УДК 517.9+(616.07)

Л. И. Тарасенко-Зеленая,
А. Н. Заварин, С. Л. Радванский

Высокочастотное ядро в алгоритме восстановления функции по проекциям для расходящихся лучей

Впервые задача восстановления функции двух переменных по проекциям для параллельных лучей была решена Радоном [1], а дальнейшее развитие методов восстановления связано в основном с успешным внедрением реконструктивной вычислительной томографии [2—5]. Необходимость увеличения скорости сбора данных и их обработки обусловили появление различных модификаций методов восстановления для случая расходящихся лучей.

Рассматриваемый в статье метод реконструкции изображений по проекциям относится к методам интегральных преобразований и использует процедуры свертки и обратного проецирования.

Пусть $f(x_1, x_2)$ — интегрируемая с квадратом функция, равная нулю вне заданной ограниченной области $\Omega \subset R^2$. Проекциями функции $f(x_1, x_2)$ называют ее преобразование Радона $\tilde{p}(\beta, \gamma)$, определяемое интегрированием функции $f(x_1, x_2)$ вдоль лучей, заданных с помощью параметров β, γ. Для системы веерных лучей параметр β определяет угол между осью x_2 и центральным лучом в пучке лучей, источник которых расположен на окружности радиуса L, а параметр γ, $-\gamma_m \leqslant \gamma \leqslant \gamma_m$, определяет угол отклонения данного луча от центрального луча в пучке (который проходит через начало координат). Задача восстановления изображения по проекциям заключается в отыскании функции $f(x_1, x_2)$ по заданной функции $p(\beta, \gamma)$.

Используя изложенную в [2, 3] методику перехода от параллельных лучей к веерным, формулу восстановления можно представить в виде

$$f(x_1, x_2) = \frac{L}{2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(\beta, \gamma) |R| \exp(2\pi i R \sin(\gamma_0 - \gamma))\, dR d\gamma d\beta, \qquad (1)$$

где $\gamma_0 = \gamma_0(x_1, x_2, \beta)$ — параметр луча, проходящего через точку с координатами (x_1, x_2). $S = S(x_1, x_2, \beta)$ — расстояние от источника лучей до восстанавливаемой точки, $p(\beta, \gamma) = \tilde{p}(\beta, \gamma)\cos\gamma$.

Существуют различные подходы, реализующие соотношение (1). В данной статье предлагается подход, в котором внутренний интеграл по переменной γ рассматривается как свертка фу:.кции $p(\beta, \gamma)$ с ядром $K(\gamma)$, определяемым по формуле

$$K(\gamma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |R| \exp(2\pi i R \sin\gamma)\, dR. \tag{2}$$

Яд»о (2) относится к классу обобщенных функций и на практике при вычислениях его заменяют некоторым регулярным аналогом, построенном с помощью аппроксимации функции $|R|$. Обычно используется умножение функции $|R|$ на некоторую финитную функцию, что отрицательно сказывается на восстановлении высокочастотных составляющих $f(x_1, x_2)$.

Основным результатом работы является применение аппроксимации частотной характеристики ядра в виде

$$W(R) = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \exp(-|R|\varepsilon)), \tag{3}$$

которая при $\varepsilon \to 0$ стремится к функции $|R|$, и получение на базе этого формулы восстановления в следующем виде:

$$f(x_1, x_2) = \frac{L}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi^2 S^2}\left[\int\limits_{G_1} \frac{p(\beta, \gamma_0) - p(\beta, \gamma_0 + y)}{\dfrac{\varepsilon^2}{4\pi^2 S^2} + \sin^2 y}\, dy + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{G_2} \frac{p(\beta, \gamma_0) - p(\beta, \gamma_0 + y)}{\sin^2 y}\, dy\right] d\beta, \tag{4}$$

где $G_1 = (-\eta, \eta)$, $G_2 = (-\pi/2 - \gamma_0, -\eta) \cup (\eta, \pi/2 - \gamma_0)$, $\eta > 0$ — малая величина.

Докажем соотношение (4).

Подставляя в (1) вместо функции $|R|$ ее аппроксимацию (3) и производя интегрирование внутреннего интервала в (1), получаем представление интеграла по γ в (1) в виде свертки

$$g(\beta, \gamma_0) = \frac{1}{\varepsilon S}\, p(\beta, \gamma_0) - 2\int\limits_{-\gamma_m}^{\gamma_m} \frac{p(\beta, \gamma)}{\varepsilon^2 + 4\pi^2 S^2 \sin^2(\gamma_0 - \gamma)}\, d\gamma. \tag{5}$$

В силу финитности функции $p(\beta, \gamma)$ интервал интегрирования по γ далее заменим на $[-\pi/2, \pi/2]$. Сделаем в (5) замену переменных $\gamma_0 - \gamma = y$ и из соотношения

$$2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\varepsilon^2 + 4\pi^2 S^2 \sin^2 x)^{-1}\, dx = \frac{1}{\varepsilon S}\left(\frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 S^2} + 1\right)^{-1/2} + O(\varepsilon) \tag{6}$$

определим $\dfrac{1}{\varepsilon S}$, которое подставим в (5). Получим

$$g(\beta, \gamma_0) = \frac{1}{2\pi^2 S^2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{p(\beta, \gamma_0) - p(\beta, \gamma_0 + y)}{\dfrac{\varepsilon^2}{4\pi^2 S^2} + \sin^2 y}\, dy + O(\varepsilon). \tag{7}$$

Выделим в (7) области интегрирования G_1 и G_2. Так как в области G_2 $\sin^2 y \geqslant \sin^2\eta$, числитель в (7) ограничен, то нетрудно доказать равномерную непрерывность по ε подынтегрального выражения в (7) в области G_2 и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$g(\beta, \gamma_0) = \frac{1}{2\pi^2 S^2}\left[\int\limits_{G_1} \frac{p(\beta, \gamma_0) - p(\beta, \gamma_0 + y)}{\frac{\varepsilon^2}{4\pi^2 S^2} + \sin^2 y}\, dy + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{G_2} \frac{p(\beta, \gamma_0) - p(\beta, \gamma_0 + y)}{\sin^2 y}\, dy\right]. \qquad (8)$$

Далее, согласно (1) формула восстановления будет иметь вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{L}{2}\int\limits_0^{2\pi} g(\beta, \gamma_0)\, d\beta, \qquad (9)$$

что соответствует доказываемому выражению (4).

