УДК 519.21

Г. П. Буцан, М. Ю. Козаченко

Предельная теорема для параметрических стохастических операторных систем

В данной работе используются обозначения, принятые в [1], и изучается вопрос, когда для стохастической системы Z_s^t со значениями в $G_2(H, \Omega)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \leqslant \infty$, существует в $G_2(H, \Omega) = \sigma_2(H, \Omega) + I$ и не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ предел

$$X_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \Pi Z_{t_{k-1}}^{t_k}. \tag{1}$$

В силу указанных свойств X_s^t представляет собой эволюционную стохастическую систему, так как удовлетворяет эволюционному уравнению

$$X_s^\tau X_\tau^t = X_s^t, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T < \infty. \tag{2}$$

Обозначим $MZ_s^t = z_s^t$, $\Delta_n[0, s] = \{0 = \theta_0 \leqslant \theta_1 \leqslant \ldots \leqslant \theta_{p_n} = s\}$, $\Delta_n[s, t] = \{s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n} = t\}$, $\delta_n = \max_{k,i}\{\theta_i - \theta_{i-1}, t_k - t_{k-1}\}$, $x_0^t(n) = \prod_{i=1}^{p_n} z_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \prod_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k}$, $x_s^t(n) = \prod_{k=1}^{m_n} z_{t_{k-1}}^{t_k}$.

Теорема. *Если система Z_s^t удовлетворяет следующим условиям:*

1) *при* $0 \leqslant s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n} = t \leqslant T$, $Z_{t_{k-1}}^{t_k}$ *независимы;*

2) $\forall \tau \in [0, T]$, $\exists Z_{\tau-0}^\tau, Z_\tau^{\tau+0} \in G_2(H, \Omega): Z_\tau^\tau = I$, $Z_{\tau-0}^\tau = I \vee Z_\tau^{\tau+0} = 1$;

3) $\forall 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \exists \lim\limits_{\delta_n \to 0} x_s^t(n) = x_s^t \in G_2(H)$, *который не зависит от измельчающейся последовательности разбиений* $\Delta_n[s, t]$, *причем* $\gamma_n^{(s)} = \sup\limits_k |x_0^{t_k} - x_0^{t_k}(n)|_2 \to 0$ *при* $\delta_n \to 0$ *и* $\forall \tau \in [0, T] : (z_{\tau-0}^{\tau})^{-1}$, $(z_{\tau}^{\tau+0})^{-1}$, $x_{\tau-0}^{\tau}$, $x_{\tau}^{\tau+0}$, $(x_{\tau-0}^{\tau})^{-1}$, $(x_{\tau}^{\tau+0})^{-1} \in X(H)$;

4) $\exists \lim\limits_{\delta_n \to 0} \sum\limits_{k=1}^{m_n} (Z_{t_{k-1}}^{t_k} - z_{t_{k-1}}^{t_k}) = \check{Y}_s^t \in G_2(H, \Omega)$, *который не зависит от измельчающейся последовательности разбиений* $\Delta_n[s, t]$, *то предел* (1) *существует в* $G_2(H, \Omega)$ *и не зависит от последовательности разбиений* $\Delta_n[s, t]$.

Доказательство. Покажем, что справедливо вспомогательное соотношение

$$\forall \tau \in [0, T] : x_{\tau-0}^{\tau} = z_{\tau-0}^{\tau} \wedge x_{\tau}^{\tau+0} = z_{\tau}^{\tau+0}. \tag{3}$$

Для доказательства (3) рассмотрим $\tilde{x}_s^t = \lim\limits_{\delta_n \to 0} \prod\limits_{k=1}^{m_n - 1} z_{t_{k-1}}^{t_k}$. В силу условия 3 этот предел существует и не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$. Поэтому x_s^t удовлетворяет эволюционному уравнению (2) и в силу условия 3 при $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ существует $\lim\limits_{\tau \uparrow t} x_s^{\tau} = x_s^{\tau-0}$. Покажем, что $x_s^{t-0} = \tilde{x}_s^t$. Действительно, при $\tau_k \uparrow t$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_\varepsilon : |x_s^{t-0} - x_s^{\tau_{k_\varepsilon}}| < \varepsilon/2$, далее, $\exists \Delta_{n_{k_\varepsilon}}[s, \tau_{k_\varepsilon}] = \{s = \hat{t}_0 \leqslant \hat{t}_1 \leqslant \ldots \leqslant \hat{t}_{r_m} = \tau_{k\,\varepsilon}\} : |x_s^{\tau_{k_\varepsilon}} - \prod\limits_{i=1}^{r_m} z_{\hat{t}_{i-1}}^{\hat{t}_i}|_2 < \varepsilon/2$. Поэтому $|x_s^{t-0} - \prod\limits_{i=1}^{r_m} z_{\hat{t}_{i-1}}^{\hat{t}_i}|_2 < \varepsilon$ и из доказанной выше независимости $\tilde{x}_s^t$ от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ получаем в пределе требуемое соотношение $x_s^{t-0} = \tilde{x}_s^t$. Теперь соответствующим предельным переходом получаем равенство $x_s^t = \tilde{x}_s^t z_{t-0}^t = x_s^{t-0} x_{t-0}^t$, которое в силу предыдущего влечет следующее равенство $x_s^{t-0} z_{t-0}^t = x_s^{t-0} x_{t-0}^t$. Переходя в нем к пределу по $s \uparrow t$ и учитывая очевидное (в силу условия 3) равенство $x_{t-0}^{t-0} = I$, находим первое из равенств (3). Второе доказывается аналогично.

