УДК 517.5

И. Я. Тырыгин

О неравенствах типа Турана в некоторых интегральных метриках

Пусть $T_n(t)\,(P_n(x))$ — нетривиальный тригонометрический (алгебраический) полином степени n, $n\in N$, со всеми действительными корнями, лежащими в случае алгебраического многочлена на $[-1, +1]$. В дальнейшем $\|T_n\|_p = \left\{\int\limits_0^{2\pi} |T_n(t)|^p\,dt\right\}^{1/p}$, $\|P_n\|_p = \left\{\int\limits_{-1}^{+1} |P_n(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$, $1\leqslant p<+\infty$, $\|T_n\|_\infty = \|T_n\|_C = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |T_n(t)|$, $\|P_n\|_\infty = \|P_n\|_C = \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant +1} |P_n(x)|$. Отметим, что при сделанных предположениях $T_n(t) = C\prod\limits_{i=1}^{2n}\sin\dfrac{t-t_i}{2}$, где c, $t_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1, 2n}$, $C\neq 0$, $t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_{2n}<t_1+2\pi$.

Туран [1] доказал неравенство $\|P_n'\|_C\geqslant\dfrac{\sqrt{n}}{6}\|P_n\|_C$, где константа $\dfrac{\sqrt{n}}{6}$, однако, не являлась точной. Эред [2] получил точные значения постоянной в неравенстве Турана:

$$\frac{\|P_n'\|_C}{\|P_n\|_C}\geqslant\begin{cases}\dfrac{n}{2},\ n=2, 3,\\[2ex] \dfrac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\dfrac{1}{n-1}\right)^{(n-2)/2},\ n=4\ 6, 8, \ldots,\\[2ex] \dfrac{n^2}{(n-1)\sqrt{n+1}}\left(1-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^{(n-3)/2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{(n-1)/2},\\ \qquad n=5, 7, 9, \ldots .\end{cases}$$

В. Ф. Бабенко и С. А. Пичугов [3] установили, что

$$\| T_n' \|_C \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-1/2} \| T_n \|_C,$$

где для многочленов $T_n(t) = C\left(\sin\frac{t-\gamma}{2}\right)^{2n}$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$, имеет место знак равенства.

В данной работе доказано, что при $1 \leqslant p < +\infty$

$$\inf_{\|T_n\|_C=1} \| T_n' \|_p = \left\| \left[\left(\sin\frac{t-\gamma}{2}\right)^{2n}\right]' \right\|_p = n\left\{2B\left(\frac{(2n-1)p+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)\right\}^{1/p}. \tag{1}$$

Равенство (1) вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Для любой непрерывной возрастающей выпуклой вниз функции $\chi(u)$, $u \geqslant 0$, $\chi(0) = 0$, справедливо равенство*

$$\min_{\|T_n\|_C=1} \int_0^{2\pi} \chi(|T_n'(t)|)\, dt = \int_0^{2\pi} \chi\left(\left|\left[\left(\sin\frac{t-\gamma}{2}\right)^{2n}\right]'\right|\right) dt \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $T_n(t)$ — тригонометрический многочлен степени n со всеми действительными нулями.

В первой части доказательства теоремы будем следовать рассуждениям, приведенным в работе [4], где вместо точной нижней грани в (2) отыскивалась точная верхняя грань. Итак, фиксируем $n = 1, 2, \ldots$ и пусть $0 \leqslant \xi \leqslant n$. Считая $0 \leqslant u \leqslant n$, построим функцию $\varphi_\xi(u) = 0$, $0 \leqslant u < \xi$, и $\varphi_\xi(u) = u$, $\xi \leqslant u \leqslant n$ Разделим отрезок $[0, n]$ на m равных частей точками $\frac{kn}{m}$, $k = \overline{0, m}$, и положим $\Phi_m(u) = \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \varphi_{\frac{kn}{m}}(u)$, где неотрицательные коэффициенты α_k выбраны из условия $\Phi_m\left(\frac{kn}{m}\right) = \chi\left(\frac{kn}{m}\right)$, $k = \overline{1, m-1}$. Легко видеть, что при $m \to +\infty$ равномерно на отрезке $[0, n]$ $\Phi_m(u) \to \chi(u)$. Соотношение (2) будет доказано, если мы покажем, что для всех достаточно больших m

$$\min_{\|T_n\|_C=1} \int_0^{2\pi} \Phi_m(|T_n'(t)|)\, dt = \int_0^{2\pi} \Phi_m\left(\left|\left[\left(\sin\frac{t-\gamma}{2}\right)^{2n}\right]'\right|\right) dt \quad \forall \gamma \in R. \tag{3}$$

