УДК 519.4

Ю. И. Любич

Диссипативные действия и почти периодические представления абелевых полугрупп

1. Пусть X — метрический компакт ($d(x, y)$ — метрика), S — топологическая абелева (аддитивная) полугруппа с нулем, A — ее действие в X, т. е. $(s, x) \mapsto A(s)x$ есть раздельно непрерывное отображение $S \times X \to X$, $A(s+t) = A(s)A(t)$, $A(0) = \mathrm{id}$. Асимптотическая структура действия связана с естественным направлением на $S : \tau \geqslant t \Leftrightarrow \exists s : \tau = s + t$ [1]. При этом каждая орбита $O(x) = \{A(s)x\}$ является направленностью $S \to X$, что позволяет говорить о предельных точках орбит, сходимости, пределах и т. д. [2]. Множество предельных точек орбиты $O(x)$ обозначим через $\Omega(x)$. Очевидно, оно непусто, инвариантно для действия A и компактно. Если $x \in \Omega(x)$, то точка x называется *рекуррентной*. В этом случае $\Omega(x) = \overline{O(x)}$ — замыкание орбиты. Орбита $O(x)$ сходится к точке z, если и только если $\Omega(x) = \{z\}$. При этом точка z неподвижна для A, т. е. для всех $A(s)$. Множество всех неподвижных точек действия A обозначим через Φ.

Непустое замкнутое инвариантное множество $M \subset X$ называется *притягивающим* для множества $Y \subset X$, если

$$\lim_s d(A(s)y, M) = 0, \ y \in Y, \tag{1}$$

т. е. $\Omega(y) \subset M$ для всех $y \in Y$. Множество M называется *локальным аттрактором*, если оно притягивающее для некоторой своей окрестности V и каждая точка множества M является предельной для некоторой орбиты $O(x)$, $x \in V$. Это означает, что

$$M = \bigcup_{x \in V} \Omega(x). \tag{2}$$

В частности, если M состоит из одной точки z, то это — притягивающая неподвижная точка, т. е. такая точка $z \in \Phi$, что орбиты всех точек из некоторой ее окрестности сходятся к z.

Глобальным аттрактором (или просто *аттрактором*) действия A называется множество

$$\Omega = \bigcup_{x \in X} \Omega(x). \tag{3}$$

Очевидно, Ω непусто и инвариантно, содержит все неподвижные (и даже все рекуррентные) точки. Действие называется *примитивным*, если Ω состоит из одной точки, что эквивалентно сходимости всех орбит к одной точке.

Действие A называется *диссипативным*, если все отображения $A(s)$ — сжатия: $d(A(s)x, A(s)y) \leqslant d(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Диссипативное действие, очевидно, устойчиво по Ляпунову. Обратно, любое действие A диссипативно в метрике $\tilde{d}(x, y) = \sup_s d(A(s)x, A(s)y)$, которая топологически эквивалентна метрике d, если A устойчиво по Ляпунову (в общем случае $\tilde{d}$ сильнее). Этим можно мотивировать важность класса диссипативных действий для общей теории динамических систем, не говоря уже о том, что диссипативные действия возникают во многих конкретных ситуациях (см., например, [3]). Всюду ниже A — диссипативное действие, однако все его топологически инвариантные свойства имеют место для любого действия, устойчивого по Ляпунову. Наша цель состоит в изучении асимптотического поведения орбит. Начнем со следующего замечания.

Предложение 1. *Для сходимости орбиты $O(x)$ необходимо и достаточно, чтобы все ее предельные точки были неподвижными.*

Следствие 1. *Для сходимости всех орбит необходимо и достаточно, чтобы $\Omega = \Phi$.*

Заметим теперь, что аттрактор Ω *равномерно притягивает* к себе компакт X:

$$\lim_s \sup_x d(A(s)\,x,\ \Omega) = 0. \tag{4}$$

Поэтому *какова бы ни была направленность $x(s)$ со значениями в X, все предельные точки направленности $A(s)\,x(s)$ принадлежат* Ω. Из этого следует $\Omega \supset \bigcap_s A(s)\,X$.

Но и обратное включение справедливо. Действительно, если $z \in \Omega$, то $z \in \Omega(x)$ для некоторого x. Пусть однако $z \bar{\in} A(t)\,X$ при некотором $t \in S$. Рассмотрим окрестность $N = X \setminus A(t)\,X$ точки z. Существует $s \geqslant t$ такое, что $A(s)\,x \in N$. Вместе с тем $A(s)\,x \in A(s)\,X \subset A(t)\,X$, ибо $s \geqslant t$. Это противоречит определению окрестности N. Итак, доказана формула

$$\Omega = \bigcap_s A(s)\,X = \bigcap_{s \geqslant t} A(s)\,X,\ t \in S. \tag{5}$$

Ее непосредственным следствием является компактность аттрактора Ω. Отметим еще одно существенное следствие.

