УДК 519.21

Т. М. Местечкина

Уравнение Колмогорова для решения задачи Коши одного класса линейных эволюционных уравнений

Обозначим через R^n n-мерное евклидово пространство, а через $L_p(A)$ — пространство функций, суммируемых со степенью p в области A. Пусть $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ — полное вероятностное пространство; $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ — банахово пространство $\mathcal{F}$-измеримых случайных функций $f(t, x)$, непрерывных в соответствующей норме $\|f\|_{\mathcal{L}_p} = \sup\limits_t \sup\limits_x (\mathbf{M}\,|f(t, x)|^p)^{1/p}$, $p = 1, 2 \ldots$. В области $[s, T] \times R^n$ рассмотрим задачу Коши

$$u(t, x) = \varphi(x) + \int_s^t D_1(r)\, u(r, x)\, dr + \int_s^t D_2(r)\, u(r, x)\, dW(r). \tag{1}$$

Здесь $W(t)$ — заданный на $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ многомерный винеровский процесс, компоненты которого $w(t)$, $w_k(t)$, $w_{kj}(t)$ взаимно независимы; $D_1(t)$, $D_2(t)$ — дифференциальные операторы второго порядка, коэффициенты $a(t)$, $a_k(t)$, $a_{kj}(t)$ и $\alpha(t)$, $\alpha_k(t)$, $\alpha_{kj}(t)$ неслучайны и принадлежат пространствам $L_1([s, T])$ и $L_2([s, T])$ соответственно,

$$D_1(t) = a(t) + \sum_{k=1}^n a_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n a_{kj}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

$$D_2(t)\, dW(t) = \alpha(t)\, dw(t) + \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k} dw_k(t) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \alpha_{kj}(t) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\, dw_{kj}(t).$$

В работе [1] найдены условия существования и определен класс единственности решения уравнения (1). Измеримое по совокупности переменных, $\mathcal{F}_t$-согласованное, непрерывное по t и бесконечно дифференцируемое по x (в смысле нормы пространства $\mathcal{L}_1$) решение представимо в виде

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \bar{\varphi}(y) \exp\{Q(t, s; y) - i(x, y)\}\, dy, \tag{2}$$

где $\bar{\varphi}(y)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ из $L_1(R^n)$,

$$Q(t, s; y) = \int_s^t \Big[a(r) - i \sum_{k=1}^n a_k(r)\, y_k - \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n a_{kj}(r)\, y_k y_j\Big] dr +$$

$$+ \int_s^t \alpha(r)\, dw(r) - \frac{1}{2} \int_s^t \alpha^2(r)\, dr - i \sum_{k=1}^n \int_s^t \alpha_k(r)\, y_k dw_k(r) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_s^t \alpha_k^2(r)\, y_k^2 dr - \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \int_s^t \alpha_{kj}(r)\, y_k y_j dw_{kj}(r) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \int_s^t \alpha_{kj}^2(r)\, y_k^2 y_j^2 dr$$

и $\sup\limits_{t \in [s, T]} \mathbf{M}\,|\exp\{Q(t, s; y)\}| \leqslant \exp\{\|a\|_{L_1([s, T])} - \delta^2 |y|^2\}$, $\delta > 0$.

Целью настоящей работы является исследование характера зависимости решения $u(t, x) = u(t, x; s, \varphi)$ от начальных данных s, φ и получение обратного уравнения Колмогорова. В случае стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений такие результаты хорошо известны [2]. Особенности приведенных ниже доказательств связаны с отсутствием (в общем случае) второго момента решения задачи Коши для уравнения (1) и введением функциональных производных.

Предположим, что уравнение (1) имеет единственное решение (2).

Утверждение 1. *Решение уравнения* (1) *непрерывно по* s *в смысле нормы* $\mathscr{L}_1$.

Непрерывность функции $u(t, x; s, \varphi)$ по s доказывается так же, как непрерывность по t в теореме 1 [1].

Утверждение 2. *Решение уравнения* (1) *имеет дифференциалы Фреше по* φ, $\varphi(x) \in L_1(R^n)$ *любого порядка*.