В силу неотрицательности коэффициентов α_k имеем

$$\min_{\|T_n\|_C=1} \int_0^{2\pi} \Phi_m(|T_n'(t)|)\, dt = \min_{\|T_n\|_C=1} \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \int_0^{2\pi} \varphi_{\frac{kn}{m}}(|T_n'(t)|)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_k \min_{\|T_n\|_C=1} \int_0^{2\pi} \varphi_{\frac{kn}{m}}(|T_n'(t)|)\, dt,$$

и для доказательства теоремы достаточно показать, что последняя сумма совпадает с правой частью равенства (3). Этот факт вытекает из следующего утверждения.

Лемма. *При $0 \leqslant \xi \leqslant n$*

$$\min_{\|T_n\|_C=1} \int_0^{2\pi} \varphi_\xi(|T_n'(t)|)\, dt = \int_0^{2\pi} \varphi_\xi\left(\left|\left[\left(\sin\frac{t-\gamma}{2}\right)^{2n}\right]'\right|\right) dt \quad \forall \gamma \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $E_\xi(T_n) = \{t \mid t \in \mathbb{R}, |T_n'(t)| \geqslant \xi\}$, где $0 \leqslant \xi \leqslant \|T_n'\|_C$. При $\xi > \|T_n'\|_C$ множество $E_\xi(T_n)$ пусто, и в этом случае полагаем $\operatorname{mes}(E_\xi(T_n))=0$. Если положить $e_\xi(T_n)=E_\xi(T_n)\cap[0,\ 2\pi]$, то с учетом введенного обозначения получаем

$$\int_0^{2\pi}\varphi_\xi(|T_n'(t)|)\,dt=\int_{e_\xi(T_n)}|T_n'(t)|\,dt=\bigvee_{e_\xi(T_n)}T_n. \tag{5}$$

Пусть в дальнейшем $\tilde{T}_n(t)=\left(\sin\frac{t-\gamma}{2}\right)^{2n}\ \forall\gamma\in\mathbb{R}$. Из (5) следует, что (4) равносильно неравенству

$$\bigvee_{e_\xi(T_n)}T_n\geqslant\bigvee_{e_\xi(\tilde{T}_n)}\tilde{T}_n, \tag{6}$$

где $\|T_n\|_C=1,\ 0\leqslant\xi\leqslant n$.

Дальнейшие рассуждения существенно отличаются от приведенных в работе [4]. Пусть $\|\tilde{T}_n'\|_C\leqslant\xi\leqslant n$. В силу неравенства [3] $\|T_n'\|_C\geqslant\|\tilde{T}_n'\|_C$ ($\|T_n\|_C=1$) получаем $\operatorname{mes}(e_\xi(T_n))\geqslant 0=\operatorname{mes}(e_\xi(\tilde{T}_n))$, т. е. $\bigvee_{e_\xi(T_n)}T_n\geqslant$ $\geqslant 0=\bigvee_{e_\xi(\tilde{T}_n)}\tilde{T}_n$. В этом случае (6) тривиально. Пусть $\xi=0$. Тогда (6) также выполняется в силу очевидного соотношения ($e_\xi(T_n)=[0,\ 2\pi]$) $\bigvee_0^{2\pi}T_n\geqslant 2=$ $=\bigvee_0^{2\pi}\tilde{T}_n,\ \|T_n\|_C=1$.