Теорема 1. *Если компакт X связен, то и аттрактор Ω связен.*

Доказательство. Пусть $\Omega = Q_1 \cup Q_2$, где Q_1, Q_2 — непустые компакты, $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Возьмем столь малое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестности компактов Q_1, Q_2 не пересекаются. В силу (4) существует $t \in S$ такое, что $A(t)\,X$ лежит в ε-окрестности аттрактора Ω. Но тогда $A(t)\,X$ оказывается несвязным.

Теорема 1 приводит к эффекту «глобализации» аттрактора диссипативного действия.

Теорема 2. *Если компакт X связен и M — локальный аттрактор, то $\Omega = M$.*

Доказательство. Пусть M притягивает к себе свою окрестность V. Рассмотрим *область притяжения* множества M, т. е. множество Y_M всех $y \in X$, для которых $\lim_s d(A(s)\,y,\ M) = 0$. Очевидно, оно инвариантно вместе со своим дополнением (т. е. *вполне инвариантно*) и, кроме того, открыто, ибо $Y_M = \bigcup_s A(s)^{-1}V$. Если $Y_M \neq X$, то Ω имеет непустое пересечение с $X \setminus Y_M$. Вместе с тем $\Omega \cap Y_M = M$. Следовательно, Ω несвязно, вопреки теореме 1.

Следствие 2. *Если компакт X связен и существует притягивающая неподвижная точка, то все траектории сходятся к этой точке (т. е. действие примитивно).*

Действие A называется *изометрическим*, если все $A(s)$ — изометрии: $d(A(s)\,x,\ A(s)\,y) = d(x,\ y)$ для всех $s \in S$, x, $y \in X$.

Теорема 3. *Действие $A \mid \Omega$ — изометрическое и Ω является наибольшим инвариантным множеством с этим свойством.*

Доказательство. Для того чтобы сжатие компакта было изометрией, необходимо и достаточно, чтобы оно было сюръективным [4, 5]. Но из (5) следует, что все сужения $A(t) \mid \Omega$ сюръективны. Действительно, если $x \in \Omega$, то $x = A(t)\,A(\tau)\,x(\tau)$ для всех $\tau \in S$ и некоторой направленности $x(\tau)$. Если z — предельная точка направленности $A(\tau)\,x(\tau)$, то $z \in \Omega$ и $x = A(t)\,z$.

Пусть теперь Y — любое инвариантное множество, для которого $A \mid Y$ — изометрическое. Тогда $\bar{Y}$ — компакт с теми же свойствами. Следовательно, $\bar{Y} = A(s)\,\bar{Y}$, $s \in S$, откуда $\bar{Y} \subset \Omega$.

Для любого изометрического действия имеет место аналог классической теоремы Пуанкаре о возвращении.

Теорема 4. *Если A — изометрическое действие, то все точки компакта X рекуррентны.*

Доказательство. Если точка x не рекуррентна, то $d(A(s)x, x) > \varepsilon$ для некоторых $\varepsilon > 0$, $t \in S$ и всех $s \geqslant t$. Тогда $d(A(nt)x, A(mt)x) > \varepsilon$ (n, m — целые, $0 < m < n$) вопреки компактности.

Следствие 3. *Если A — изометрическое действие, то $\Omega = X$.*

Следствие 4. *Для любого диссипативного действия аттрактор совпадает с множеством рекуррентных точек.*

Следствие 5. *Бинарное отношение $x \in \Omega(y)$ на аттракторе является эквивалентностью.*

Классы этой эквивалентности — это множества $\Omega(x) = \overline{O(x)}$, $x \in \Omega$. Они называются *эргодическими классами* данного действия. Таким образом, для любых двух x, $y \in \Omega$ либо $\Omega(x) \cap \Omega(y) = \varnothing$, либо $\Omega(x) = \Omega(y)$. Действие A называется эргодическим, если его эргодический класс единствен, т. е. $\Omega(x) = \Omega$ для всех $x \in \Omega$; иными словами, орбита некоторой (а тогда и любой) точки $x \in \Omega$ плотна в Ω, т. е. эргодичность диссипативного действия — это топологическая транзитивность на аттракторе.

Полезно для дальнейшего отметить, что примитивность действия эквивалентна сходимости всех орбит в соединении с эргодичностью (см. следствие 1).

