УДК 515.164.174

В. В. Шарко

Числа Морса и минимальные функции Морса на неодносвязных многообразиях

В последнее время в работах С. П. Новикова [1] и С. П. Новикова и М. А. Шубина [2] изучались оценки для чисел Морса неодносвязных многообразий. Был предложен новый подход, использующий гомологии локальной системы многообразия, полученной по представлению фундаментальной группы в GL $(n, \mathbb{C})$ или в Π_1-факторе фон Неймана. В настоящей работе анонсируется ряд результатов о числах Морса, следуя работам [2, 4].

1. $M_i(N^n)$ — i-е число Морса определяется как минимум чисел критических точек индекса i, взятый по всем функциям Морса на многообразии N^n. Известно, что числа Морса являются инвариантами гомотопического типа многообразия N^n, $n \geqslant 7$, простого гомотопического типа $(n=6)$ [5, 6]. Справедливы оценки М. Морса и Е. Питчера $M_i(N^n) \geqslant b_i + q_i + q_{i-1}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, где b_i — числа Бетти, q_i — коэффициенты кручения [7]. Если N^n односвязное и $n \geqslant 5$, то на N^n существует функция Морса, у которой число критических точек индекса i равно $M_i(N^n)$ для всех i [8, 9]. В неодносвязном случае желательно иметь более точные оценки. Например, если N^n — компактное стягиваемое многообразие $(n \geqslant 6)$, то из работы [10] следует, что $M_2(N^n) = M_3(N^n) = \mu(\pi_2(N^n, \partial N^n))$ — минимальное число образующих скрещенного $\pi_1(\partial N^n)$-модуля $\pi_2(N^n, \partial N^n)$. Ниже будет видно, что появление второй относительной гомотопической группы не случайно. Попытка использовать для подсчета $M_i(N^n)$ $\pi_1(N^n)$-модули гомологий универсального накрывающего $\hat{N}^n$ также не приводит к успеху, поскольку они могут быть с бесконечным числом образующих для ненетеровых фундаментальных групп. Предложенный в работе [2] подход для некоторых многообразий дает оценки лучше классических.

2. Известно [11], что первый k-инвариант многообразия $N^n k(N^n) \in H^3(\pi_1(N^n), \pi_2(N^n))$ можно задать скрещенной последовательностью $e \leftarrow \pi_1(N^n) \leftarrow \pi_1(N_1) \leftarrow \pi_2(N^n, N_1) \leftarrow \pi_2(N^n) \leftarrow 0$. Здесь N_1 — одномерный остов произвольного клеточного разбиения N^n с одной нульмерной вершиной или $N_1 = f^{-1}[0, a]$, где f — произвольная правильная функция Морса с одной критической точкой индекса 0 и N_1 содержит только критические точки индексов 0, 1. Положим $\mu(k(N^n)) = \min\limits_{\alpha} \mu(\pi_2(N^n, N_1))$, где $\mu(\pi_2(N^n, N_1))$ — минимальное число образующих скрещенного $\pi_1(N_1)$-модуля $\pi_2(N^n, N_1)$ α пробегают все скрещенные последовательности, представляющие элемент $k(N^n)$.

Пусть $p: \hat{N}^n \to N^n$ — универсальное накрывающее, N_i^j — i-й остов j-го барицентрического подразделения $N^n, \hat{N}_i^j = p^{-1}(N_i^j)$. Положим $\varepsilon_i^j(N^n) = \mu(H^i(\hat{N}_i^j, \mathbb{Z})) - \mu(H^i(N_i^j, \mathbb{Z}))$, где $\mu(H^i(\hat{N}_i^j, \mathbb{Z}))$ — минимальное число образующих $\pi_1(N^n)$-модуля $H^i(\hat{N}_i^j, \mathbb{Z})$, $i \geqslant 2$.