Убедимся в справедливости следующего соотношения:

$$\forall 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T : (x_s^t)^{-1} \in X(H), \quad |x_s^t|_2 < c_1(T) < \infty, \quad |(x_s^t)^{-1}|_2 < c_2(T) < \infty. \tag{4}$$

Если бы первое свойство (4) не выполнялось, то в силу эволюционности x_s^t, не выполнялось бы либо $(x_s^{(t+s)/2})^{-1} \in X(H)$ либо $(x_{(t+s)/2}^t)^{-1} \in X(H)$ и т. д., и мы получили бы последовательности $s_k < t_k$, сходящиеся к некоторой точке $\tau \in [0, T]$, такие что $(x_{s_k}^{t_k})^{-1} \notin X(H)$. Без ограничения общности можно считать, что для этих последовательностей имеются три возможности: $s_k \leqslant t_k \leqslant \tau \vee s_k \leqslant \tau \leqslant t_k \vee \tau \leqslant s_k \leqslant t_k$. При первой и третьей из них получаем противоречие с очевидным (в силу условия 3 соотношением $x_{\tau-0}^{\tau-0} = x_{\tau+0}^{\tau+0} = I$, при втором — с равенством $(x_{\tau-0}^{\tau+0})^{-1} = (x_{\tau}^{\tau+0})^{-1} (x_{\tau-0}^{\tau})^{-1}$.

Докажем теперь третье соотношение в (4 (второе доказывается аналогично). Для этого предположим, что $|(x_s^t)^{-1}|_2$ не ограничена. Тогда найдутся на $[0, T]$ такие последовательности $s_k \leqslant t_k$, сходящиеся к некоторой точке $\tau \in [0, T]$, что $|(x_{s_k}^{t_k})^{-1}|_2 \to \infty$ при $k \to \infty$. Теперь в каждом из трех рассмотренных выше случаев для аналогичных последовательностей получаем аналогичные противоречия с уже указанными равенствами.

Теперь получим оценки

$$\sup_{k,n} |x_0^{t_k}(n)|_2 = c_3(T) < \infty, \quad \sup_{k,n} |(x_0^{t_k}(n))^{-1}|_2 = c_4(T) < \infty. \tag{5}$$

Для доказательства первой из них используем неравенство

$$\sup_{k,n}|x_0^{t_k}(n)|_2 \leqslant \sup_{k,n}|x_0^{t_k}-x_0^{t_k}(n)|_2+\sup_k|x_0^{t_k}|_2,$$

из которого в силу (4) и равномерной сходимости в условии 3 и вытекает требуемое.

Предположим теперь, что $\sup_{k,n}|(x_0^{t_k}(n))^{-1}|_2=\infty$. Тогда найдется в $[0, T]$ такая последовательность t_{k_n}, сходящаяся при $n\to\infty$ к некоторой точке $\tau\in[0, T]$, что $|(x_0^{t_{k_n}}(n)^{-1}|_2\to\infty$ при $n\to\infty$. Отсюда $\inf_{|y|_1\leqslant 1}|x_0^{t_{k_n}}(n)y|_1\to$ $\to 0$ при $n\to\infty$ и из очевидного неравенства в силу условия 3

$$\inf_{|y|_1\leqslant 1}|x_0^{t_{k_n}}y|_1\leqslant|x_0^{t_{k_n}}-x_0^{t_{k_n}}(n)|_2+\inf_{|y|_1\leqslant 1}|x_0^{t_{k_n}}(n)y|_1$$

получаем соотношение $\inf_{|y|_1\leqslant 1}|x_0^{t_{k_n}}y|_1\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. $|(x_0^{t_{k_n}})^{-1}|_2\to\infty$, что противоречит (4). Итак, оценки (5) справедливы.

Заметим далее, что из условия (2), оценок (4), (5) и очевидного неравенства

$$\sup_k|(x_0^{t_k})^{-1}-(x_0^{t_k}(n))^{-1}|_2\leqslant\sup_{k,n}\{|(x_0^{t_k})^{-1}|_2,\quad|(x_0^{t_k}(n))^{-1}\}\sup_k|x_0^{t_k}-x_0^{t_k}(n)|_2$$

вытекает следующее сооотношение:

$$\sup_k|(x_0^{t_k})^{-1}-(x_0^{t_k}(n))^{-1}|_2\to 0,\quad n\to\infty. \tag{6}$$

Покажем, что $\forall\tau\in[0, T]$ справедливы равенства

$$\check{Y}_{\tau-0}^{\tau}=Z_{\tau-0}^{\tau}-z_{\tau-0}^{\tau},\quad \check{Y}_{\tau}^{\tau+0}=Z_{\tau}^{\tau+0}-z_{\tau}^{\tau+0}\,(\mathrm{mod}\,P) \tag{7}$$

(поскольку их доказательства аналогичны, докажем первое из них).

