УДК 517.5

А. К. Кушпель, И. Р. Ковальчук

Оценка скорости сходимости производной интерполяционного полинома на классах дифференцируемых функций

В [1] рассмотрен интерполяционный тригонометрический полином n-го порядка $\mathscr{L}_n^*(f;x)$, совпадающий с $f(x)$ в узлах $x_k^{(n)}=kh$, $h=\pi/n$, $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$. Он имеет вид $\mathscr{L}_n^*(f;x)=n^{-1}\sum\limits_{k=-n}^{n-1} D_n^*(x-x_k^{(n)})\,f(x_k^{(n)})$, где $D_n^*(t)=D_n(t)-(\cos nt)/2=\sin(nt)\operatorname{ctg}(t/2)/2$ — модифицированное ядро Дирихле порядка n, $D_n(t)$ — ядро Дирихле. Там же изучено асимптотическое поведение верхней грани уклонений $|f(x)-\mathscr{L}_n^*(f;x)|$ при $n\to\infty$.

Представляет интерес нахождение асимптотики величины

$$\mathscr{E}_n'(W_\beta^r,\ x)\overset{\mathrm{def}}{=}\sup_{f\in W_\beta^r}|f'(x)-(\mathscr{L}_n^*(f;x))'|,\quad n\to\infty,$$

где W^r_β — класс 2π-периодических суммируемых функций, представимых в виде $f(t) = \pi^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t-u)\, B^r_\beta(u)\, du$, $B^r_\beta(u) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos(ku + \beta\pi/2)$, $r > 1$, $\beta \in (-\infty, +\infty)$ и $\operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leqslant 1$.

Величину $\mathscr{E}'_n(W^r_\beta, x)$ выразим через

$$E_n(W^r_\beta) = \sup_{f \in W^r_\beta} \inf_{T_{n-1}} \| f(\cdot) - T_{n-1}(\cdot) \|_C, \tag{1}$$

т. е. точную верхнюю грань наилучших приближений функций $f(x)$ класса W^r_β тригонометрическими полиномами T_{n-1} порядка $n-1$ в метрике C. Отметим, что для классов W^r_β величина (1) найдена в [2]. При $r > 1$ и любых β

$$E_n(W^r_\beta) = \left| \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{sign} \sin((n+1)t + \alpha\pi)\, B^r_\beta(t)\, dt \right| = 4\pi^{-1} M_{r,\beta}/(n+1)^{r+1}, \tag{2}$$

где $M_{r,\beta} = \left| \sum\limits_{j=0}^{\infty} (2j+1)^{-r-1} \sin((2j+1)\alpha\pi + \beta\pi/2) \right|$ и $\alpha\pi$ является корнем уравнения $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \cos((2j+1)\alpha\pi + \beta\pi/2)(2j+1)^{-r} = 0$.

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Для любых $\beta \in R$ и $r > 1$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}'_n(W^r_\beta, x) = 2\pi^{-1} n \ln n\, |\cos nx|\, E_n(W^r_\beta) + O(nE_n(W^r_\beta)), \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Обозначим через $T_n(f, x)$ полином порядка n наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$. Учитывая тот факт, что $(\mathscr{L}^*_n(T_n; x))' = T'_n(x)$, для произвольной функции $f(x)$ из W^r_β получаем

$$|f'(x) - (\mathscr{L}^*_n(f; x))'| = |f'(x) - (\mathscr{L}^*_n(f; x))' - T'_n(f, x) + T'_n(f, x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f'(x) - T'_n(f; x)| + |(\mathscr{L}^*_n(f - T_n; x))'|.$$

Тогда

$$\mathscr{E}'_n(W^r_\beta, x) \leqslant \sup_{f \in W^r_\beta} |f'(x) - T'_n(f, x)| + \| \mathscr{L}^*_n \| \sup_{f \in W^r_\beta} \| f(x) - T_n(x) \|_C, \tag{3}$$

где $\| \mathscr{L}^{*\prime}_n \| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|f\|_C \leqslant 1} |\mathscr{L}^{*\prime}_n(f; x)|$ — норма оператора $\mathscr{L}^{*\prime}_n$.

Поскольку [3, с. 555] $\sup\limits_x |f'(x) - T'_n(f, x)| = O(E_n(f'))$, то

$$\sup_{f \in W^r_\beta} |f'(x) - T'_n(f, x)| = O(nE_n(W^r_\beta)). \tag{4}$$

Оценим теперь норму оператора $\mathscr{L}^{*\prime}_n$:

$$\| \mathscr{L}^{*\prime}_n \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} \left| n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} f(x^{(n)}_k)\, D^{*\prime}_n(x - x^{(n)}_k) \right| =$$
$$= n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |D^{*\prime}_n(x - x^{(n)}_k)| = n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |(\sin n(x - x^{(n)}_k) \operatorname{ctg}((x - x^{(n)}_k)/2)'| =$$
$$= n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |(n \cos n(x - x^{(n)}_k) \sin(x - x^{(n)}_k) - \sin n(x - x^{(n)}_k))/4\sin^2((x - x^{(n)}_k)/2)| =$$

$$= n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |(n \cos nx \sin (x - x_k^{(n)}) + \sin nx)/4\sin^2 ((x - x_k^{(n)})/2)| =$$

$$= n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |n \cos nx \operatorname{ctg} ((x - x_k^{(n)})/2)/2 + \sin nx/4 \sin^2 ((x - x_k^{(n)})/2)|.$$