2. Все орбиты диссипативного действия A как функции $S \to X$ почти периодичны (п. п.) по Бохнеру (ср. с [6]). Наряду с этим имеется тесная связь с п. п. представлениями, что, в частности, открывает возможность построения на основе [1] некоторой спектральной теории диссипативных действий. Именно: свяжем с A представление полугруппы S в пространстве $C(X)$ обычным образом: $(T(s)f)(x) = f(A(s)x)$. Это — стохастическое п. п. представление. По теореме об отщеплении граничного спектра [1] $C(X) = B_0 \dotplus B_1$, где $B_0 = \{f \mid \lim\limits_{s} T(s)f = 0\}$ — внутреннее подпространство, B_1 — замыкание линейной оболочки весовых функций, отвечающих унитарным весам представления (граничное подпространство). При этом все $T(s) \mid B_1$ — обратимые изометрии, а граничный проектор P ($\mathrm{Im}P = B_1$, $\mathrm{Ker}P = B_0$) ортогонален, т. е. $\| P \| = 1$, если $P \neq 0$. Опишем подпространства B_0 и B_1 непосредственно в терминах действия A.

Теорема 5. *Оператор ограничения $R: C(X) \to C(\Omega)$ изометрически отображает B_1 на $C(\Omega)$; $\mathrm{Ker}R = B_0$; R сплетает $T \mid B_1$ с представлением, которое порождается в $C(\Omega)$ действием $A \mid \Omega$.*

Доказательство. Равенство $B_0 = \mathrm{Ker}R$ следует из (4). Так как $B_0 \cap B_1 = 0$, то $R \mid B_1$ инъективен. Очевидно, $\| R \| \leqslant 1$. Далее воспользуемся тем, что для любого компакта $Y \subset X$ существует изометрический линейный оператор продолжения $E: C(Y) \to C(X)$ [7]. Возьмем $Y = \Omega$ и положим $Q = PE$. Очевидно, $\mathrm{Im}Q \subset B_1$, $\| Q \| \leqslant 1$. Достаточно показать, что Q — правый обратный к R. Но $f - Pf \in B_0$ для всех $f \in C(X)$, откуда $f \mid \Omega = RPf$. Следовательно, для всех $g \in C(\Omega)$ будет $RQg = RPEg = Eg \mid \Omega = g$. Последнее утверждение теоремы легко проверяется.

Замечание. Операторы P и R стохастичны, E можно выбрать стохастическим, тогда таковым будет и Q.

Следствие 6. *Для сходимости всех орбит необходимо и достаточно, чтобы не существовало унитарных весов, отличных от единицы, т. е. чтобы уравнение*

$$f(A(s)x) = \chi(s) f(x), \quad s \in S, \quad x \in X, \tag{6}$$

для любого унитарного характера $\chi \neq 1$ имело только тривиальное непрерывное решение.

Последнее условие эквивалентно тому, что все функции $f \in B_1$ инвариантны, т. е. $f(A(s)x) \equiv f(x)$ (сокращенно: $f = \mathrm{inv}$). В общем случае инвариантные функции образуют в B_1 подпространство, содержащее все константы. Дуальным к нему является подпространство инвариантных мер на X. Среди таких мер есть вероятностная. В силу (4) все инвариантные меры сосредоточены на Ω.

Предложение 2. *Для эргодичности действия необходимо и достаточно, чтобы у него не было инвариантных функций, отличных от констант.*

Доказательство. Пусть A эргодично и $f = \mathrm{inv}$. Тогда $f \in B_1$, $Rf = f \mid \Omega = \mathrm{const}$. Но тогда и $f = \mathrm{const}$.

Пусть A не эргодично. Тогда найдутся $x, y \in \Omega$ такие, что $\Omega(x) \cap \cap\, \Omega(y) = \varnothing$. Возьмем $\varphi \in C(X)$, $\varphi \mid \Omega(x) = 1$, $\varphi \mid \Omega(y) = 0$ и усредним по ядру Сушкевича представления T [1]. Получим $f = \mathrm{inv}$, $f(x) = 1$, $f(y) = 0$.

Следствие 7. *Для примитивности действия необходимо и достаточно, чтобы у него не было унитарных весов, отличных от единицы, и инвариантных функций, отличных от констант.*

Дуальная формулировка предложения 2 показывает, что принятое нами определение эргодичности эквивалентно обычному «метрическому» определению.

Предложение 2'. *Для эргодичности действия необходимо и достаточно, чтобы у него не было двух различных инвариантных вероятностных мер.*

Из предложения 2 стандартным путем выводится еще одно следствие.

Следствие 8. *Если действие эргодично, то модули всех весовых функций, отвечающих унитарным весам, постоянны, а весовые подпространства одномерны.*

Унитарные веса эргодического действия образуют группу, дуальную компактной абелевой группе K — ядру Сушкевича представления T [1]. Аттрактор в этом случае гомеоморфен K.