Для этого рассмотрим систему

$$\tilde{Y}_s^t=\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{m_n-1}(Z_{t_{k-1}}^{t_k}-z_{t_{k-1}}^{t_k}).$$

В силу условий 2 и 4 определение $\tilde{Y}_s^t$ не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$, и это означает, в частности, что $\forall\varepsilon>0\,\exists n_\varepsilon\forall\hat{\Delta}[s, t]\supset$ $\supset\Delta_{n_\varepsilon}[s, t]$:

$$\Big|\sum_{k=1}^{r_m-1}(Z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k}-z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k})-\tilde{Y}_s^t\Big|_4<\varepsilon,\quad \hat{\Delta}[s, t]=\{s=\hat{t}_0\leqslant\hat{t}_1\leqslant\ldots\leqslant\hat{t}_{r_m}=t\}.$$

Предположим, что $\tilde{Y}_{\tau-0}^{\tau}\neq 0\,(\mathrm{mod}\,P)$ для некоторой точки $\tau\in[0, T]$. Тогда найдется такое $\varepsilon>0$ и последовательность точек $\tau_k\uparrow\tau$ при $k\to\infty$ из отрезка $[0, T]$, что $|\tilde{Y}_{\tau_k}^{\tau}|_4>\varepsilon$. Рассмотрим теперь некоторую измельчающуюся монотонную последовательность разбиений $\Delta_n[s, t]$ такую, что $t_k\in$ $\in\Delta_n[s, t]$ начиная с некоторого n. Тогда найдутся такие n_k, что $n\geqslant n_k$ и любых разбиениях $\hat{\Delta}[s, t]\supseteq\Delta_{n_k}[s, t]$ справедливо неравенство

$$\Big|\tilde{Y}_{\tau_k}^{\tau}-\sum_{k=1}^{r_m-1}(Z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k}-z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k})\Big|_4<\varepsilon/2, \tag{8}$$

откуда, с одной стороны,

$$\sum_{k=1}^{r_m-1}|Z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k}-z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k}|_4^2=\Big|\sum_{k=1}^{r_m-1}(Z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k}-z_{\hat{t}_{k-1}}^{\hat{t}_k})\Big|_4^2\leqslant(|\tilde{Y}_{\hat{t}_1}^{\tau}|_4+\varepsilon/2)^2, \tag{9}$$

а с другой, $|\Sigma(Z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}} - z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}})|_4 > \varepsilon/2$. Последнее неравенство влечет соотношение

$$\Sigma|(Z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}} - z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}})|_4^2 = |\Sigma Z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}} - z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}}|_4^2 > \varepsilon^2/4, \tag{10}$$

в котором сумма берется по той части разбиения $\hat{\Delta}[s, t]$, которая измельчает $[\tau_k, \tau]$.

Положим теперь $\hat{\Delta}_k^N[s, t] = \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_{n_k}[s, t]$, $\hat{\Delta}_k[s, t] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_k}[s, t]$. Тогда по предыдущему неравенства (2) выполняются также и для $\hat{\Delta}_k^N[s, t]$, а предельный переход по $N \to \infty$ с учетом (9) дает $\sum_{k=1}^{\infty} |Z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}} - z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}}|_4^2 < \infty$, в то время как из (10) вытекает неравенство $\sum_{i=k-1}^{\infty} |Z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}} - z^{\hat{t}_k}_{\hat{t}_{k-1}}|_4^2 > \varepsilon^2/4$, где $\hat{t}_{k-1} = \tau_k$. Полученное противоречие показывает, что $\forall \tau \in [0, T]\ \tilde{Y}^{\tau}_{\tau-0} = 0 \pmod P$. Переходя к пределу по $s \uparrow t$ в очевидном равенстве $\hat{Y}^t_s = Z^t_{t-0} + z^t_{t-0} + \tilde{Y}^t_s$, убеждаемся в справедливости первого из равенств (7).

Воспользовавшись, наконец, условиями 2, 3 и (7), получаем, что выполняется следующее свойство:

$$\forall \tau \in [0, T] : (Z^{\tau}_{\tau-0} = I,\ z^{\tau}_{\tau-0} = I,\ x^{\tau}_{\tau-0} = I,\ \check{Y}^{\tau}_{\tau-0} = 0) \lor$$
$$\lor (Z^{\tau+0}_{\tau} = I,\ z^{\tau+0}_{\tau} = I,\ x^{\tau+0}_{\tau} = I,\ \check{Y}^{\tau+0}_{\tau} = 0) \pmod P, \tag{11}$$

т. е. в каждой точке $\tau \in [0, T]$ либо все указанные системы одновременно непрерывны слева, либо все они непрерывны справа.