Так как при $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ будет иметь место $1/\sin^2 t - 1/t^2 = O(1)$ и $1/\operatorname{tg} t - 1/t = O(1)$, то

$$\| \mathcal{L}_n^{*'} \| = |\cos nx| \sum_{k=-n}^{n-1} (\operatorname{ctg} ((x - x_k^{(n)})/2))/2 + O(n) =$$

$$= |\cos nx| \sum_{k=-n}^{n-1} (x - k\pi/n)^{-1} + O(n) = 2\pi^{-1} |\cos nx| \, n \ln n + O(n). \qquad (5)$$

Учитывая оценки (4) и (5), а также то, что $\| f(\cdot) - T_n(\cdot) \|_C = E_n(f)$, из (3) получаем

$$\mathcal{E}_n'(W_\beta^r, x) \leqslant 2\pi^{-1} n \ln n |\cos nx| E_n(W_\beta^r) + O(nE_n(W_\beta^r)). \qquad (6)$$

Для завершения доказательства построим функцию $f(x) \in W_\beta^r$, реализующую знак равенства в (6). Учитывая (2), полагаем

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \operatorname{sign} \sin ((n+1)(x-t) - \alpha\pi) \, \mathrm{B}_\beta^r(t) \, dt =$$

$$= \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \int_0^{2\pi} \operatorname{sign} \sin ((n+1)(x-t) - \alpha\pi) \cos (kt + \beta\pi/2) \, dt =$$

$$= 4\pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} (\sin ((2j+1)(nx + \alpha\pi) + \beta\pi/2))/(n^r (2j+1)^{r+1}). \qquad (7)$$

Соотношения (7) и (2) позволяют заключить, что $f_n \in W_\beta^r$ и принимает в точках $x_k^{(n)}$ значения $\pm E_n(W_\beta^r)$ со знаком, совпадающим с $\operatorname{sign} D_n^{*'}(x - x_k^{(n)})$. Действительно,

$$f_n(k\pi/n) = 4\pi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-r} (2j+1)^{-r-1} \sin ((2j+1)(\alpha\pi + \beta\pi/2)) =$$

$$= (-1)^k E_n(W_\beta^r). \qquad (8)$$

Далее имеем

$$|f_n'(x) - (\mathcal{L}_n^*(f_n, x)' | = | f_n'(x) - T_n(f_n', x) - (\mathcal{L}_n^*(f_n - T_n(f_n); x))' | \geqslant$$

$$\geqslant \| f_n'(x) - T_n(f_n', x)| - |(\mathcal{L}_n^*(f - T_n(f_n); x))' ||. \qquad (9)$$

Из задания функции $f_n(\cdot)$ следует, что $f_n'(\cdot) \in W_{\beta-1}^{r-1}$, поэтому

$$|f_n'(\cdot) - T_n(f_n', \cdot)| = O(E_n(W_\beta^r)). \qquad (10)$$

Так как $T_n(f_n) \equiv 0$, находим

$$|(\mathcal{L}_n^*(f_n - T_n; x))'| = |(\mathcal{L}_n^*(f_n; x))'| =$$

$$= E_n(W_\beta^r) |n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} (-1)^k D_n^{*'}(x - x_k^{(n)})| = E_n(W_\beta^r \; n^{-1}| \sum_{k=-n}^{n-1} (-1)^k (n \times$$

$$\times \cos n(x - x_k^{(n)}) \sin (x - x_k^{(n)}) - \sin n(x - x_k^{(n)}))/4 \sin^2 ((x - x_k^{(n)})/2))| =$$

$$= E_n (W^r_\beta)\, n^{-1} \Big| \sum_{k=-n}^{n-1} (n \cos nx \cdot \operatorname{ctg}((x - x_k^{(n)})/2)/2 +$$

$$+ \sin nx/4 \sin^2((x - x_k^{(n)})/2)) \Big| \geqslant E_n (W^r_\beta) \,|\cos nx|\, \Big\| \sum_{k=-n}^{n-1} \operatorname{ctg}((x - x_k^{(n)})/2)/2 -$$

$$- |\sin nx| \Big| \sum_{k=-n}^{n-1} (4 \sin^2 ((x - x_k^{(n)})/2))^{-1} \Big\| . \qquad (11)$$

Учитывая (5), получаем

$$|\cos nx| \Big| \sum_{k=-n}^{n-1} (2 \operatorname{tg}((x - x_k^{(n)})/2))^{-1} \Big| = |\cos nx|\, 2\pi^{-1} n \ln n + O(n), \qquad (12)$$

$$|\sin nx| \Big| \sum_{k=-n}^{n-1} (4 \sin^2 ((x - x_k^{(n)})/2))^{-1} \Big| = O(n). \qquad (13)$$

Соотношения (8), (11) — (13) позволяют заключить, что

$$|(\mathscr{L}_n^* (f_n; x))'| = (\| \mathscr{L}_n^{*'} \| + O(n))\, E_n (W^r_\beta). \qquad (14)$$

Сопоставление оценок (9), (10) и равенства (14) завершает доказательство теоремы.

1. *Кушпель А. К.* Об одном методе приближения периодических функций // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 6.— С. 774—776.
2. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки.— 1974.— **16**, вып. 5.— С. 691—701.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближений функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.02.86