Доказательство. Исходя из представления (2), убеждаемся в линейности оператора $u(t, x; s, \cdot)$ по начальной функции. По определению дифференциала Фреше [3] $u^{(1)}(t, x; s, \varphi)\psi = u(t, x; s, \psi)$, $\varphi(x), \psi(x) \in L_1(R^n)$. Кроме того, $u^{(k)}(t, x; s, \varphi)(\psi_1, \ldots, \psi_k) \equiv 0$ при $k \geqslant 2$, $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x) \in L_1(R^n)$.

Итак, производная Фреше функции u по φ есть непрерывный по параметрам t, s, $t > s$, и бесконечно дифференцируемый по параметру $x \in R^n$ оператор, определенный на пространстве абсолютно интегрируемых функций.

Из единственности решения уравнения (1) следует

$$u(t, x; s, \varphi) = u(t, x; r, u(r, \cdot; s, \varphi)), \quad t > r > s. \tag{3}$$

По аналогии со стохастическими обыкновенными дифференциальными уравнениями можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3. *Решение уравнения* (1) — *марковский процесс, переходная вероятность* $\mathbf{P}_{s,\varphi}(t, A)$ *которого определяется соотношением* $\mathbf{P}_{s,\varphi}(t, A) = \mathbf{P}(u(t, x; s, \varphi) \in A)$ *для любого борелевского множества* A.

Свяжем с решением уравнения (1) случайный линейный оператор U_t^s, $U_t^s\varphi(x) = u(t, x; s, \varphi)$. Из непрерывности решения по t, утверждения (1) и формулы (3) следует, что U_t^s — сильно непрерывная левая стохастическая полугруппа [4].

Введем пространство $\mathscr{T}$ трансформант Фурье функций из $L_1(R^n)$ с нормой $\| f \|_{\mathscr{T}} = \max\limits_x | \bar{f}(x) |$. Согласно представлению (2) $\bar{u}(t, -y) = \bar{\varphi}(y) \times \exp\{Q(t, s, y)\}$ и

$$\left\| \mathbf{M} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_n^{l_n}} \right\|_{\mathscr{T}} \leqslant K \exp\{\| a \|_{L_1([s,T])}\} \| \varphi \|_{\mathscr{T}}, \tag{4}$$

где $l = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k$, $l_k = 0, 1, 2, \ldots$, K — постоянная, зависящая лишь от δ.

На $\mathscr{T}$ определим неслучайный трижды дифференцируемый по Фреше функционал G; $\| G^{(k)} \| = \sup\limits_f \| G_f^{(k)} \| < \infty$, где $\| G_f^{(k)} \|$ — норма k-линейного отображения, $k = 1, 2, 3$. Продолжим G, $G^{(k)}$ до операторов, определенных на случайных функциях $f(t, x)$, преобразование Фурье по x которых принадлежит пространству $\mathscr{L}_1 \sup\limits_{,} \mathbf{M} | \bar{f}(t, x) | \in L_1(R^n)$, таким образом, чтобы

$$\| G_f^{(k)}(f_1, \ldots, f_k) \|_{\mathscr{L}} \leqslant \| G^{(k)} \| \left\| \prod_{j=1}^{k} \bar{f}_j \right\|_{\mathscr{L}_1}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Утверждение 4. *Предположим, что функционал* G *трижды дифференцируем по Фреше*, $\bar{f}, \bar{f}_1 \in \mathscr{L}_2$, $\bar{f}_2, \bar{f}_3 \in \mathscr{L}_4$. *Тогда* $G_{f(t,x)}^{(1)} f_1(t, x)$ *и* $G_{f(t,x)}^{(2)} \times (f_2(t, x), f_3(t, x))$ *ограничены и непрерывны по* t, x *в норме* $\mathscr{L}_1$.