Отметим теперь, что в силу условия 4 $\check{Y}^t_s$ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\check{Y}^{\tau}_s + \check{Y}^t_{\tau} = \check{Y}^t_s, \quad \check{Y}^{\tau}_{\tau} = 0, \pmod P, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T < \infty, \tag{12}$$

а также очевидному свойству

$$M\check{Y}^t_s = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty, \tag{13}$$

которое мы уже не раз использовали выше. Кроме того, справедливо следующее условие: 5) при $0 \leqslant s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n} = T$, $\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}}$ независимы.

Легко видеть, что любая система $\overline{Y}^t_s$, удовлетворяющая свойствам (12), (13) и условию 5, удовлетворяет и соотношению

$$\prod_{i=p}^{r} |I + \overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}|_5^2 \leqslant c_5(T) < \infty, \tag{14}$$

Действительно, используя (13) и свойства $|\cdot|_5$ [1, с. 52], получим неравенство

$$\prod_{i=p}^{r} |I + \overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}|_5^2 \leqslant \prod_{i=p}^{r} (1 + |\overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}|_5^2) \leqslant \exp\left\{\sum_{i=p}^{r} |\overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}|_5^2\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\sum_{i=p}^{r} |\overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}|_4^2\right\} \leqslant \exp|\overline{Y}^T_0|_4^2 = c_5(T) < \infty.$$

Докажем также, что справедлива следующая оценка:

$$\prod_{i=p}^{r} |x_0^{t_{i-1}}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1}|_5 \leqslant c_6(T) < \infty. \tag{15}$$

Для этого, используя известные свойства норм $|\cdot|_4$ и $|\cdot|_5$ [1, с. 52] и оценки (5), запишем неравенство

$$\prod_{i=p}^{r} | x_0^{t_{i-1}}(n) Z_{t_{i-1}}^{t_i} (x_0^{t_i}(n))^{-1} |_5^2 = \prod_{i=p}^{r} | x_0^{t_{i-1}}(n) (Z_{t_{i-1}}^{t_i} - z_{t_{i-1}}^{t_i}) (x_0^{t_i}(n))^{-1} + I |_5^2 \leqslant$$

$$\leqslant \exp 2 \Big\{ \sum_{i=p}^{r} | x_0^{t_{i-1}}(n) (Z_{t_{i-1}}^{t_i} - z_{t_{i-1}}^{t_i}) (x_0^{t_i}(n))^{-1} |_4 \Big\} \leqslant \exp \Big\{ c_3^2(T) c_4^2(T) \times$$

$$\times \sum_{i=p}^{r} | Z_{t_{i-1}}^{t_i} - z_{t_{i-1}}^{t_i} |_4^2 \Big\} \leqslant c_7(T) \exp \Big\{ \sum_{i=p}^{r} (| Z_{t_{i-1}}^{t_i} - z_{t_{i-1}}^{t_i} - \check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} |_4^2 + | \check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} |_4^2) \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant c_7(T) \exp \Big\{ \sum_{i=1}^{m_n} | Z_{t_{i-1}}^{t_i} - z_{t_{i-1}}^{t_i} - \check{Y}_{t_{i-1}}^{t_i} |_4^2 + | \check{Y}_s^t |_4^2 \Big\} =$$

$$= c_7(T) \exp \Big\{ \Big| \sum_{i=1}^{m_n} (Z_{t_{i-1}}^{t_i} - z_{t_{i-1}}^{t_i}) - \check{Y}_s^t \Big|_4^2 + | \check{Y}_s^t |_4^2 \Big\},$$

где $c_7(T)$ — некоторая константа.

Из последнего неравенства в силу условия 4 оценка (15) получается очевидным образом.

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству теоремы, покажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма. *При $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ существует в $|\cdot|_4$ предел*

$$\overline{Y}_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} x_0^{t_{k-1}} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^{t_k})^{-1}, \tag{16}$$

который не зависит от измельчающейся последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$. Этот предел естественно назвать стохастическим интегралом и обозначить $\int_s^t x_0^\tau d\check{Y}_0^\tau (x_0^\tau)^{-1}$.

Доказательство. Аналогично [2, 3] достаточно показать, что выражение

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} x_0^{t_{k-1}} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^{t_k})^{-1} - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_0^{s_{i-1}^k} \check{Y}_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} (x_0^{s_i^k})^{-1} \Big|_4 \tag{17}$$

стремится к нулю при $\delta_n \to 0$. Здесь $\Delta_n[s, t] = \{s = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n} = t\}$, $\Delta_r[s, t] = \bigcup_{k=1}^{m_n} \Delta_{r_k}[t_{k-1}, t_k]$, $\Delta_{r_k}[t_{k-1}, t_k] = \{t_{k-1} = s_0^k \leqslant s_1^k \leqslant \ldots \leqslant s_{r_k}^k = t_k\}$.

