УДК 517.948

С. В. Переверзев

О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. I

1. Обозначим через X пространства C или L_2 соответственно непрерывных и суммируемых в квадрате на $[0, 2\pi]$ 2π-периодических функций $f(t)$ с нормами

$$\|f\|_C = \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |f(t)|, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Обозначим через X^r, $r = 1, 2, \ldots$, пространство 2π-периодических функций $\bar{f}(t)$, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, а $f^{(r)} \in X$. При этом $\|f\|_{X^r} = \|f\|_X + \|f^{(r)}\|_X$, $X = C, L_2$, $X^0 = X$.

Пусть множество $\Phi \subset X$ и множество $\mathscr{H}$ непрерывных интегральных операторов H вида

$$Hf(t) = \int_0^{2\pi} H(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

действующих из X в X, таковы, что интегральное уравнение

$$z = Hz + f \tag{2}$$

однозначно разрешимо при любых $H \in \mathscr{H}$, $f \in \Phi$. Класс уравнений (2) будем обозначать $[\mathscr{H}, \Phi]$.

Исследуем сложность нахождения приближенных решений уравнений (2) для некоторых классов $[\mathcal{H}, \Phi]$. Постановка задачи и терминология заимствованы из монографии [1].

Следуя [1, с. 101], к простейшим операциям условимся относить арифметические операции и операции вычисления значений различных линейных функционалов, определенных на $\mathcal{H}$ и X. При этом, как и в [1, с. 28, 101], каждой простейшей операции p ставится в соответствие число comp $(p) \geqslant 1$, называемое сложностью операции p. Сложность арифметических операций принимается равной 1, а сложность операции вычисления значения линейного функционала не превышает фиксированного числа $d \geqslant 1$.

Пусть $T = \{\delta_i\}_{i=1}^N$ — некоторый набор линейно-независимых линейных непрерывных функционалов δ_i, из которых $\delta_1, \ldots, \delta_k$ определены на множестве $\mathcal{H}$, а $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_N$ — на множестве $\Phi \subset X$. Каждому уравнению (2) из $[\mathcal{H}, \Phi]$ поставим в соответствие числовой вектор

$$T(H, f) = (\delta_1(H), \ldots, \delta_k(H), \delta_{k+1}(f), \ldots, \delta_N(f)), \tag{3}$$

который будем называть информацией об уравнении (2), а набор функционалов T — способом задания информации. Число линейно-независимых функционалов δ_i, образующих набор T, обозначим card (T). Информационной сложностью вычисления $T(H, f)$, как и в [1, с. 28], назовем величину

$$\operatorname{comp}(T(H, f)) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{comp}(\delta_i\ (H)) + \sum_{i=k+1}^{N} \operatorname{comp}(\delta_i(f)),$$

где comp $(\delta_i\ (H))$ — сложность выполнения простейшей операции, состоящей в нахождении значения функционала δ_i на элементе H; обозначение comp $(\delta_i(f))$ имеет аналогичный смысл. Ясно, что при сделанных выше предположениях для любого способа задания информации $T = \{\delta_i\}$

$$\operatorname{comp}(T(H, f)) \leqslant d \operatorname{card}(T). \tag{4}$$

Под алгоритмом A приближенного решения уравнений из $[\mathcal{H}, \Phi]$ будем понимать оператор, сопоставляющий информации (3) в качестве приближенного решения уравнения (2) функцию $A(T, H, f) \in X$. При этом для построения $A(T, H, f)$ требуется выполнить лишь некоторое число простейших операций $p_1, p_2, \ldots, p_j$. Следуя [1, с. 29], величину comp $(A(\boldsymbol{T}, H, f)) =$ comp $(p_1) + \ldots +$ comp (p_j) назовем комбинаторной сложностью вычисления $A(T, H, f)$, а величину

$$\operatorname{comp}(A) = \sup_{\substack{H \in \mathcal{H} \\ f \in \Phi}} (\operatorname{comp}(T(H, f)) + \operatorname{comp}(A(T, H, f)))$$

— сложностью алгоритма A.

При фиксированном способе задания информации T множество алгоритмов, использующих для построения приближенных решений уравнений (2) информацию (3), обозначим через $\mathcal{A}(T)$, а множество алгоритмов $A \in \mathcal{A}(T)$, для которых

$$e_X([\mathcal{H}, \Phi], A) := \sup_{\substack{z = Hz + f, \\ H \in \mathcal{H}, f \in \Phi}} \| z - A(T, H, f) \|_X < \varepsilon,$$

— через $\mathcal{A}_X(T, \varepsilon)$.