Доказательство. Рассмотрим, например, первый дифференциал $\| G_f^{(1)} f_1 \|_{\mathscr{L}_1} \leqslant \| G^{(1)} \| \| \bar{f}_1 \|_{\mathscr{L}_1} < \infty$ и докажем его непрерывность по t:

$$\mathbf{M} | G_{f(t+\Delta,x)}^{(1)} f_1(t + \Delta, x) - G_{f(t,x)}^{(1)} f_1(t, x) | \leqslant \mathbf{M} | (G_{f(t+\Delta,x)}^{(1)} - G_{f(t,x)}^{(1)}) f_1(t + \Delta, x) | +$$

$$+ \mathbf{M} | G_{f(t,x)}^{(1)} (f_1(t + \Delta, x) - f_1(t, x)) | = S_1 + S_2.$$

Вследствие дифференцируемости $G_f^{(1)}$ по f [3]

$$(G^{(1)}_{f(t+\Delta,x)} - G^{(1)}_{f(t,x)}) f_1(t+\Delta, x) = \int\limits_0^1 G^{(2)}_{f(t,x)+\tau(f(t+\Delta,x)-f(t,x))} (f_1(t+\Delta, x),$$

$$f(t+\Delta, x) - f(t, x))\, d\tau,$$

$$S_1 \leqslant \| G^{(2)} \| \| \overline{f}_1 \|_{\mathscr{L}_2} (\sup_\Delta \sup_t \sup_x \mathbf{M} | \overline{f}(t+\Delta, x) - \overline{f}(t, x)|^2)^{1/2}$$

и непрерывности $\overline{f}(t, x)$ по t в норме $\mathscr{L}_2$ найдется такое $\Delta_1 > 0$, что $\sup\limits_{0<\Delta<\Delta_1} S_1 \leqslant \varepsilon/2$. Так как $S_2 \leqslant \| G^{(1)} \| \sup\limits_t \sup\limits_x \mathbf{M} | \overline{f}(t+\Delta, x) - \overline{f}(t, x)|$, то при некотором $0 < \Delta_2 \leqslant \Delta_1$ $\sup\limits_{0<\Delta<\Delta_2} S_2 \leqslant \varepsilon/2$ и $\sup\limits_{0<\Delta<\Delta_2} \sup\limits_t \sup\limits_x \mathbf{M} | G^{(1)}_{f(t+\Delta,x)} f_1(t+\Delta, x) - G^{(1)}_{f(t,x)} f_1(t, x) | \leqslant \varepsilon$. Проверка непрерывности $G^{(1)}_{f(t,x)} f_1(t, x)$ по x завершает доказательство.

Теорема. *Предположим, что коэффициенты* $a(t)$, $a_k(t)$, $a_{kj}(t)$ *и* $\alpha(t)$, $\alpha_k(t)$, $\alpha_{kj}(t)$ *дифференциальных операторов* $D_1(t)$, $D_2(t)$ *определены и непрерывны на* $[0, T]$; *начальная функция* $\varphi(x) \in L_1(R^n)$ *дважды непрерывно дифференцируема и ее производные принадлежат* $L_1(R^n)$; *функционал* G *имеет три первые производные Фреше и найдется такая постоянная* K, *что*

$$\| (GU^s_\cdot)^{(k)}_\psi (\psi_1, \ldots, \psi_k) \|_{\mathscr{L}_1} \leqslant K \left\| \frac{\prod\limits_{j=1}^k \overline{U^s_\cdot} \psi_j}{1 + |\overline{U^s_\cdot} \psi|^{k-1}} \right\|_{\mathscr{L}_1}, \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

$$\| (GU^s_\cdot)^3_\psi (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \|_{\mathscr{L}_1} \leqslant K \| \overline{U^s_\cdot} \psi_1 \overline{U^s_\cdot} \psi_2 \overline{U^s_\cdot} \psi_3 \|_{\mathscr{L}_1}$$

для любых функций $\psi(x)$, $\psi_k(x)$ *из* $L_1(R^n)$. *Тогда оператор* $H(s, \varphi) = \mathbf{M} G(U^s_t \varphi)$ *удовлетворяет уравнению*

$$-\partial H(s, \varphi)/\partial s = H^{(1)}(s, \varphi) D_1(s) \varphi + \frac{1}{2} H^{(2)}(s, \varphi)(D_2(s)\varphi, D_2(s)\varphi) \tag{6}$$

с начальным условием $\lim\limits_{s \uparrow t} H(s, \varphi) = G(\varphi)$.