Воспользовавшись оценками (5), представим выражение (17) в виде

$$\Big| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_0^{t_{k-1}} \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} (x_0^{t_k})^{-1} - \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_0^{s_{i-1}} \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} (x_0^{s_i})^{-1} \Big|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} (x_0^{t_{k-1}} - x_0^{s_{i-1}}) \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} (x_0^{t_k})^{-1} |_4^2 + 2 \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_0^{s_{i-1}} \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} [(x_0^{t_k})^{-1} -$$

$$- (x_0^{s_i})^{-1}] \Big|_4^2 \leqslant 2c_1(T) \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | (x_0^{t_{k-1}} - x_0^{s_{i-1}}) \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} |_4^2 + 2c_2(T) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} | \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} [(x_0^{t_k})^{-1} - (x_0^{s_i})^{-1}] |_4^2 \leqslant c_8(T) \Big(\Big| \sum_{k=1}^{m_n} x_0^{t_{k-1}} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} x_0^{s_i-1} \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} \Big|_4^2 + \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} \check{Y}_{s_{i-1}}^{s_i} (x_0^{s_i})^{-1} - \sum_{k=1}^{m_n} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^{t_k})^{-1} \Big|_4^2. \quad (18)$$

Здесь $c_8(T)$ — некоторая константа, а верхние индексы s_i^k опущены.

Выражение в скобках в правой части неравенства (18) состоит из двух слагаемых. Первое из них представляет собой разность интегральных сумм для левого стохастического интеграла $(l)\int_s^t x_0^\tau d\check{Y}_0^\tau$, а второе — разность соответствующих интегральных сумм для правого стохастического интеграла $(r)\int_s^t d\check{Y}_0^\tau (x_0^\tau)^{-1}$.

В силу свойства (11) и результатов работы [2] оба эти интеграла существуют и их определения не зависят от измельчающейся последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$. Следовательно, правая часть неравенства (18), а вместе с ней и выражение (17) стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Переходя к доказательству теоремы, рассмотрим величину $Z_s^t(n) = \prod_{k=1}^{m_n} x_0^{t_k-1}(n) Z_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^{t_k}(n))^{-1}$. Если мы покажем, что существует в $G_2(H, \Omega)$ и не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ предел

$$X_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} Z_s^t(n), \quad (19)$$

то в силу условия (3) и свойства (6) отсюда будет вытекать существование в $G_2(H, \Omega)$ предела

$$X_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} (x_0^s(n))^{-1} Z_s^t(n)\, x_0^t(n) = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} Z_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad (20)$$

а вместе с ним и доказательство теоремы.

Для доказательства (19) заметим, что $\bar{Y}_s^t$, очевидно, в каждой точке $\tau \in [0, T]$ одновременно с $\check{Y}_s^t$ непрерывно либо слева, либо справа (в зависимости от τ), а также в силу леммы удовлетворяет свойствам (12), (13) и условию 5. На основании работы [4] существует в $G_2(H, \Omega)$ и не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ следующий предел $\lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (I + \bar{Y}_{t_{k-1}}^{t_k})$.

Покажем, что

$$\lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} (I + \bar{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}) = \lim_{\delta_n \to 0} Z_s^t(n) = \bar{X}_s^t. \quad (21)$$

Для доказательства этого равенства, аналогично работе [4], достаточно рассмотреть разбиения $\Delta_r\ [s, t] \supset \Delta_n\ [s, t]$, взятые в (17), и, воспользовавшись тривиальным неравенством $(a + b + c)^2 \leqslant 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, а также тождеством $\prod_{k=1}^{m} A_k - \prod_{k=1}^{m} B_k = \sum_{k=1}^{m} \prod_{i=1}^{k-1} A_i(A_k - B_k) \prod_{i=k+1}^{m} B_k$, оценить разность

$$\Big| \prod_{k=1}^{m_n} (I + \bar{Y}_{t_{k-1}}^{t_k}) - \prod_{k=1}^{m_n} x_0^{t_k-1}(n) Z_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^{t_k}(n))^{-1} \Big|_4^2 = \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (I +$$

$$+ \bar{Y}_{t_{i-1}}^{t_i}) [\bar{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} - x_0^{t_{k-1}}(n) (Z_{t_{k-1}}^{t_k} - z_{t_{k-1}}^{t_k}) (x_0^{t_k}(n)^{-1}] \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z_{t_{i-1}}^{t_i} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_4^2 \leqslant 3 \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (I + \bar{Y}_{t_{i-1}}^{t_i})\, x_0^{t_k-1}(n) [\bar{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} - z_{t_{k-1}}^{t_k} +$$

$$+ z^{t_k}_{t_{k-1}}] (x_0^{t_k}(n))^{-1} \prod_{i=k+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_4^2 + 3 \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) \times$$

$$\times \int_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^\tau - x_0^{t_k-1}(n)) d\check{Y}_0^\tau (x_0^{t_k}(n))^{-1} \prod_{i=k+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_4^2 +$$

$$+ 3 \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} x_0^\tau d\check{Y}_0^\tau ((x_0^\tau)^{-1} - (x_0^{t_k}(n))^{-1}) \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_4^2 . \qquad (22)$$