Определение 1 [1, с. 32]. *Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое множество способов задания информации. Если хоть одно из множеств $\mathcal{A}_X(T, \varepsilon) \neq \varnothing$ при $T \in \mathcal{T}$, то величина*

$$\operatorname{comp}_X([\mathcal{H}, \Phi], \mathcal{T}, \varepsilon) = \inf_{T \in \mathcal{T}} \inf_{A \in \mathcal{A}_X(T, \varepsilon)} \operatorname{comp}(A)$$

называется ε-сложностью решения уравнений из $[\mathcal{H}, \Phi]$ в пространстве X при информации из $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{T} = \mathcal{T}_U$ — множество всевозможных спосо-

бов задания информации вида (3), *то величина*

$$\mathrm{comp}_X([\mathcal{H}, \Phi], \varepsilon) = \mathrm{comp}_X([\mathcal{H}, \Phi], \mathcal{T}_U, \varepsilon)$$

называется ε*-сложностью решения уравнений из* $[\mathcal{H}, \Phi]$ *в* X.

Определение 2 [1, с. 103]. *Пусть* $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_U$, $\mathcal{T}_N = \{T : T \in \mathcal{T}_U, \mathrm{card}(T) \leqslant N\}$, $E_N([\mathcal{H}, \Phi], X, \mathcal{T}) = \inf\limits_{T \in \mathcal{T} \cap \mathcal{T}_N} \inf\limits_{A \in \mathcal{A}(T)} e_X([\mathcal{H}, \Phi], A)$. *Назовем* ε*-кардинальностью задачи нахождения решений уравнений из* $[\mathcal{H}, \Phi]$ *в пространстве* X *при информации из* $\mathcal{T}$ *величину*

$$N_\varepsilon([\mathcal{H}, \Phi], \mathcal{T}, X) = \min\{N : E_N([\mathcal{H}, \Phi], X, \mathcal{T}) < \varepsilon\}.$$

Отметим, что при любом множестве способов задания информации $\mathcal{T}$ выполняется неравенство [1, с. 104]

$$cN_\varepsilon([\mathcal{H}, \Phi], \mathcal{T}, X) \leqslant \mathrm{comp}_X([\mathcal{H}, \Phi], \mathcal{T}, \varepsilon), \tag{5}$$

где постоянная c зависит лишь от сложности простейших операций.

Заметим, что для некоторых классов дифференциальных уравнений и классов сингулярных интегральных уравнений задачи оптимизации алгоритмов приближенного решения, близкие по постановке к задаче оптимизации по сложности, рассматривались ранее в работах [2—4].

Определим классы интегральных уравнений, исследуемые в данной работе.

Пусть W^r — линейное пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $H(t, \tau)$, у которых частные производные $H^{(i,j)}(t, \tau) = \partial^{i+j} H(t, \tau)/\partial t^i \partial \tau^j$, $i, j = 0, 1, \ldots, i + j \leqslant r$, непрерывны на квадрате $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$:

$$W^r_{C,\alpha} = \{H : H \in W^r, \max_{(t,\tau)\in Q} |H^{(i,j)}(t, \tau)| \leqslant \alpha_{ij}, i, j = 0, 1, \ldots, i + j \leqslant r\},$$

$$W^r_{2,\alpha} = W^r_{L_2,\alpha} = \left\{H : H \in W^r, \left\{\iint\limits_Q |H^{(i,j)}(t, \tau)|^2 \, dt d\tau\right\}^{1/2} \leqslant \alpha_{ij}, i + j \leqslant r\right\},$$

$$\alpha = \{\alpha_{ij}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}^r_X = \mathcal{H}^r_X(\alpha, \beta)$, $X = C, L_2$, класс интегральных операторов H вида (1), у которых $\|(I - H)^{-1}\|_{X \to X} \leqslant \mu$, а ядра $H(t, \tau)$ принадлежат классу $W^r_{X,\alpha}$. Будем рассматривать следующие классы уравнений вида (2): $\Psi^r_X = \Psi^r_X(\alpha, \beta, \gamma) = [\mathcal{H}^r_X(\alpha, \beta), X^r_\gamma]$, где X^r_γ — шар радиуса γ в пространстве X^r с центром в нуле, а обозначение $[\mathcal{H}, \Phi]$ имеет тот же смысл, что и раньше.