Под $H^{(2)}(s, \varphi)(D_2(s)\varphi, D_2(s)\varphi)$ понимаем сумму билинейных отображений $H^{(2)}(s, \varphi)(\alpha(s)\varphi, \alpha(s)\varphi) + \sum\limits_{k=1}^n H^{(2)}(s, \varphi)(\alpha_k(s)\, \partial\varphi/\partial x_k, \alpha_k(s)\, \partial\varphi/\partial x_k) + \sum\limits_{k=1}^n \sum\limits_{j=k}^n H^{(2)}(s, \varphi)(\alpha_{kj}(s)\, \partial^2\varphi/\partial x_k \partial x_j, \alpha_{kj}(s)\, \partial^2\varphi/\partial x_k \partial x_j)$.

Замечание. Если в качестве G взять $g(F)$, где g — функция, F — преобразование Фурье, то условия (5) удается сформулировать в терминах функции g: $|g'(x)| + |g'''(x)| \leqslant K$, $|g''(x)| \leqslant K(1 + |x|)^{-1}$.

Доказательство теоремы. Введем вспомогательную функцию $\varphi_N(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{S_N} \overline{\varphi}(y) \exp\{-i(x, y)\}\, dy$, где $S_N = \{y : |y_k| \leqslant N, \ k = 1, 2, \ldots, n\}$. Отметим, что $U^s_t \varphi_N$ (в отличие от $U^s_t \varphi$) обладает конечными моментами любого порядка.

По свойству левой стохастической полугруппы $H(s - \Delta, \varphi_N) = H(s, U^{s-\Delta}_s \varphi_N)$. Оператор $H(s, \psi)$ дважды непрерывно дифференцируем по $\psi \in \mathscr{L}_4$, и согласно формуле Ито для операторов [5]

$$H(s-\Delta, \varphi_N) - H(s, \varphi_N) = \int\limits_{s-\Delta}^s \mathbf{M} \Big[H^{(1)}(s, U^{s-\Delta}_r \varphi_N) D_1(r) U^{s-\Delta}_r \varphi_N +$$

$$+ \frac{1}{2} H^{(2)}(s, U^{s-\Delta}_r \varphi_N)(D_2(r) U^{s-\Delta}_r \varphi_N, D_2(r) U^{s-\Delta}_r \varphi_N) \Big] dr.$$

Подынтегральное выражение непрерывно по r и ограничено (утверждение 4). Поделив обе части последнего равенства на Δ и переходя к пределу по $\Delta \to 0$, получим

$$-\frac{\partial H(s, \varphi_N)}{\partial s} = H^{(1)}(s, \varphi_N) D_1(s) \varphi_N + \frac{1}{2} H^{(2)}(s, \varphi_N)(D_2(s)\varphi_N, D_2(s)\varphi_N). \tag{7}$$

Итак, все члены последовательности $\{H(s, \varphi_N)\}$ дифференцируемы по s. Докажем, что $\{\partial H(s, \varphi_N)/\partial s\}$ сходится равномерно относительно $s \in [0, T]$. Имеем

$$|\lim_{N\to\infty} \partial H(s, \varphi_N)/\partial s - \partial H(s, \varphi_N)/\partial s| \leqslant |(H^{(1)}(s, \varphi) - H^{(1)}(s, \varphi_N)) D_1(s)\varphi_N| +$$
$$+ |H^{(1)}(s, \varphi) D_1(s)(\varphi - \varphi_N)| + \frac{1}{2}|H^{(2)}(s, \varphi)(D_2(s)(\varphi - \varphi_N), D_2(s)\varphi)| +$$
$$+ \frac{1}{2}|H^{(2)}(s, \varphi_N)(D_2(s)\varphi_N, D_2(s)(\varphi - \varphi_N))| +$$
$$+ \frac{1}{2}|(H^{(2)}(s, \varphi) - H^{(2)}(s, \varphi_N))(D_2(s)\varphi_N, D_2(s)\varphi)|. \tag{8}$$

Непосредственно из условий (5) и неравенства (4) вытекает, что второе, третье и четвертое слагаемые не превышают $K_0 \| \varphi - \varphi_N \|_{\mathscr{T}}$, где постоянная K_0 не зависит от s,

$$(H^{(2)}(s, \varphi) - H^{(2)}(s, \varphi_N))(D_2(s)\varphi_N, D_2(s)\varphi) =$$
$$= \int_0^1 H^{(3)}(s, \varphi_N + \tau(\varphi - \varphi_N))(D_2(s)\varphi_N, D_2(s)\varphi, \varphi - \varphi_N)\, d\tau.$$