Воспользовавшись тем, что $\bar{Y}^t_s$ удовлетворяет свойствам (12), (13) и условию 5, представим первое слагаемое в правой части (22) в виде

$$3 \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) x_0^{t_k-1}(n) [\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} - Z^{t_k}_{t_{k-1}} + z^{t_k}_{t_{k-1}}] (x_0^{t_k}(n))^{-1} \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_4^2 + \sum_{k \neq j} M \operatorname{sp} \Big\{ \prod_{i=1}^{k-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) x_0^{t_k-1}(n) \times$$

$$\times [\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} - Z^{t_k}_{t_{k-1}} + z^{t_k}_{t_{k-1}}] (x_0^{t_k}(n))^{-1} \prod_{i=k+1}^{j-1} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} x_0^{t_j-1}(n) \times$$

$$\times (Z^{t_j}_{t_{j-1}} - z^{t_j}_{t_{j-1}}) (x_0^{t_j}(n))^{-1} \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big\}^* \Big\{ \prod_{i=1}^{k-1} (I +$$

$$+ \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) \bar{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} \prod_{i=k+1}^{j-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) x_0^{t_j-1}(n) [\check{Y}^{t_j}_{t_{j-1}} - Z^{t_j}_{t_{j-1}} + z^{t_j}_{t_{j-1}}] \times$$

$$\times (x_0^{t_j}(n))^{-1} \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big\} . \qquad (23)$$

Первое слагаемое в (23) в силу оценок (4), (14), (15), условия 4 и свойств норм $|\cdot|_4$ и $|\cdot|_5$ из [1, с. 52], ограничено величиной $3c_5(T) c_3^2(T) \times \times c_4^2(T) c_6(T) \sum_{k=1}^{m_n} |\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} - Z^{t_k}_{t_{k-1}} + z^{t_k}_{t_{k-1}}|_4^2 = c_9(T) \Big| \sum_{k=1}^{m_n} (Z^{t_k}_{t_{k-1}} - z^{t_k}_{t_{k-1}}) - \check{Y}^t_s \Big|_4^2 \to \to 0$ при $n \to \infty$.

Оценивая второе слагаемое в (23) по модулю, воспользуемся неравенством Коши — Буняковского $\Big| \sum_{i,j} M \operatorname{sp} A^* B \Big| \leqslant \sum_{i,j} M |A|_3 |B|_3 \leqslant \Big(\sum_{i,j} |A|_4^2 \Big)^{1/2} \times \times \Big(\sum_{i,j} |B|_4^2 \Big)^{1/2}$ и получим, что оно ограничено величиной

$$\sum_{k \neq j} \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) x_0^{t_k-1}(n) [\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} - Z^{t_k}_{t_{k-1}} + z^{t_k}_{t_{k-1}}] (x_0^{t_k}(n))^{-1} \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{j-1} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n)^{-1} x_0^{t_j-1}(n) (Z^{t_j}_{t_{j-1}} - z^{t_j}_{t_{j-1}}) (x_0^{t_j}(n))^{-1} \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_i-1}(n) Z^{t_i}_{t_{i-1}} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_4^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{k \neq j} \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) \bar{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} \prod_{i=k+1}^{j-1} (I + \bar{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) \times$$

$$\times x_0^{t_{j}-1}(n)\,[\check{Y}^{t_j}_{t_{j-1}} - Z^{t_j}_{t_{j-1}} + z^{t_j}_{t_{j-1}}]\,(x_0^{t_j}(n))^{-1} \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_{i-1}}(n)\, Z^{t_i}_{t_{i-1}}\,(x_0^{t_i}(n))^{-1}\,|_4^2)^{1/2}.$$

Воспользовавшись далее оценками (5), (14), (15), а также свойствами норм $|\cdot|_4$ и $|\cdot|_5$ из [1, с. 52], получим, что последнее выражение ограничено величиной

$$c_5(T)\,c_3^3(T)\,c_4^3(T)\,c_6(T)\Big(\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{j=1}^{k-1} |\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} - Z^{t_k}_{t_{k-1}} + z^{t_k}_{t_{k-1}}|_4^2\,|Z^{t_j}_{t_{j-1}} -$$

$$- z^{t_j}_{t_{j-1}}|_4^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{k-1} |\overline{Y}^{t_k}_{t_{k-1}}|_4^2\,|\check{Y}^{t_j}_{t_{j-1}} - Z^{t_j}_{t_{j-1}} + z^{t_j}_{t_{j-1}}|_4^2\Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_{10}(T)\Big[\sum_{k=1}^{m_n} |\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} - Z^{t_k}_{t_{k-1}} + z^{t_k}_{t_{k-1}}|_4^2\Big(\sum_{j=1}^{k-1} |Z^{t_j}_{t_{j-1}} - z^{t_j}_{t_{j-1}} - \check{Y}^{t_j}_{t_{j-1}}|_4^2 +$$

$$+ |\check{Y}^{t_{k-1}}_{s}|_4^2\Big)\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=1}^{m_n} |\overline{Y}^{t_k}_{t_{k-1}}|_4^2 \sum_{j=1}^{k-1} |\check{Y}^{t_j}_{t_{j-1}} - Z^{t_j}_{t_{j-1}} + z^{t_j}_{t_{j-1}}|_4^2\Big]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_{10}(T)\Big|\check{Y}^t_s - \sum_{k=1}^{m_n}(Z^{t_k}_{t_{k-1}} - z^{t_k}_{t_{k-1}})\Big|_4^2\Big(|\check{Y}^t_s - \sum_{k=1}^{m_n}(Z^{t_k}_{t_{k-1}} - z^{t_k}_{t_{k-1}})|_4 + |\check{Y}^t_s|_4\Big)\,|\overline{Y}^t_s|_4 \to 0$$