Теорема 6. *Для эргодического действия A существует гомеоморфизм $K \to \Omega$, сплетающий регулярное действие на K некоторой плотной подполугруппы $\Gamma \subset K$ с $A \mid \Omega$.*

Доказательство. Группа K есть сильное замыкание полугруппы операторов $T(s) \mid B_1$ [1]. В силу теоремы 5 ее можно отождествить с сильным замыканием полугруппы Γ операторов $U(s)$, порождаемой в $C(\Omega)$ действием $A \mid \Omega$. Если $V \in K$, то $(Vf)(x) = f(\theta_V x)$, $x \in \Omega$, где θ_V — гомеоморфизм компакта Ω. Это следует из стохастичности V и V^{-1}. Возьмем $x_0 \in \Omega$ и положим $\gamma(V) = \theta_V x_0$. Легко видеть, что $\gamma: K \to \Omega$ — непрерывное отображение с плотным образом. Но тогда $\mathrm{Im}\,\gamma = \Omega$, ибо K и Ω — компакты. Кроме того, γ инъективно, так как если $\theta_V x_0 = x_0$, то все точки орбиты $O(x_0)$ неподвижны для θ_V, а тогда $\theta_V = \mathrm{id}$, ибо орбита плотна. Таким образом, γ — гомеоморфизм.

Замечание. Из доказательства видно, что *если полугруппа S связна, то и Γ связна.*

Следствие 9. *Если A — эргодическое действие в конечномерном связном и локально связном компакте X, то его аттрактор Ω гомеоморфен некоторому тору T^m, $0 \leqslant m \leqslant \dim X$, причем существует такой гомеоморфизм $\Omega \to T^m$, при котором действие $A \mid \Omega$ переходит в действие некоторой плотной подполугруппы $\Gamma \subset T^m$ сдвигами на торе.*

Действительно, в этом случае аттрактор связен и локально связен, а связная, локально связная конечномерная компактная абелева группа есть тор.

Замечание. Если S связна и $m = 1$, то $\Gamma = T^1$, так как подполугруппа Γ плотна и связна.

В общем случае, замечая, что ограничение $A \mid \Omega(x)$ для любой точки $x \in X$ эргодично, получаем такое следствие.

Следствие 10. *Если X — конечномерный связный компакт, A — диссипативное действие со связными локально связными орбитами, то аттрактор Ω действия A является объединением неподвижных точек и попарно непересекающихся инвариантных торов, на каждом из которых действие сопряжено с действием плотной подполугруппы сдвигами.*

Таким образом, разбиение асимптотически существенной части фазового пространства на инвариантные торы является необходимым атрибутом устойчивой по Ляпунову динамической системы со сколь угодно сложной временной полугруппой S, но с конечномерным связным фазовым пространством и связными локальносвязными орбитами. Для $S=R_+$ эта картина по существу известна [8].

В заключение рассмотрим случай, когда X — выпуклый компакт в банаховом пространстве.

Теорема 7. *Аттрактор Ω диссипативного действия A на выпуклом компакте строго нормированного банахова пространства E есть выпуклый компакт и действие $A \mid \Omega$ аффинно.*

Доказательство. Для любых двух точек $x, y \in \Omega$ $A(s)$-образ отрезка $[x, y]$ имеет длину $\leqslant \|y-x\| = \|A(s)y - A(s)x\|$. Так как пространство строго нормировано, то для любого $z \in [x, y]$ будет $A(s)z \in [A(s)x, A(s)y]$ и $\|A(s)z - A(s)x\| = \|z-x\|$. Но тогда если $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то $A(s)z = \lambda A(s)x + (1-\lambda)A(s)y$. Остается доказать, что $z \in \Omega$. С этой целью рассмотрим естественное (покомпонентное) действие $\tilde{A}$ на декартовом квадрате $\Omega^2 \subset X^2 \subset E^2$ (норму в E^2 введем как максимум норм компонент). Так как $\tilde{A}$ изометрично, то все точки из Ω^2 рекуррентны, в частности рекуррентна пара (x, y). Но тогда рекуррентна и точка z. Следовательно, $z \in \Omega$.

Теорема 7 аналогична известному факту выпуклости множества общих неподвижных точек семейства коммутирующих сжатий выпуклого компакта в строго нормированном пространстве. Условие строгой нормированности здесь, как и в теореме 7, отбросить нельзя.

1. *Любич М. Ю., Любич Ю. И.* Спектральная теория почти периодических представлений полугрупп // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 5.— С. 632—636.
2. *Келли Д. Л.* Общая топология.— М. : Наука, 1981.— 431 с.
3. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // Успехи мат. наук.— 1983.— Вып. 4.— С. 133—187.
4. *Бродский М. С., Мильман Д. П.* О центре выпуклого множества // Докл. АН СССР.— 1948.— **59**, № 5.— С. 837—840.
5. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа.— М. : Наука, 1975.— 511 с.
6. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 204 с.
7. *Борсук К.* Теория ретрактов.— М. : Мир, 1971.— 283 с.
8. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.; Л. : Гостехиздат. 1947.— 550 с.

Харьк. ун-т

Получено 17.12.85