УДК 517.956.3+517.955.8

С. П. Роговченко

Применение асимптотического метода к исследованию одной гиперболической импульсной системы

Асимптотический метод Крылова — Боголюбова — Митропольского [1—3] является одним из эффективных методов приближенного исследования широкого класса задач нелинейной механики [1—9]. На возможность применения асимптотических методов к изучению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием указывалось в работе [1], а итоги многочисленных исследований последних лет в этом направлении подведены в [4]. В настоящей статье, следуя основным идеям асимптотических методов

[1—3] и используя методику, предложенную в [4—6] применительно к обыкновенным дифференциальным уравнениям с импульсами, построим асимптотические приближения к периодическим решениям одной гиперболической импульсной системы (ГИС).

Пусть $t \in [0, \infty)$ и $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Будем говорить, что система, описываемая близким к линейному уравнением

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \lambda^2 u = \varepsilon f(u, u_t, u_x), \tag{1}$$

подвергается импульсному воздействию (при $x = x_0 \in \mathbb{R}$), если в некоторый момент времени t_0 выполняется соотношение $u(t_0, x_0) = u_0$, где u_0 — фиксированная постоянная, и в этот момент времени происходит скачкообразное изменение скорости

$$\Delta u_t|_{u(t_0,x_0)=u_0} \equiv u_t(t_0 + 0, x) - u_t(t_0 - 0, x) = \varepsilon I(u_t(t_0 - 0, x)). \tag{2}$$

В ГИС (1), (2) c, λ — постоянные величины, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, f и I —достаточно гладкие функции своих аргументов. Отметим, что для того, чтобы исключить в ГИС (1), (2) возможность возникновения «биений» (т. е. ситуации, при которой за конечное время система подвергается воздействию счетного числа импульсов), нам достаточно потребовать выполнения условия $\inf\limits_{z \in \mathbb{R}} |I(z)| \geqslant \Theta > 0$ для некоторой вещественной постоянной Θ.

Согласно [3, 7, 8], при $\varepsilon = 0$ ГИС (1), (2) имеет периодическое решение

$$u = a\cos(k_0 x - \omega_0 t + \varphi), \tag{3}$$

где a и φ — постоянные, а величины k_0 и ω_0 удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$D(\omega_0, k_0) \equiv \omega_0^2 - c^2 k_0^2 - \lambda^2 = 0. \tag{4}$$

Следуя идеям асимптотических методов [1—3, 7, 8], для малого, но конечного ε ищем решение ГИС (1), (2) в виде

$$u = a\cos\psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \ldots, \tag{5}$$

учитывая, как и в [6], результат импульсного воздействия в функциях $u_i(a, \psi)$ и предполагая, что амплитуда колебаний слабо изменяется по времени и состоянию согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \partial a/\partial t &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots, \\ \partial a/\partial x &= \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots, \end{aligned} \tag{6}$$

а новая фазовая переменная ψ, совпадающая при $\varepsilon = 0$ с фазой в (3), изменяется согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \partial\psi/\partial t &= -\omega_0 + \varepsilon C_1(a) + \varepsilon^2 C_2(a) + \ldots, \\ \partial\psi/\partial x &= k_0 + \varepsilon D_1(a) + \varepsilon^2 D_2(a) + \ldots . \end{aligned} \tag{7}$$

Для однозначного определения входящих в разложение (5) функций потребуем, чтобы все u_i не содержали первых гармоник.

Подставляя выражение (5) в уравнения (1), (2) и действуя аналогично [1—3, 7, 8], получаем уравнения для определения функции $u_1(a, \psi)$ (нами принято обозначение $f_0(a, \psi) = f[a\cos\psi,\ a\omega_0 \sin\psi,\ -a k_0 \sin\psi]$):

$$\begin{aligned} \lambda^2(\partial^2 u_1/\partial\psi^2 + u_1) = f_0(a, \psi) - 2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1)\sin\psi - 2a(\omega_0 C_1 + \\ + c^2 k_0 D_1)\cos\psi, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\Delta \left.\frac{\partial u_1}{\partial\psi}\right|_{u(a_0,\psi)=u_0} = -\frac{1}{\omega_0} I(a\omega_0 \sin\psi)|_{u(a_0,\psi)=u_0}. \tag{9}$$

Рассмотрим уравнение, определяющее моменты импульсного воздействия:

$$u \equiv u(a_0, \psi) = u_0 \tag{10}$$

и, следуя [6], представим его корни $\psi_1(a_0)$ и $\psi_2(a_0)$, лежащие на отрезке $0 \leqslant \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, в виде рядов по степеням малого параметра ε:

$$\begin{gathered}\psi_1(a_0) = \psi_0^1(a_0) + \varepsilon\psi_1^1(a_0) + \varepsilon^2\psi_2^1(a_0) + \ldots, \\ \psi_2(a_0) = \psi_0^2(a_0) + \varepsilon\psi_1^2(a_0) + \varepsilon^2\psi_2^2(a_0) + \ldots,\end{gathered} \tag{11}$$

где $\psi_0^1(a_0)$ и $\psi_0^2(a_0)$ — решения уравнения

$$a_0 \cos\psi = u_0, \tag{12}$$

причем для определенности будем считать, что $\sin\psi_0^1(a_0) > 0$ и $\sin\psi_0^2(a_0) < 0$.