Как нетрудно видеть,

$$|(H^{(2)}(s, \varphi) - H^{(2)}(s, \varphi_N))(D_2(s)\varphi_N, D_2(s)\varphi)| \leqslant K \| S(\cdot, s; \cdot)\bar{\varphi}_N \bar{\varphi}(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_N)\|_{\mathscr{L}_1},$$

где $S(t, s; y) = \exp\{3Q(t, s; y)\}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} y_k^2 y_j^2\right)$. Но $\bar{\varphi}_N(y) \equiv 0$ при $y \,\bar{\in}\, S_N$, а $(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_N)(y) \equiv 0$ внутри области S_N. Таким образом,

$$|(H^{(2)}(s, \varphi) - H^{(2)}(s, \varphi_N))(D_2(s)\varphi_N, D_2(s)\varphi)| \equiv 0.$$

Аналогичное тождество имеет место для первого слагаемого в (8) и $|\lim_{N\to\infty} \partial H(s, \varphi_N)/\partial s - \partial H(s, \varphi_N)/\partial s| \leqslant K_0 \|\varphi - \varphi_N\|_{\mathscr{T}}$ стремится к 0 при $N \to \infty$ равномерно по s.

Так как последовательность $\{H(s, \varphi_N\}$ сходится при $s = t$ (более того, нетрудно показать, что она сходится в каждой точке $[0, t]$) и обладает доказанными выше свойствами, то, согласно [6], предельная функция $H(s, \varphi)$ дифференцируема, причем $\partial H(s, \varphi)/\partial s = \lim_{N\to\infty} \partial H(s, \varphi_N)/\partial s$. Предельный переход в равенстве (7) обоснован.

Остается заметить, что преобразование Фурье дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi^{(k)}(x) \in L_1(R^n)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, также принадлежит $L_1(R^n)$ [7] и $\varphi \in \mathscr{T}$, т. е. в начальном условии $G(\varphi)$ определено. Теорема доказана.

Условия (5) являются достаточными, но не необходимыми для справедливости обратного уравнения Колмогорова (6).

П р и м е р. Предположим, что $G\cdot = g(F\cdot)$, где g — дважды дифференцируемая функция, $|g'(x)| \leqslant K$, $|g''(x)| \leqslant K(1 + |x|)^{-1}$. Условие существования третьего дифференциала в (3) использовалось при оценке $\underline{\Delta}_N(s) =$

$= \mathbf{M}(G^{(2)}_{U^s_t\varphi} - G^{(2)}_{U^s_t\varphi_N})(D_2(s)U^s_t\varphi_N,\ D_2(s)U^s_t\varphi)$. Так как $G^{(2)}_{\psi}(\psi_1, \psi_2) = g''(\bar{\psi}) \times \times \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2$, то $\Delta_N(s) \equiv 0$. При доказательстве непрерывности по r

$$H^{(2)}(s, U_r^{s-\Delta}\varphi_N)(D_2(r)U_r^{s-\Delta}\varphi_N,\ D_2(r)U_r^{s-\Delta}\varphi_N)$$

аналогичные рассуждения позволяют ограничиться приведенным условием на вторую производную функции g.

Построить функцию (а не оператор) G, удовлетворяющую условиям теоремы, не удается.

1. *Гихман Ил. И., Местечкина Т. М.* Задача Коши для параболических уравнений с коэффициентами типа «белого шума» // Теория случайн. процессов.— 1987.— Вып. 15.— С. 19—28.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев : Наук. думка, 1968.— 354 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1981.— 544 с.
4. *Скороход А. В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук.— 1982.— 37, № 6.— С. 157—183.
5. *Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л.* Диффузионные процессы в гладких банаховых пространствах и многообразиях. I // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1978.— 37.— С. 107—141.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3-х т.— М. : Наука, 1951.— Т. 2.— 863 с.
7. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.— М. : Мир, 1968.— 276 с.

Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, Донецк

Получено 10.11.85