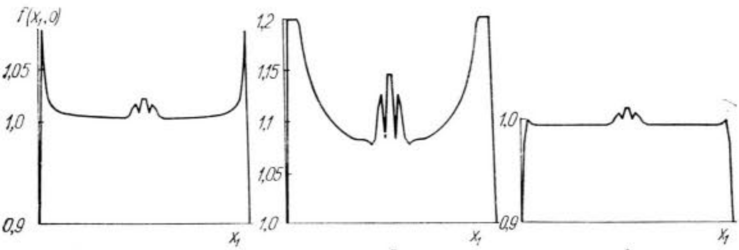
Отметим, что получить предел при $\varepsilon \to 0$ в первом слагаемом формулы (8) в общем случае не удастся, так как рассматриваемая задача некорректна. При нахождении этого предела интеграл становится сингулярным и реализация его вычисления на ЦВМ связана с определенными трудностями. Именно конечная величина ε в первом слагаемом в (8) позволяет проводить вычисления по этой формуле на ЦВМ.

Из (8) и (9) можно получить формулы восстановления с некоторыми известными ядрами. Так, отбрасывая в (8) первое слагаемое и применяя формулу прямоугольников для численного интегрирования с шагом $h = 2\Delta$, где Δ — интервал дискретизации функции $p(\beta, \gamma)$ по γ, получаем формулу восстановления с ядром Рамачандрана—Лакшминараянана (при $\eta = \Delta$). Если же при численном интегрировании использовать кусочно-постоянную аппроксимацию функции $p(\beta, \gamma)$ и положить $h = \Delta$, $\eta = \Delta/2$, то получим формулу восстановления с ядром Шеппа—Логана.

Проанализируем соотношение (8). Если $p(\beta, \gamma)$ дважды дифференцируема по γ при $\gamma \in (\gamma_0 - \eta, \gamma_0 + \eta)$, то в (8) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить следующее представление для функции $g(\beta, \gamma_0)$:

$$g(\beta, \gamma_0) = \frac{1}{2\pi^2 S^2}\int\limits_{-(\gamma_m + \gamma_0)}^{\gamma_m - \gamma_0} \frac{p(\beta, \gamma_0) - p(\beta, \gamma_0 + y)}{\sin^2 y}\, dy. \qquad (10)$$

В случае, когда в точке γ_0 функция $p(\beta, \gamma)$ или ее первая производная терпят разрыв, корректность перехода к пределу по ε остается открытой.



а *б* *в*

При этом величину ε можно рассматривать как регуляризирующий параметр

В случае, если возможно право- и левостороннее разложение в ряд Тейлора, можно получить формулу для $g(\beta, \gamma_0)$, в которой отброшены члены порядка η^2:

$$g(\beta, \gamma_0) = \frac{1}{2\pi^2 S^2}\left[a p_1(\beta, \gamma_0) - p_2(\beta, \gamma_0)\frac{\eta}{2} + \int\limits_{G_2} \frac{p(\beta, \gamma_0) - p(\beta, \gamma_0 + y)}{\sin^2 y}\, dy\right], \qquad (11)$$

где $a = \ln \frac{\varepsilon}{2\pi S}$, $p_1(\beta, \gamma) = p'_+(\beta, \gamma_0) - p'_-(\beta, \gamma_0)$, $p_2(\beta, \gamma_0) = p''_+(\beta, \gamma_0) + p''_-(\beta, \gamma_0)$.

На рисунке представлены графики функции $f(x_1, x_2)$ при $x_2 = 0$, восстановленной при использовании ядра Шеппа—Логана (*а*) и формулы (11) при значениях параметра $a = -5$ (*б*) и $a = 1$ (*в*).

Анализ результатов показывает, что при использовании высокочастотного ядра можно улучшить отображение высокочастотных составляющих функции $f(x_1, x_2)$, тем самым повысив разрешающую способность алгоритма восстановления. Целесообразно также ввести зависимость величины a от значений $p(\beta, \gamma)$ и ее производной $p'(\beta, \gamma)$, а именно, уменьшать a в тех областях, где значение производной значительно, и наоборот.

1. *Радон И.* Об определении функций по их интегралам вдоль некоторых многообразий / С. Хелгасон. Преобразование Радона.— М. : Мир, 1983.— С. 134—148.
2. *Скаддер Г. Дж.* Введение в машинную томографию // Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике.— 1978.— **66**, № 6.— С. 5—16.
3. *Луитт Р. М.* Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований // Там же.— 1983.— 71, № 3.— С. 125—147.
4. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии.— М. : Мир, 1983.— 349 с.
5. *Введение* в современную томографию (методы, средства, клинические исследования) / Под общей ред. К. С. Тернового, М. В. Синькова.— Киев : Наук. думка, 1983.— 231 с.

Ин-т пробл. моделирования в энергетике
АН УССР, Киев

Получено 31.10.85,
после доработки — 16.03.87