Как и в работах [5, 6], осуществим в ГИС (8), (9) замену искомой функции таким образом, чтобы избавиться от условия разрыва производной (9). Для этого введем новую искомую функцию $v_1(a, \psi)$ следующим соотношением:

$$\begin{gathered}v_1(a,\psi) = u_1(a,\psi) + \frac{1}{\omega_0} I(a_0\omega_0 \sin\psi_1(a_0))\,\Phi(\psi - \psi_1(a_0)) + \\ + \frac{1}{\omega_0} I(a_0\omega_0\sin\psi_2(a_0))\,\Phi(\psi - \psi_2(a_0)),\end{gathered} \tag{13}$$

где $\quad \Phi(\psi) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2} - \sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{\cos k\psi}{k^2-1}\right)$ — бесконечно дифференцируемая при $\psi \neq 2\pi k$ функция, удовлетворяющая уравнению $\dfrac{d^2\Phi}{d\psi^2} + \Phi = -\dfrac{1}{\pi}\cos\psi$, а в точках $\psi = 2\pi k$ ее производная терпит разрыв первого рода со скачком, равным 1: $\Delta\dot{\Phi}|_{2\pi k} \equiv \dot{\Phi}(2\pi k + 0) - \dot{\Phi}(2\pi k - 0) = 1$.

Осуществив в ГИС (8), (9) замену (13), придем к следующему уравнению в частных производных:

$$\begin{gathered}\lambda^2\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial\psi^2} + v_1\right) = f_0(a,\psi) - 2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1)\sin\psi - 2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1)\cos\psi - \\ - \frac{1}{\pi\omega_0}[I(a_0\omega_0\sin\psi_1(a_0)\cos(\psi - \psi_1(a_0)) + I(a_0\omega_0\sin\psi_2(a_0))\cos(\psi - \psi_2(a_0))].\end{gathered} \tag{14}$$

Разложим теперь функции f и v_1 в ряд Фурье по переменной ψ:

$$\begin{gathered}f_0(a,\psi) = g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}[g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi], \\ v_1(a,\psi) = p_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty}[p_n(a)\cos n\psi + q_n(a)\sin n\psi].\end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя выражения (15) в (14), имеем

$$\begin{gathered}\lambda^2 p_0(a) + \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}(1-n^2)[p_n(a)\cos n\psi + q_n(a)\sin n\psi] = g_0(a) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty}[g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi] + [g_1(a) - 2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) - \\ - \frac{1}{\pi\omega_0}(\cos\psi_1(a_0)\, I(a_0\omega_0\sin\psi_1(a_0)) + \cos\psi_2(a_0)\, I(a_0\omega_0\sin\psi_2(a_0)))]\cos\psi + \\ + \Big[h_1(a) - 2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1) + \frac{1}{\pi\omega_0}(\sin\psi_1(a_0)\, I(a_0\omega_0\sin\psi_1(a_0)) + \\ + \sin\psi_2(a_0)\, I(a_0\omega_0\sin\psi_2(a_0)))\Big]\sin\psi.\end{gathered} \tag{16}$$

Приравнивая в соотношении (16) коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем следующие соотношения:

$$\lambda^2 p_0(a) = g_0(a),$$

$$g_1(a) - 2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) - \frac{1}{\pi\omega_0}\frac{u_0}{a_0}\left(I\left(\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right) + \right.$$

$$\left. + I\left(-\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\right) = 0, \tag{17}$$

$$h_1(a) - 2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1) + \frac{1}{\pi\omega_0 a_0}\sqrt{a_0^2-u_0^2}\left(I\left(\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right) - \right.$$

$$\left. - I\left(-\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\right) = 0,$$

$$p_n(a) = \frac{g_n(a)}{\lambda^2(1-n^2)}, \qquad q_n(a) = \frac{h_n(a)}{\lambda^2(1-n^2)}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Тогда решение уравнения (14) имеет вид

$$v_1(a, \psi) = \frac{g_0(a)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left(g_n(a)\cos n\psi + h_n(a)\sin n\psi\right) +$$

$$+ \frac{1}{\omega_0}\left[I\left(\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\Phi(\psi - \psi_1(a_0)) + I\left(-\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\Phi(\psi - \psi_2(a_0))\right], \tag{18}$$