Определение 1. $\varepsilon_i(N^n) = \lim\limits_{j \to \infty} \varepsilon_i^j(N^n)$. Можно показать, что для некоторого j_0 справедливо $\varepsilon_i^{j_0}(N^n) = \varepsilon_i^{j_0+k}(N^n) = \varepsilon_i(N^n)$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

Теорема 1. *$\varepsilon_i(N^n)$ — инвариант гомотопического типа N^n.*

Замечание 1. $\varepsilon_i(N^n)$ аналогичным образом можно определить для произвольного CW-комплекса N^n.

Замечание 2. Для многообразий измельчение триангуляции по-видимому является излишним для определения $\varepsilon_i(N^n)$. По крайней мере это так, если $\pi_1(N^n)$ — s-группа (всякий стабильно свободный $\pi_1(N^n)$-модуль свободен).

Теорема 2. *Пусть N^n — замкнутое многообразие. Тогда*

$$M_0(N^n) = M_n(N^n) = 1, \quad M_1(N^n) \geqslant \mu(\pi_1(N^n)) \leqslant M_{n-1}(N^n), \quad M_2(N^n) \geqslant$$
$$\geqslant \mu(k(N^n)) \leqslant M_{n-2}(N^n), \quad 3 \leqslant i \leqslant n-3, \quad M_i(N^n) \geqslant \varepsilon_i(N^n) +$$
$$+ \varepsilon_{i+1}(N^n) + b_i(N^n) + q_i(N^n) + q_{i-1}(N^n). \tag{1}$$

3. Минимальной функцией Морса на N^n называется функция, у которой число критических точек индекса i равно $M_i(N^n)$ для всех i.

Определение 2. *Скажем, что группа π удовлетворяет условию* (hs), *если для всякого представления π существует такое минимальное представление (с минимальным числом образующих) π, что любой элемент $\tau_0 \in \mathrm{Wh}(\pi)$ реализуется гомотопической эквивалентностью между 2-CW-комплексами, построенными по этим представлениям с кручением, равным τ_0.*

Из работ М. Дайера, В. Браунинга, С. Джоджодии, В. Метцлера, А. Сирадского, К. Уолла, М. Латиоласа по гомотопической классификации двумерных CW-комплексов вытекает, что конечные абелевы, свободные, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, группы диэдра D_n (n нечетное) удовлетворяют условию (hs).

Теорема 3. *Пусть N^n — замкнутое многообразие, $n > 6$, $\pi_1(N^n)$ — s-группа, удовлетворяющая условию* (hs). *Тогда на N^n существует минимальная функция Морса. Число критических точек индекса i определяется равенствами* (1), $i \neq 3$, $n-3$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 5.10 из работы [4].

1. *Новиков С. П.* Блоховские гомологии. Критические точки функций и замкнутых I-форм // Докл. АН СССР.— 1986.— **287**, № 6.— С. 1321—1324.
2. *Новиков С. П., Шубин М. А.* Неравенства Морса и неймановские II-факторы // Там же.— **289**, № 2.— С. 289—293.
3. *Sharko W. W.* Minimal Morse functions // Lect. Notes Math. — 1984. — N 1108. — P. 218—234.
4. *Шарко В. В.* К-теория и теория Морса. II.— Киев, 1986.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.40).
5. *Богоявленский О. И.* О точной функции на многообразиях // Мат. заметки.— 1970.— 8, № 1.— С. 77—83.
6. *Hajduk B.* Comparing handle decomposition of homotopy equivalent manifolds // Fund. math.— 1977.— **95**, N 1.— P. 3—13.
7. *Pitcher E.* Inequalities of critical point theory // Bull. Amer. Math. Sos.— 1958.— **64**, N 3.— P. 1—30.
8. *Smale S.* On structure of manifolds // Amer. J. Math.— 1962.— **84**, N 3.— P. 387—399.
9. *Barden D.* On the five—dimensional manifolds // Ibid.— 1965.— **82**, N 3.— P. 365—385.
10. *Шарко В. В.* Точные функции Морса на односвязных многообразиях с неодносвязным краем // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 5.— С. 265—266.
11. *Ratcliffe J.* Crossed extensions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1980. — **257**, N 1.— P. 73—89.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.03.87