Лемма 1. *При* $r = 1, 2, \ldots, X = C, L_2$

$$\inf_{\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_U} E_N(\Psi^r_X, X, \mathcal{T}) \geqslant c \cdot N^{-r},$$

где постоянная c *не зависит от* N.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству соотношений (8), (9) из [5].

Следствие 1. *При выполнении условий леммы* 1 $\mathrm{comp}_X(\Psi^r_X, \varepsilon) \geqslant c\varepsilon^{-1/r}$.

Это утверждение непосредственно вытекает из леммы 1 и соотношения (5).

Обозначим через $\mathcal{T}_0$ множество способов задания информации, при которых каждому интегральному уравнению вида (2) с оператором вида (1) ставится в соответствие числовой вектор $T(H, f) = (H(t_1, \tau_1), \ldots, H(t_k, \tau_k), f(t_{k+1}), \ldots, f(t_N))$, где t_k, τ_k — некоторые точки из $[0, 2\pi]$, фиксированные для каждого $T \in \mathcal{T}_0$.

Первые результаты об оценке сложности задачи нахождения приближенных решений уравнений Фредгольма II рода были получены в работе

[6] для алгоритмов, использующих в качестве информации значения ядра и свободного члена в некоторой системе точек, т. е. для алгоритмов $A \in \mathcal{A}(T)$ при $T \in \mathcal{T}_0$. А именно: в [6] установлено, что

$$E_N(\Psi_c^r, C, \mathcal{T}_0) \asymp N^{-r/2}, \ \mathrm{comp}_C(\Psi_C^r, \mathcal{T}_0, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-2/r}. \tag{6}$$

Кроме того, из результатов [6] непосредственно следует

$$E_N(\Psi_{L_2}^r, L_2, \mathcal{T}_0) \geqslant c_1 N^{-r/2}, \ \mathrm{comp}_{L_2}(\Psi_{L_2}^r, \mathcal{T}_0, \varepsilon) \geqslant c_2 \varepsilon^{-2/r}. \tag{7}$$

Соотношения (6), (7) можно рассматривать с двух сторон. С одной стороны, известно [4, с. 30], что для любого набора не более чем N непрерывных функционалов, определенных на $W_{X,\alpha}^r$, погрешность оптимального восстановления функций из $W_{X,\alpha}^r$ в $X = C, L_2$ по значениям этих функционалов имеет порядок не выше $N^{-r/2}$, т. е. из (6), (7) следует, что при информации из $\mathcal{T}_0$ решения уравнений из Ψ_X^r восстанавливаются не точнее, чем ядра этих уравнений по любой дискретной информации.

С другой стороны, сравнение соотношений (6), (7) со следствием 1 позволяет предположить существование более экономичных по сложности алгоритмов приближенного решения уравнений из Ψ_X^r, чем алгоритмы, построенные на базе способов задания информации из $\mathcal{T}_0$. Такие более экономичные алгоритмы и изучаются в настоящей работе.

2. Ниже будут рассмотрены способы задания информации, при которых о каждом уравнении из Ψ_X^r известны значения определенных коэффициентов Фурье ядра и свободного члена. Каждому коэффициенту Фурье вида

$$\delta(H) = \int_Q H(t, \tau) \cos(mt - \pi\xi/2) \cos(n\tau - \pi\omega/2)\, dt d\tau,$$

где ξ и ω принимают значения 0 или 1, поставим в соответствие на плоскости точку с целочисленными координатами $((-1)^{\xi} m, (-1)^{\omega} n)$. Пусть Ω — некоторое плоское множество. Будем говорить, что набор функционалов (способ задания информации)

$$T_\Omega(H, f) = \Big(\delta_i(H) = \int_Q H(t, \tau) \cos(m_i t - \pi\xi_i/2) \cos(n_i\tau - \pi\omega_i/2)\, dt d\tau,$$

$$i = 1, 2, \ldots, k, \ \delta_i(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(m_i t - \pi\xi_i/2)\, dt, \ i = k+1, k+2, \ldots, N\Big) \tag{8}$$

содержит коэффициенты Фурье ядер операторов H с номерами из Ω, если множество точек $((-1)^{\xi_i} m_i, (-1)^{\omega_i} n_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, совпадает с множеством точек с целочисленными координатами из Ω.

