \exp(\mu t - \nu y)(-A^{ij} u_{x_i y t} u_{x_j y} + A u_{yt} u_{yt} - C u_{yt} u_y + E u_{yt} u_t)\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega \exp(\mu t - \nu y) [(\mu K - K_t + 2A) u_{yt} u_{yt} + (\mu A^{ij} + A_t^{ij}) u_{x_i y} u_{x_j y} +$$

$$+ (\mu C + C_t) u_y u_y + (\nu E - E_y) u_t u_t]\, d\Omega \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_2 \| u \|_{\tilde{H}_+}^2 \geqslant \gamma_5 \| v \|_{L_2(\Omega)} \| u \|_{\tilde{H}_+}, \quad \alpha_2 > 0. \tag{19}$$

Теперь для доказательства неравенства (18) необходимо сократить неравенство (19) на $\|u\|_{\tilde{H}_+}$ и осуществить предельный переход. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для всех функций* $v \in \tilde{H}_+^*$ *выполняется неравенство*

$$\| L^* v \|_{\tilde{H}_-} \leqslant \gamma_6 \| v \|_{\tilde{H}_+^*}, \quad \gamma_6 > 0.$$

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 3.

Определение 2. *Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Функцию $u \in \tilde{H}_+$ назовем сильным решением задачи 3, если существует последовательность $u_k \in V$ такая, что $\| u_k - u \|_{\tilde{H}_+} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $\| L_1 u_k - f \|_{\tilde{H}_-^*} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.*

Следствием лемм 4—6 является следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (4), (16), *то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует сильное решение $u \in \tilde{H}_+$ задачи 3.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

3. В области $D = G \times (0, Y) \times (0, T)$, $T > 0$, рассмотрим систему

$$L_2 u(x, y, t) \equiv \frac{\partial}{\partial y}[B(x, y) u_t - (B^{ij}(x, t) u_{x_i})_{x_j}] + F(x, y) u_t = f(x, y, t), \quad (20)$$

коэффициентами которой являются симметричные матрицы порядка m, причем B, B_y, B_{yy}, F, $F_y \in C(\bar{D})$, $B^{ij} \in C^1(\bar{D})$, $B^{ij} = B^{ji}$ и для любых векторов ξ, $\xi_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, в области D выполняются неравенства

$$B(x, y)\xi\xi \geqslant \beta\xi\xi, \quad B_y(x, y)\xi\xi \geqslant 0, \quad B^{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant \beta\xi_i\xi_i,$$
$$F(x, y)\xi\xi \geqslant 0, \quad \beta > 0.$$

Задача 5. В области D найти решение системы (20), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\Gamma_2} = u|_{y=0} = u|_{t=0} = 0, \quad (21)$$

где $\Gamma_2 = \partial G \times (0, Y) \times (0, T)$.

Задача 6. В области D найти решение системы $L_2^* v(x, y, t) = f(x, y, t)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$v|_{\Gamma_2} = v|_{y=Y} = v|_{t=T} = 0, \quad (22)$$

где L_2^* — оператор, формально сопряженный с оператором L_2.

Задачи 5, 6 взаимно сопряженные.

Пусть W, W^* — пространства гладких в $\bar{D}$ функций, удовлетворяющих соответственно условиям (21) и (22); $\hat{H}_+ (\hat{H}_+^*)$ — гильбертово пространство, полученное замыканием пространства $W (W^*)$ по норме

$$\| u \| = \Big[\int_D (u_{yt} u_{yt} + u_{x_i y} u_{x_i y})\, dD \Big]^{1/2};$$

$\hat{H}_-$ $(\hat{H}_-^*)$ — пространство с негативной нормой, построенное по $L_2(D)$ и $\hat{H}_+$ $(\hat{H}_+^*)$.

Лемма 7. *Если для некоторого числа $\nu > 0$ и любого вектора $\xi \in R^m$ в области $\bar{D}$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} &[\nu B_y(x, y) - B_{yy}(x, y)]\xi\xi \geqslant 0, \\ &[\nu F(x, y) \pm F_y(x, y)]\xi\xi \geqslant 0, \end{aligned} \quad (23)$$

то для всех функций $u \in \hat{H}_+$, $v \in \hat{H}_+^*$ выполняются неравенства

$$\| L_2 u \|_{\hat{H}_-^*} \geqslant \gamma_7 \| u \|_{L_2(D)}, \quad \gamma_7 > 0,$$
$$\| L_2^* v \|_{\hat{H}_-} \geqslant \gamma_8 \| v \|_{L_2(D)}, \quad \gamma_8 > 0.$$

Лемма 7, подобно леммам 2, 5, доказывается при помощи интегральных преобразований

$$v(x, y, t) = \int_y^Y dz \int_t^T \exp(-\mu\tau - \nu z)\, u(x, z, \tau)\, d\tau, \quad u \in W,$$
$$u(x, y, t) = \int_0^y dz \int_0^t \exp(\mu\tau + \nu z)\, v(x, z, \tau)\, d\tau, \quad v \in W^*,$$

где число $\mu > 0$ выбирается настолько большим, чтобы для любых векторов $\xi_i \in R^m$, $i = \overline{1, n}$, в области $\overline{D}$ выполнялось неравенство

$$[\mu B^{ij}(x, t) \pm B_t^{ij}(x, t)]\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha_3 \xi_i \xi_i, \quad \alpha_3 > 0.$$

Лемма 8. *Для всех функций $u \in \hat{H}_+$, $v \in \hat{H}_+^*$ выполняются неравенства*

$$\| L_2 u \|_{\hat{H}_-^*} \leqslant \gamma_9 \| u \|_{\hat{H}_+}, \quad \gamma_9 > 0,$$

$$\| L_2^* v \|_{\hat{H}_-} \leqslant \gamma_{10} \| v \|_{\hat{H}_+^*}, \quad \gamma_{10} > 0.$$

Доказательство леммы 8 аналогично доказательству леммы 3.

Определение 3. *Пусть $f \in L_2(D)$. Функцию $u \in \hat{H}_+$ назовем сильным решением задачи* 5, *если существует последовательность $u_k \in W$ такая, что $\| u_k - u \|_{\hat{H}_+} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0$, $\| L_2 u_k - f \|_{\hat{H}_-^*} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0$.*

Определение 4. *Пусть $f \in \hat{H}_-^*$. Функцию $u \in L_2(D)$ назовем сильным решением задачи* 5, *если существует последовательность $u_k \in W$ такая, что $\| u_k - u \|_{L_2(D)} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0$, $\| L_2 u_k - f \|_{\hat{H}_-^*} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} 0$.*

Согласно [1, с. 93—108; 3, с. 182—198] следствием лемм 7, 8 является такая теорема.

Теорема 3. *Если выполняются условия* (23), *то для любой функции $f \in L_2(D)$ существует единственное сильное решение $u \in \hat{H}_+$ задачи 5 в смысле определения* 3, *а для любой функции $f \in \hat{H}_-^*$ существует единственное сильное решение $u \in L_2(D)$ задачи 5 в смысле определения* 4.

Аналогичные результаты справедливы и для задачи 6.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 408 с.
3. *Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е.* Фильтрация шумов.— Киев : Наук. думка, 1979.— 230 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 06.09.88