УДК 512.99

В. Ф. Ковалев, И. П. Мельниченко

Бигармонические потенциалы и плоские изотропные поля смещений

В результате плоской упругой деформации новые (x^0, y^0) координаты точек плоского сечения упругой среды могут быть определены через декартовы координаты точек (x, y) того же сечения до деформации, если известны функции смещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, так что $x^0 = x + u(x, y)$, $y^0 = y + v(x, y)$.

Для изотропных тел в пределах действия закона Гука (малые деформации) функции смещений удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta u + \nu \partial\Theta/\partial x = 0, \tag{1}$$

$$\Delta v + \nu \partial\Theta/\partial y = 0, \tag{2}$$

где ν — некоторая положительная постоянная, зависящая от упругих свойств среды, а $\Theta(x, y)$ — функция, описывающая поверхностное расширение (см., например, [1, с. 47]), $\Theta = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y$. При этом функции смещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются бигармоническими, а функция поверхностного расширения $\Theta(x, y)$ — гармонической.

Покажем, как плоские поля смещений малых деформаций связаны с бигармоническими потенциалами в алгебре B, введенной в [2]. Эта алгебра обладает базисом $\{1, \varepsilon\}$ и нильпотентным элементом ω с соотношениями $\varepsilon^2 = 1 + 2i\varepsilon$, $\omega = \varepsilon - i$, $\omega^2 = 0$.

Пусть $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — аналитические функции в некоторой области D комплексной плоскости $z = x + iy$. Обозначим через $\hat{D}$ образ области D в отображении $z = x + iy \mapsto x + \varepsilon y = \zeta \in B$, а через $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$— главные аналитические продолжения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в область $\hat{D}$.

Рассмотрим функцию

$$(\zeta) = \varphi(\zeta) + \omega\psi(z), \tag{3}$$

которую будем называть бигармоническим потенциалом. Пусть $\varphi_1(x, y)$, $\psi_1(x, y)$ — действительные, а $\varphi_2(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ — мнимые части соответственно функций $\varphi(x + iy)$ и $\psi(x + iy)$.

Из работы [2] легко видеть, что функция $f(\zeta)$ представима в виде

$$f(x + \varepsilon y) = f_1(x, y) + if_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y) + i\varepsilon f_4(x, y),$$

где $f_1(x, y) = \varphi_1(x, y) - y\, \partial\varphi_1(x, y)/\partial y + \psi_2(x, y)$, $f_2(x, y) = \varphi_2(x, y) - y\partial\varphi_2(x, y)/\partial y - \psi_1(x, y)$, $f_3(x, y) = y\partial\varphi_2(x, y)/\partial y + \psi_1(x, y)$, $f_4(x, y) = -y\partial\varphi_1(x, y)/\partial y + \psi_2(x, y)$.

Пусть область $\hat{D}$ правильная в направлении оси Oy [3, с. 396]. Тогд как видно из последних формул, все компоненты f_1, f_2, f_3, f_4 бигармоническ го потенциала $f(\zeta)$ бигармоничны в области $\hat{D}$. Пары (f_1, f_4) и (f_2, f_3) назове бигармонически сопряженными парами.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть f_1, f_2, f_3, f_4 — указанные выше компоненты бига монического потенциала в $\hat{D}$, ν — положительная постоянная, а n — одно чисел 1, 2, 3, 4. Пусть m и k таковы, что (f_m, f_k) является той из сопряже ных гармонических пар (f_1, f_4) и (f_2, f_3), которая не содержит функцию f_n.*

Тогда существуют зависящие только от n и ν постоянные p и s таки что f_n и $nf_m + sf_k$, взятые в качестве $u(x, y)$ и $v(x, y)$ (или $v(x, y)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют в D системе (1), (2).

Положим, к примеру, $n = 3$ и $v(x, y) = f_3(x, y)$. Покажем, что тог найдутся постоянные p и s такие, что функции $v = f_3$ и $u = pf_1 + sf_4$ в удовлетворяют системе (1), (2).