Нам потребуются некоторые факты из теории приближения (см., например, [7], гл. 8). Обозначим через V_m и S_m действующие в пространство тригонометрических многочленов операторы Валле Пуссена и Фурье, определяемые соотношениями

$$V_m f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \cos k(t - \tau) + \sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(1 - \frac{k-m}{m}\right) \cos k(t - \tau)\right] f(\tau)\, d\tau,$$

$$S_m f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \cos k(t - \tau)\right] f(\tau)\, d\tau.$$

Для $f \in X^r$, $X = C, L_2$, выполняются неравенства

$$\| f - V_m f \|_X \leqslant c_1 m^{-r} \| f^{(r)} \|_X, \ \| V_m \|_{X \to X} \leqslant c_2, \tag{9}$$

где постоянные c_1, c_2 зависят лишь от r и X. Кроме того, для $f \in L_2^r$

$$\| f - S_m f \|_2 \leqslant m^{-r} \| f^{(r)} \|_2, \ \| S_m \|_{L_2 \to L_2} = 1. \tag{10}$$

Известно, что для восстановления функций из классов $W^r_{X,\alpha}$ в пространстве X оптимальными по порядку являются наборы коэффициентов Фурье с номерами из выпуклых множеств специального вида. Оценим сложность алгоритмов, построенных на базе способов задания информации, содержащих такие наборы.

Обозначим через $\mathcal{T}^{\mathrm{conv}}$ множество способов задания информации $T_\Omega(H, f)$ вида (8), отвечающих всевозможным выпуклым множествам Ω, внутренность которых не пуста.

Теорема 1. *При* $r = 1, 2, \ldots$

$$E_N(\Psi_C^r, C, \mathcal{T}^{\mathrm{conv}}) \asymp N^{-\frac{2}{3}r}, \tag{11}$$

$$\mathrm{comp}_C(\Psi_C^r, \mathcal{T}^{\mathrm{conv}}, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-\frac{3}{2r}}. \tag{12}$$

Доказательство. Получим требуемые оценки снизу. Пусть T_Ω — произвольный набор функционалов вида (8), принадлежащий $\mathcal{T}^{\mathrm{conv}} \cap \mathcal{T}_N$. Без потери общности можно предположить, что точки с координатами (1,1), (1,2), (2,1) принадлежат внутренности выпуклого множества Ω, соответствующего набору T_Ω. Пусть натуральные m и n таковы, что

$$(m+1,1) \notin \Omega, \ (1, n+1) \notin \Omega, \ (m, 1) \in \Omega, \ (1, n) \in \Omega. \tag{13}$$

Из выпуклости Ω следует, что треугольник с вершинами (1, 1), (1, n), (m, 1) принадлежит Ω. Так как число точек с целочисленными координатами, попавших в этот треугольник, превышает $mn/2$, а общее число точек с целочисленными координатами из Ω по определению есть $k < N$, то

$$mn \leqslant 2k < 2N. \tag{14}$$

Рассмотрим два простейших интегральных уравнения

$$z_1(t) = \int_0^{2\pi} z_1(\tau)\, d\tau + f_0(t), \tag{15}$$

$$z_2(t) = \int_0^{2\pi} (1 + \lambda H_0(t, \tau))\, z_2(\tau)\, d\tau + f_0(t), \tag{16}$$

где

$$H_0(t, \tau) = \frac{1}{\pi} (\cos(m+1) t \cos \tau / m^r + \cos t \cos(n+1) \tau / n^r),$$

$$f_0(t) = \cos t (1 - \lambda / n^{2r}) + \frac{\cos(n+1) t}{n^r} - \lambda \cos(m+1) t / m^r.$$

Ясно, что параметр λ можно выбрать так, чтобы уравнения (15), (16) принадлежали классу Ψ_C^r. Кроме того, легко проверить, что решениями этих уравнений являются функции

$$z_1(t) = f_0(t), \ z_2(t) = \cos t + \cos(n+1)t/n^r, \ \| z_1 - z_2 \|_C = \frac{\lambda}{n^{2r}} + \frac{\lambda}{m^r}. \tag{17}$$

С помощью обычных приемов нахождения условного экстремума из (14), (17) получаем

$$\min_{\substack{m,n,\\ mn < 2N}} \| z_1 - z_2 \|_C \geqslant c N^{-\frac{2}{3}r}, \tag{18}$$

где постоянная c не зависит от N, T_Ω.