где амплитуда и фаза еще подлежат определению. Для их нахождения подставим значения A_1, B_1, C_1 и D_1 из (6), (7) во второе и третье соотношения (17). В результате получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} h_1(a) + \frac{\varepsilon}{2\pi a_0\omega_0^2}\sqrt{a_0^2-u_0^2}\left(I\left(\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right) - \right.$$

$$\left. - I\left(-\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \omega_0' \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2a\omega_0} g_1(a) - \frac{\varepsilon}{2\pi a_0^2\omega_0^2}\left(I\left(\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right) + I\left(-\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\right).$$

где $\omega_0 = -\partial D/\partial k_0/\partial D/\partial\omega_0 = d\omega_0/dk_0$ (см. (4)) — групповая скорость [7—9], $b = \psi - k_0 x + \omega_0 t$. Уравнения (19) могут быть легко проинтегрированы, например, если a и b являются функциями только времени или только состояния. При этом произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании, могут быть определены из начальных или граничных условий. После того, как решены уравнения (19), остается только найти величины $\psi_1(a_0)$ и $\psi_2(a_0)$, определяющие моменты разрыва производной функции $\Phi(\psi)$. Имея в распоряжении выражение (18), можно, действуя аналогично [6], найти корни уравнения (10) с точностью до величин порядка ε^2. Для этого подставляем в уравнение $a_0\cos\psi + \varepsilon u_1(a_0, \psi) = u_0$ выражения (11) и с точностью до ε^2 находим

$$\psi_1(a_0) = \psi_1^0(a_0) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{a_0^2-u_0^2}}\left\{v_0(a_0, \psi_1^0(a_0)) + \frac{1}{\omega_0}\left[I\left(\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\Phi(0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + I\left(-\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\Phi(\psi_1^0(a_0) - \psi_2^0(a_0))\right]\right\},$$

$$\psi_2(a_0) = \psi_2^0(a_0) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{a_0^2-u_0^2}}\left\{v_0(a_0, \psi_2^0(a_0)) + \frac{1}{\omega_0}\left[I\left(\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\Phi(\psi_2^0(a_0) - \psi_1^0(a_0)) + I\left(-\omega_0\sqrt{a_0^2-u_0^2}\right)\Phi(0)\right]\right\},$$

где $\psi_1^0(a_0) = \arccos(u_0/a_0)$, $\psi_2^0(a_0) = -\arccos(u_0/a_0)$, $v_0(a, \psi) = g_0(a)/\lambda^2 -$
$$- \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} [g_n(a) \cos n\psi + h_n(a) \sin n\psi].$$

Итак, определены все величины, входящие в соотношение (18), поэтому аналогично [1—3] в качестве первого приближения к решению ГИС (1), (2) можно взять выражение $u = a \cos \psi$, а в качестве первого улучшенного приближения можно взять выражение $u = a \cos \psi + \varepsilon u_1 (a, \psi)$, где a и ψ изменяются согласно уравнениям $\partial a/\partial t = \varepsilon A_1 (a)$, $\partial \psi/\partial t = -\omega_0 + \varepsilon C_1 (a)$, $\partial a/\partial x = \varepsilon B_1 (a)$, $\partial \psi/\partial x = k_0 + \varepsilon D_1 (a)$. Отметим, что явления, возникающие благодаря наличию импульсного воздействия, начинают проявляться начиная с первого улучшенного приближения, которое удобно для практического применения.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1937.— 363 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— Изд. 4-е.— М. : Наука, 1974.— 502 с.
3. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 592 с.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 1.— С. 56—64.
5. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний в системах, подверженных импульсному воздействию // Там же.— 1967.— 19, № 5.— С. 96—104.
6. *Каркинбаев И., Перестюк Н. А.* Применение асимптотического метода Крылова — Боголюбова к исследованию систем с импульсным воздействием // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика.— 1978.— Вып. 20.— С. 51—59.
7. *Найфэ А.* Методы возмущений.— М. : Мир, 1976.— 456 с.
8. *Montgomery D., Tidman D. A.* Secular and nonsecular behavior for the cold plasma equations // Phys. Fluids.— 1964.— **7**, N 2.— P. 242—249.
9. *Kakutani T., Sugimoto N.* Krylov — Bogoliubov — Mitropolsky method for nonlinear wave modulation // Ibid.— 1974.— **17**, N 8.— P. 1617—1625.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 30.09.87