Подставляя указанные u и v в систему (1), (2), получаем

$$p\Delta f_1 + s\Delta f_4 + \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial f_1}{\partial x} + s\frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) = 0, \qquad (4)$$

$$\Delta f_3 + \nu \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial f_1}{\partial x} + s\frac{\partial f_4}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) = 0. \qquad (5)$$

Преобразуем уравнение (4). Так как f_1, f_2, f_3, f_4 являются компонентами би гармонического потенциала, то справедливы условия Коши—Римана [2

$$\partial f_1/\partial y = \partial f_3/\partial x, \quad \partial f_3/\partial y = \partial f_1/\partial x - 2\partial f_4/\partial x,$$
$$\partial f_2/\partial y = \partial f_4/\partial x, \quad \partial f_4/\partial y = \partial f_2/\partial x + 2\partial f_3/\partial x. \qquad (6)$$

Использовав условия (6), выразим вторые производные $f_4(x, y)$ через прои водные от компоненты $f_1(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}.$$

Подставим $\partial^2 f_4/\partial x^2$ и $\partial^2 f_4/\partial y^2$ в уравнение (4), учитывая также, что соглас но первому уравнению системы (6) $\partial^2 f_3/\partial x\partial y = \partial^2 f_1/\partial y^2$. Тогда будем имет

$$\left(p + s + \nu p + \frac{\nu s}{2}\right)\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \left(p + s - \frac{\nu s}{2} + \nu\right)\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0. \qquad (7)$$

Приравняем нулю коэффициенты уравнения (7):

$$p + s + \nu p + \nu s/2 = 0, \quad p + s - \nu s/2 + \nu = 0. \qquad (8)$$

Из системы линейных уравнений (8) находим

$$p = -(2 + \nu)/\nu, \quad s = 2(1 + \nu)/\nu. \qquad (9)$$

Остается показать, что при этих значениях постоянных p и s удовлетворя ется также и уравнение (5).

Из условий (6) имеем

$$\frac{\partial^2 f_4}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5), получаем

$$\left(1 + \nu p + \frac{\nu s}{2}\right)\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{\nu s}{2} + \nu\right)\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = 0.$$

Из (9) видно, что последнее равенство есть тождество.

Итак, функции

$$v(x, y) = f_3(x, y) \text{ и } u(x, y) = -\frac{2+\nu}{\nu} f_1(x, y) + \frac{2(1+\nu)}{\nu} f_4(x, y),$$

удовлетворяют системе (4), (5), а потому и системе (1), (2).

Выбирая в качестве функции $v(x, y)$ другие компоненты бигармонического потенциала и проводя аналогичное рассуждение, получаем следующие формулы для функции $u(x, y)$:

$$u(x, y) = \frac{2}{\nu} f_1(x, y) - \frac{2+\nu}{\nu} f_4(x, y) \text{ при } v(x, y) = f_2(x, y),$$

$$u(x, y) = -\frac{2+\nu}{\nu} f_2(x, y) - \frac{2(1+\nu)}{\nu} f_3(x, y) \text{ при } v(x, y) = f_4(x, y),$$

$$u(x, y) = -\frac{2}{\nu} f_2(x, y) - \frac{2+\nu}{\nu} f_3(x, y) \text{ при } v(x, y) = f_1(x, y).$$

Таким же путем утверждение теоремы доказывается и в случае, когда $u(x, y) = f_n(x, y)$ при любом $n = 1, 2, 3, 4$.

Сопряженность действительной и мнимой частей аналитической функции комплексного переменного реализуется в физических свойствах — рассматриваемые в паре функции $\mathrm{Re} f(z)$ и $\mathrm{Im} f(z)$ задают, например, в гидромеханике потенциал скоростей и соответствующую им функцию тока. Доказанная теорема фиксирует идейно аналогичную картину для бигармонических потенциалов $f(\zeta)$ по отношению к плоской теории упругости.

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости: 4-е изд.— М. : Изд-во АН СССР, 1954.— 647 с.
2. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 8.— С. 25—27.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1977.— 736 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 29.09.86