Заметим теперь, что в силу (13) для любого функционала $\delta_i \in T_\Omega$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\delta_i(H_0) = 0$. Тогда при фиксированном способе задания информации $T_\Omega \in \mathcal{T}^{\mathrm{conv}} \cap \mathcal{T}_N$ уравнениям (15) и (16) сопоставляется один и тот же набор значений функционалов из T_Ω и любой алгоритм $A \in \mathcal{A}(T_\Omega)$ в качестве приближенного решения сопоставляет уравнениям (15), (16) одну и ту же функцию $A(T_\Omega, H, f_0)$. Учитывая эти соображения, из (18) находим

$$cN^{-\frac{2}{3}r} \leqslant \| z_1 - z_2 \|_C \leqslant \| z_1 - A(T_\Omega, H, f_0) \|_C +$$
$$+ \| z_2 - A(T_\Omega, H, f_0) \|_C \leqslant 2e_C(\Psi_C^r, A).$$

В силу произвольности $T_\Omega \in \mathcal{T}^{\mathrm{conv}} \cap \mathcal{T}_N$, $A \in \mathcal{A}(T_\Omega)$ из последнего неравенства и из (5) следуют требуемые для (11), (12) оценки снизу.

Для получения оценок сверху рассмотрим способ задания информации

$$T_{\Omega_n}(H, f) = \Big(\int_Q H(t, \tau) \cos(mt - \pi\xi/2) \cos(l\tau - \pi\omega/2)\, dt d\tau,$$

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(mt - \pi\xi/2)\, dt,\ m = 0, 1, \dots, 2n^2 - 1,\ l = 0, 1, \dots n-1, \xi, \omega = 0, 1),$$

определяемый прямоугольником $\Omega_n = \{(t, \tau) : |t| \leqslant 2n^2 - 1,\ |\tau| \leqslant n - 1\}$. Ясно, что

$$T_{\Omega_n} \in \mathcal{T}^{\mathrm{conv}} \cap \mathcal{T}_N,\ N = 8n^3 - 2n. \tag{19}$$

Пусть A_n — алгоритм из $\mathcal{A}(T_{\Omega_n})$, при котором приближенное решение $z(A_n) = A_n(T_{\Omega_n}, H, f)$ любого уравнения (2) определяется из уравнения с вырожденным ядром

$$z(A_n) = V_{n^2} H S_n z(A_n) + V_{n^2} f, \tag{20}$$

где V_{n^2}, S_n — определенные выше операторы Валле Пуссена и Фурье соответствующих порядков.

Оценим число арифметических операций, которые нужно выполнить для определения $z(A_n)$ из уравнения (20). Если искать $z(A_n)$ в виде

$$z(A_n) = V_{n^2} f + \sum_{l=1}^{n} x_l V_{n_2} H \cos(l-1)t + \sum_{l=n+1}^{2n-1} x_l V_{n^2} H \sin(l-n)t, \tag{21}$$

то неизвестные коэффициенты x_l, $l = 1, 2, \dots, 2n-1$, находятся из следующей системы линейных уравнений ((φ, ψ) — обычное скалярное произведение в L_2):

$$x_m = \frac{\lambda_m}{\pi} \sum_{l=1}^{n} x_l (\cos(m-1)t, H\cos(l-1)t) + \frac{\lambda_m}{\pi} \sum_{l=n+1}^{2n-1} x_l \times$$
$$\times (\cos(m-1)t, H\sin(l-n)t) + \frac{\lambda_m}{\pi} (\cos(m-1)t, f(t)),\ m = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_m = \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^{n} x_l (\sin(m-n)t, H\cos(l-1)t) + \frac{1}{\pi} \sum_{l=n+1}^{2n-1} x_l \times \tag{22}$$
$$\times (\sin(m-n)t, H\sin(l-n)t) + \frac{1}{\pi} (\sin(m-n)t, f(t)),\ m = n+1, \dots$$
$$\dots, 2n-1,\ \lambda_1 = 1/2,\ \lambda_m = 1,\ m = 2, 3, \dots .$$

Таким образом, если известны значения функционалов из $T_{\Omega_n}(H, f)$, то для нахождения решения системы (22) нужно выполнить не более $O(n^3)$ арифметических операций над этими значениями. После этого для перехода от представления (21) к стандартному представлению

$$z(A_n)=\sum_{m=1}^{2n^2} a_m\cos(m-1)t+b_m\sin(m-1)t, \qquad (23)$$

т. е. для приведения подобных членов в (21), потребуется выполнить еще $O(n^3)$ арифметических операций. С учетом (19) это означает:

$$\mathrm{comp}(A_n)\asymp n^3. \qquad (24)$$

Оценим погрешность алгоритма A_n на классе Ψ_C^r. Учитывая (10) и повторяя рассуждения, приведенные в [8] при доказательстве соотношения (17), получаем, что для $f\in C^\nu$, $H\in\mathcal{H}_C^r$ выполняется неравенство

$$\| H-HS_n)f\|_C\leqslant cn^{-r-\nu}\| f^{(\nu)}\|_C, \qquad (25)$$

где постоянная c не зависит от n, H, f. Условимся в дальнейшем обозначать через c различные постоянные, зависящие лишь от параметров, входящих в определение классов Ψ_X^r.