Пусть теперь $0<\xi<\|\tilde{T}_n'\|_C$. Здесь мы используем подход к решению подобных задач, изложенный в работе [3]. Полином $T_n(t)$ будем рассматривать как функцию от переменных $C,\ t,\ t_i,\ i=\overline{1,\ 2n}$. В пространстве $\mathbb{R}^{2n+4}$ переменных $C,\ x,\ y,\ z,\ t_i,\ i=\overline{1,\ 2n}$, выделим множество Q, определяемое неравенствами $t_{2n}-2\pi<y<t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_{2n}<t_1+2\pi,\ t_{2n-1}-$ $-2\pi<z<x<y,\ -\infty<C<+\infty$. Положим $m,\ k_i\in N,\ i=\overline{1,\ m},\ 1\leqslant k_1,\ldots$ $\ldots,k_m,\ m\leqslant 2n,\ \sum_{i=1}^m k_i=2n$. Множества $Q_m(k_1,\ \ldots,\ k_m)\subset Q$, определяемые равенствами $t_1=t_2=\ldots=t_{k_1},\ t_{k_1+1}=\ldots=t_{k_1+k_2},\ \ldots,t_{k_1+\ldots+k_{m-1}+1}=\ldots=t_{2n}$, можно рассматривать как «грани» множества Q. Заметим, что $Q=$ $=\bigcup_{m=1}^{2n}\bigcup_{\{k_1,\ldots,k_m\}}Q_m(k_1,\ \ldots,\ k_m)$, и $Q_m(k_1,\ \ldots,\ k_m)$ — область в пространстве $\mathbb{R}^{m+4}$, в котором изменяются параметры $C,\ x,\ y,\ z,\ \bar{t}_1=t_1=\ldots=t_{k_1},\ \ldots,\ \bar{t}_m=$ $=t_{k_1+\ldots+k_{m-1}+1}=\ldots=t_{2n}$. На множестве Q рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу:

$$T_n'(x)=\xi,\ T_n'(y)=0,\ T_n(y)=1,\ T_n''(z)=0,\ T_n(x)\to\inf. \tag{7}$$

Можно доказать, что точная нижняя грань в задаче (7) достигается. Учитывая гладкость ограничений и рассматривая задачу (7) отдельно на каждой области $Q_m(k_1,\ \ldots,\ k_m)$, с помощью правила множителей Лагранжа [5, с. 47—48] получаем, что все стационарные точки задачи (7) лежат в области $Q_1(2n)$. Отсюда сразу заключаем, что точная нижняя грань в задаче (7) равна $\tilde{T}_n(x)$, где $\tilde{T}_n'(x)=\xi,\ x>z,\ \tilde{T}_n''(z)=0$.

Аналогично задаче (7) решается вспомогательная экстремальная задача

$$T_n'(x)=\xi,\ T_n'(y)=0,\ T_n(y)=1,\ T_n''(z)=0,\ T_n(x)\to\sup \tag{8}$$

на множестве $\{t_{2n}-2\pi<y<t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_{2n}<t_1+2\pi,\ t_{2n-1}-2\pi<x<$ $<z<y,\ -\infty<C<+\infty\}$. Решением задачи (8) будет $\tilde{T}_n(x)$, где $\tilde{T}_n'(x)=$

$=\xi$, $x<z$, $T''_n(z)=0$, т. е. многочлен $\tilde{T}_n(t)$ является экстремальным как в задаче (7), так и в задаче (8). Случай, когда точка x лежит справа от точки y, рассматривается аналогично.

В работе [3] доказано соотношение

$$\max_{y_1\leqslant t\leqslant y} |T'_n(t)| \geqslant \|\tilde{T}'_n\|_C, \tag{9}$$

где $T'_n(y)=T'_n(y_1)=0$, $T_n(y)=1$, $t_{2n-1}-2\pi\leqslant y_1<y<t_1$. Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\max_{y\leqslant t\leqslant y_1} |T'_n(t)| \geqslant \|\tilde{T}'_n\|_C, \tag{10}$$

где $T'_n(y)=T'_n(y_1)=0$, $T_n(y)=1$, $t_{2n}-2\pi<y<y_1\leqslant t_2$. Неравенства (9) и (10) показывают, что множество $e_\xi(T_n)$ при $0<\xi<\|\tilde{T}'_n\|_C$, $\|T_n\|_C=1$, состоит не менее, чем из двух отрезков, лежащих справа и слева от точки y, $T_n(y)=\|T_n\|_C=1$.

Таким образом, если $[a, b]$ — отрезок из множества $E_\xi(T_n)$, ближайший, например, слева от точки y, $T_n(y)=1$, локального максимума полинома $T_n(t)$, удовлетворяющего ограничениям задач (7) и (8), то решения этих задач позволяют записать неравенства

$$T_n(a)\leqslant\tilde{T}_n(a_0),\ T_n(b)\geqslant\tilde{T}_n(b_0),\ a_0=a(\tilde{T}_n),\ b_0=b(\tilde{T}_n). \tag{11}$$

Из (9) и (10) следует, что любой многочлен $T_n(t)$, $\|T_n\|_C=1$, удовлетворяет при подходящей нумерации нулей ограничениям задач (7) и (8). Учитывая (11), получаем

$$\tilde{T}_n(a_0)=\max_{\|T_n\|_C=1} T_n(a),\quad \tilde{T}_n(b_0)=\min_{\|T_n\|_C=1} T_n(b). \tag{12}$$