при $n \to \infty$ по условию 4. Здесь $c_{10}(T)$ — некоторая константа.

Итак, первое слагаемое в правой части (22) стремится к нулю при $n \to \infty$. Оценивая второе слагаемое, представим его в виде

$$\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\prod_{i=1}^{k-1}(I + \overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}})\Big[\int_{t_{k-1}}^{t_k}(x_0^\tau - x_0^{t_{k-1}}(n))\,d\check{Y}_0^\tau\,(x_0^{t_k}(n))^{-1}\Big] \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{m_n} x_0^{t_{i-1}}(n)\,Z^{t_i}_{t_{i-1}}\,(x_0^{t_i}(n))^{-1}\Big|_4^2 + \sum_{k\neq j} M\,\mathrm{sp}\,\Big\{\prod_{i=1}^{k-1}(I + \overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) \times$$

$$\times \Big[\int_{t_{k-1}}^{t_k}(x_0^\tau - x_0^{t_{k-1}}(n))\,d\check{Y}_0^\tau\,(x_0^{t_k}(n))^{-1} \prod_{i=k+1}^{j-1} x_0^{t_{i-1}}(n)\,Z^{t_i}_{t_{i-1}}\,(x_0^{t_i}(n))^{-1} x_0^{t_{i-1}}(n) \times$$

$$\times (Z^{t_i}_{t_{i-1}} - z^{t_i}_{t_{i-1}})\,(x_0^{t_j}(n))^{-1} \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_{i-1}}(n)\,Z^{t_i}_{t_{i-1}}\,(x_0^{t_i}(n))^{-1}\Big\}^* \Big\{\prod_{i=1}^{k-1}(I + \overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}}) \times$$

$$\times \overline{Y}^{t_k}_{t_{k-1}} \prod_{i=k+1}^{j-1}(I + \overline{Y}^{t_i}_{t_{i-1}})\Big[\int_{t_{j-1}}^{t_j}(x_0^\tau - x_0^{t_{j-1}}(n))\,d\check{Y}_0^\tau\,(x_0^{t_j}(n))^{-1}\Big] \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_{i-1}}(n)\,Z^{t_i}_{t_{i-1}}\,(x_0^{t_i}(n))^{-1}\Big\}. \qquad (24)$$

Используя теперь доказанные выше оценки, видим, что первое слагаемое в (24) ограничено величиной

$$c_{11}(T)\Big(\sum_{k=1}^{m_n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(x_0^\tau - x_0^{t_{k-1}})\,d\check{Y}_0^\tau\Big|_4^2 + \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(x_0^{t_{k-1}} - x_0^{t_{k-1}}(n))\,d\check{Y}_0^\tau\Big|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_{11}(T)\Big(\Big|(e)\int_s^t x_0^\tau d\check{Y}_0^\tau - \sum_{k=1}^{m_n} x_0^{t_{k-1}}\check{Y}^{t_k}_{t_{k-1}}\Big|_4^2 + \sup_k |x_0^{t_{k-1}} - x_0^{t_{k-1}}(n)|_2\,|\check{Y}^t_s|_4^2\Big) \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу условия 3 и свойства (11), достаточного для существования и независимости от последовательности разбиений Δ_n $[s, t]$ левого стохастического интеграла $(l) \int\limits_s^t x_0^\tau \, d\check{Y}_0^\tau$, из которой будет вытекать и использованная выше его аддитивность как функции интервала $[t_{k-1}, t_k]$.

Аналогично модуль второго слагаемого в (24) ограничен величиной

$$\sum_{k\neq j} M \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (I + \overline{Y}_{t_{i-1}}^{t_i}) \Big[\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^\tau - x_0^{t_{k-1}}(n))\, d\check{Y}_0^\tau (x_0^{t_k}(n))^{-1} \Big] \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{m_n} x_0^{t_{i-1}}(n)\, Z_{t_{i-1}}^{t_i} (x_0^{t_i}(n))^{-1} x_0^{t_{j-1}}(n) (Z_{t_{j-1}}^{t_j} - z_{t_{j-1}}^{t_j}) (x_0^{t_j}(n))^{-1} \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_{i-1}}(n)\, Z_{t_{i-1}}^{t_i} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_3 \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (I + \overline{Y}_{t_{i-1}}^{t_i})\, \overline{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} \prod_{i=k+1}^{j-1} (I + \overline{Y}_{t_{i-1}}^{t_i}) \times$$