Из (9), (25) и равномерной ограниченности нормы $\| S_n\|_{C\to L_2}$ для $f\in C^\nu$ получаем

$$\|(H-V_{n^2}HS_n)f\|_C\leqslant\|(H-HS_n)f\|_C+\|HS_nf-V_{n^2}HS_nf\|_C\leqslant$$

$$\leqslant cn^{-r-\nu}\|f^{(\nu)}\|_C+c_1n^{-2r}\left\|\frac{d^r}{dt^r}HS_nf\right\|_C\leqslant c(n^{-r-\nu}\|f^{(\nu)}\|_C+n^{-2r}\|S_nf\|_2)\leqslant$$

$$\leqslant c(n^{-r-\nu}\|f^{(\nu)}\|_C+n^{-2r}\|f\|_C). \qquad (26)$$

При $\nu=0$ из (26) и теоремы о разрешимости приближенного уравнения [9, с. 517] следует, что при достаточно больших n для любого $H\in\mathcal{H}_C^r$

$$\|(I-V_{n^2}HS_n)^{-1}\|_{C\to C}\leqslant\frac{\beta}{1-\beta cn^{-r}}. \qquad (27)$$

Таким образом, из (20), (26), (27) для алгоритма A_n и любого уравнения (2) из класса Ψ_C^r находим

$$\|z-A_n(T_{\Omega_n},H,f)\|_C\leqslant\|(I-V_{n^2}HS_n)^{-1}\|_{C\to C}(\|f-V_{n^2}f\|_C+$$

$$+\|(H-V_{n^2}HS_n)z\|_C)\leqslant cn^{-2r}\|f^{(r)}\|_C+cn^{-2r}(\|z\|_C+\|z^{(r)}\|_C)\leqslant cn^{-2r}\beta\gamma.$$

Последнее неравенство означает, что

$$e_C(\Psi_C^r,A_n)\leqslant cn^{-2r}. \qquad (28)$$

Из (19), (24) и (28) при $n\asymp\varepsilon^{-\frac{1}{2r}}$ и $n\asymp N^{1/3}$ получаем оценки сверху, требуемые для завершения доказательства теоремы 1.

Аналогично устанавливается следующая теорема.

Теорема 2. *При* $r=1,2,\ldots$

$$E_N(\Psi_{L_2}^r,L_2,\mathcal{T}^{\mathrm{conv}})\asymp N^{-\frac{2}{3}r},\quad \mathrm{comp}_{L_2}(\Psi_{L_2}^r,\mathcal{T}^{\mathrm{conv}},\varepsilon)\asymp\varepsilon^{-\frac{3}{2r}}.$$

Сравнение теорем 1, 2 с соотношениями (6), (7) показывает, что для классов Ψ_X^r, $X=C, L_2$, на базе способов задания информации из $\mathcal{T}^{\mathrm{conv}}$ удается строить более экономичные алгоритмы, чем на базе способов задания информации из $\mathcal{T}_0$. С другой стороны, лемма 1 позволяет предположить существование для классов Ψ_X^r алгоритмов со сложностью порядка $\varepsilon^{-1/r}$. Такие алгоритмы можно построить, используя в качестве информации наборы функционалов (8), содержащие двухмерные коэффициенты Фурье с номерами из гиперболических крестов.

1. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов.— М. : Мир, 1983.— 382 с.
2. *Бахвалов Н. С.* О свойствах оптимальных алгоритмов решения задач математической физики // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1970.— **10**, № 3.— С. 555—568.
3. *Иванов В. В.* Об оптимальных алгоритмах численного решения сингулярных интегральных уравнений // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.— М. : Наука, 1972.— С. 209—219.
4. *Теоретические* основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / Под ред. К. И. Бабенко.— М. : Наука, 1979.— 295 с.
5. *Переверзев С. В.* Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 1.— С. 55—63.
6. *Емельянов К. В., Ильин А. М.* О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1967.— **7**, № 4.— С. 905—910.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М. : Наука, 1977.— 512 с.
8. *Переверзев С. В.* Оптимизация аппроксимационно-итеративных методов приближенного решения интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн.— 1985.— **26**, № 3.— С. 106—116.
9. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 13.02.87