Здесь мы используем равенство $\|\tilde{T}_n\|_C=1$. Из (12) следует, что для любого $T_n(t)$, $\|T_n\|_C=1$, справедливо неравенство

$$T_n(b)-T_n(a)\geqslant \min_{\|T_n\|_C=1} T_n(b)-\max_{\|T_n\|_C=1} T_n(a)=\tilde{T}_n(b_0)-\tilde{T}_n(a_0)>0,$$

где $a=a(T_n)$, $b=b(T_n)$. Случай, когда отрезок $[a, b]\subset E_\xi(T_n)$ расположен справа от точки y, рассматривается аналогично.

В итоге получаем, что для любого $T_n(t)$ ($\|T_n\|_C=1$) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\bigvee_{e_\xi(T_n)} T_n &\geqslant |T_n(a)-T_n(b)|+|T_n(c)-T_n(d)|\geqslant\\ &\geqslant 2|\tilde{T}_n(a_0)-\tilde{T}_n(b_0)|=\bigvee_{e_\xi(\tilde{T}_n)}\tilde{T}_n,\end{aligned} \tag{13}$$

где $[a, b]$ ($[c, d]$) — ближайший слева (справа) от точки y, $\|T_n\|_C=T_n(y)$, отрезок из множества $E_\xi(T_n)$, $0<\xi<\|\tilde{T}'_n\|_C$. Соотношение (13) совпадает с неравенством (6). Лемма доказана, а вместе с этим и теорема.

Следствие 1. *Для любого тригонометрического полинома $T_n(t)$ со всеми вещественными нулями выполняется точное неравенство* ($1\leqslant p<$ $<+\infty$)

$$\left\{2B\left(\frac{(2n-1)p+1}{2},\ \frac{p+1}{2}\right)\right\}^{1/p}\cdot n\cdot\|T_n\|_C\leqslant\|T'_n\|_p.$$

Знак равенства реализуют полиномы $T_n(t)=C\cdot\left(\sin\frac{t-\gamma}{2}\right)^{2n}\ \forall\gamma$, $C\in\mathbb{R}$, $C\neq 0$.

Следствие 1 получается из утверждения теоремы при $\chi(u) = u^p$, $1 \leqslant \leqslant p < +\infty$.

Следствие 2. *Для любого алгебраического полинома* $P_n(x)$ *со всеми вещественными нулями, лежащими на* $[-1, +1]$, *выполняется неравенство* $(1 \leqslant p < +\infty)$

$$\left\{B\left(\frac{(2n-1)p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)\right\}^{1/p} n \| P_n \|_C \leqslant \| p_n'(x) (1-x^2)^{\frac{p-1}{2\cdot p}} \|_p.$$

В работе [6] показано, что $\max\limits_{\|T_n\|_C=1} \| T_n \|_q = \| \cos n\cdot t \|_q$, $1 \leqslant q < +\infty$. Отсюда с учетом следствия 1 получаем такое утверждение.

Следствие 3. *Для любого тригонометрического полинома* $T_n(t)$ *со всеми вещественными нулями выполняется неравенство* $(1 \leqslant p,\ q < +\infty)$

$$\frac{\left\{2B\left(\frac{(2n-1)\cdot p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)\right\}^{1/p}}{\left\{2B\left(\frac{1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)\right\}^{1/q}} n \| T_n \|_q < \| T_n' \|_p.$$

1. *Turan P.* Uber die Ableitung von Polynomen // Compos. math.— 1939-40.— **7**.— S. 89—95.
2. *Janos Eröd.* Bizonyos polinomok maximumának // Mat. Fiz. lapok. — 1939. — **46**. — p. 58—82.
3. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Точное неравенство для производной тригонометрического многочлена, имеющего только вещественные нули // Мат. заметки — 1986.— **39**, № 3.— С. 330—336.
4. *Тайков Л. В.* Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна.// Тр. Мат ин-та.— 1965.— **78**.— С. 43—47.
5. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление.— М. : Наука, 1979.— 432 с.
6. *Pichorides S. K.* Une remarque sur les polynómes trigonométriques réels dont toutes les racines sont réelles // C. r. Acad. sci. A.— 1978.— **286**.— P. 17—19.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 05.03.87