$$\times \Big[\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} (x_0^\tau - x_0^{t_{j-1}}(n))\, d\check{Y}_0^\tau (x_0^{t_j}(n))^{-1} \Big] \prod_{i=j+1}^{m_n} x_0^{t_{i-1}}(n)\, Z_{t_{i-1}}^{t_i} (x_0^{t_i}(n))^{-1} \Big|_3 \leqslant$$

$$\leqslant c_{12}(T) \Big\{ \sum_{k\neq j} \Big(\Big| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^\tau - x_0^{t_{k-1}})\, d\check{Y}_0^\tau \Big|_4^2 + \Big| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (x_0^{t_{k-1}} - x_0^{t_{k-1}}(n))\, d\check{Y}_0^\tau \Big|_4^2 \Big) \times$$

$$\times | Z_{t_{j-1}}^{t_j} - z_{t_{j-1}}^{t_j} |_4^2 \Big\}^{1/2} \Big\{ \sum_{k\neq j} | \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} |_4^2 \Big(\Big| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} (x_0^\tau - x_0^{t_{j-1}})\, d\check{Y}_0^\tau \Big|_4^2 +$$

$$+ \Big| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} (x_0^{t_{j-1}} - x_0^{t_{j-1}}(n))\, d\check{Y}_0^\tau \Big|_4^2 \Big) \Big\}^{1/2} \leqslant c_{12}(T) \Big(\Big| (e) \int\limits_s^t x_0^\tau d\check{Y}_0^\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^{m_n} x_0^{t_{k-1}} \check{Y}_{t_{k-1}}^{t_k} \Big|_4^2 + \sup_k | x_0^{t_{k-1}} - x_0^{t_{k-1}}(n) |_2^2 | \check{Y}_s^t |_4^2 \Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\Big| \sum_{j=1}^{m_n} (Z_{t_{j-1}}^{t_j} - z_{t_{j-1}}^{t_j}) - \check{Y}_s^t \Big|_4 + | \check{Y}_s^t |_4 \Big) \Big(\Big| (e) \int\limits_s^t x_0^\tau d\check{Y}_0^\tau -$$

$$- \sum_{j=1}^{m_n} x_0^{t_{j-1}} \check{Y}_{t_{j-1}}^{t_j} \Big|_4^2 + \sup_j | x_0^{t_{j-1}} - x_0^{t_{j-1}}(n) |_2^2 | \check{Y}_s^t |_4^2 \Big)^{1/2} | \check{Y}_s^t |_4,$$

где $c_{12}(T)$ — некоторая константа. Аналогично предыдущему, правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, и второе слагаемое в правой части (22) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Оставшееся третье слагаемое в правой части (22) оценивается аналогично второму, если в соответствующем месте воспользоваться свойством (6) вместо условия 3, рассматривая правый стохастический интеграл $(r) \int\limits_s^t d\check{Y}_0^\tau (x_0^\tau)^{-1}$, необходимые свойства которого обеспечиваются соотношениями (11) и результатами работы [2].

Замечание 1. Если в условии 3 не требовать, чтобы $x_s^t \in G_2(H)$, то среднеквадратичную сходимость в (1) следует рассматривать в норме $|\cdot|_2$, а не $|\cdot|_3$ Сходимость в (19) остается в норме $|\cdot|_4$.

Замечание 2. Если вместо условий 2 и 3 потребовать условие равномерной непрерывности $| Z_s^t - I |_4 \to 0$, $| x_s^t - I |_2 \to 0$ при $t - s \to 0$ для Z_s^t

и x_s^t, то теорема остается справедливой без условия равномерной сходимости $\gamma_n^{(s)} \to 0$ при $\delta_n \to 0$.

Действительно, свойства (4) в том случае становятся очевидными, а свойства (5) и соотношение

$$\sup_{t_{k-1} \leqslant \tau \leqslant t_k} \{ | x_0^\tau - x_0^{t_{k-1}}(n) |_2, \; | (x_0^\tau)^{-1} - (x_0^{t_{k-1}}(n))^{-1} |_2 \} \to 0 \qquad (25)$$

при $\delta_n \to 0$ доказываются от противного.

Затем свойство (25) используется при оценке выражения (24) вместо условия равномерной сходимости в условии 3 и вытекающего из него свойства (6).

Отметим в заключение, что в непрерывном случае и при более жестких дополнительных ограничениях результат, аналогичный приведенной теореме, получен в работе [5].

1. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— Киев : Наук. думка, 1977.— 213 с.
2. *Буцан Г. П.* Интегральное представление мультипликативной стохастической полугруппы без условий мартингальности и непрерывности // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 5.— С. 562—568.
3. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп // Там же.— 1983.— **35**, № 2.— С. 221—224.
4. *Буцан Г. П.* О первообразных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп // Там же.— № 4.— С. 485—489.
5. *Каратаева Т. В.*, *Скороход Т. А.* Предельная теорема для произведений случайных операторов // Проблемы теории вероятностных распределений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 67—75.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 26.06.86