УДК 517.53

М. Л. Содин

Нули и единицы целых функций конечного порядка

Пусть f — целая функция конечного порядка, $E = f^{-1}\{0, 1\}$. Вопрос о точной характеризации этого множества представляется в настоящее время достаточно трудным. (Отметим, что он эквивалентен вопросу о разрешимости уравнения $X^2 + 1 = g$ в классе целых функций, где g — каноническое произведение, построенное по множеству E.) Ряд результатов о множестве E получен в работах Гросса и Янга [1, 2], Гундерсена и Янга [3], Г. А. Барсегяна [4]. В настоящей работе докажем две теоремы метрического характера о распределении точек множества E.

Пусть $\rho(r) \to \rho > 0$, $r \to \infty$, — уточненный порядок [5], гл. 2, $V(r) = r^{\rho(r)}$ — функция сравнения. Через $A(V)$ обозначим класс целых функций f таких, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln M(r, f)}{V(r)} = 1, \tag{1}$$

где $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Обозначим $D(z, t) = \{w : |w - z| < t\}$, $D(t) = D(0, t)$, $K(r, R) = \overline{D(R) \setminus D(r)}$. Через $\operatorname{cap}(B)$ обозначим логарифмическую емкость множества $B \subset \mathbb{C}$, $\overline{\operatorname{cap}}(B) = \limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\operatorname{cap}(B \cap D(r))}{r}$ — верхняя относительная логарифмическая емкость.

Теорема 1. *Пусть* $f \in A(V)$, $E = f^{-1}\{0, 1\}$, $E_{1/2} = E_{1/2}(M) = \bigcup\limits_{z\in E} D(z, M|z|/\sqrt{V(|z|)})$. *Тогда найдутся положительные числа* M, k, *зависящие лишь от* ρ, *такие, что* $\overline{\operatorname{cap}}(E_{1/2}) \geqslant k$.

В следующей теореме охарактеризуем множество E иным способом (ср. с теоремой Р. Неванлинны [6], гл. 4, теорема 2).

Теорема 2. *Пусть f — целая функция положительного порядка* ρ, $E = f^{-1}\{0, 1\}$, $\delta = \delta(R)$ *не возрастает*, $R^{-p} \leqslant \delta(R) < 1$, $p > 0$, Π — *произвольное покрытие множества* $E \cap K(R/2, R)$ *кругами радиуса* $R\delta(R)$, *через $N = N(R, \delta; \Pi)$ обозначим число кругов в этом покрытии. Тогда*

$$N(R, \delta; \Pi) \geqslant k \ln \frac{1}{\delta(R)}, \quad R \geqslant 1,$$

где постоянная $k > 0$ зависит лишь от чисел ρ, p и не зависит от покрытия Π и функции f.

Напомним, что множество $P \subset \mathbb{C}$ называется пикаровским для некоторого класса K трансцендентных мероморфных функций, если всякая функция $f \in K$ принимает в $\mathbb{C} \setminus P$ бесконечное число раз каждое значение из $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, двух значений.

Пусть $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$, $\nu(r)$ — считающая функция последовательности $\{|a_k|\}$, $\nu_1(r) = \nu(r) - \nu(r/2)$, $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} D(a_k, |a_k| \delta(|a_k|))$, где функция $\delta(r)$ такая же, как и в теореме 2. Тогда из теоремы 2 вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть выполняется $\nu_1(r) = o\left(\ln \frac{1}{\delta(r)}\right)$, $r \to \infty$. Тогда множество P пикаровское для произвольной целой функции положительного конечного порядка.*

Пикаровские множества в классе целых функций с ограничениями на рост ранее не описывались. В работах [7—10] при описании пикаровских множеств в классе целых функций предполагается, что $|a_n| / |a_{n-1}| \geqslant q > 1$, тогда $\nu_1(r) = O(1)$, $r \to \infty$. Экстремальными в этих теоремах являются целые функции нулевого порядка, растущие не быстрее $\ln^2 r$.

Доказательства обеих теорем основаны на простом наблюдении. Пусть $\rho_f = \frac{|f'|}{1 + |f|^2}$ — сферическая производная функции f; через μ_f обозначим меру с плотностью $\frac{1}{\pi} \rho_f^2$ относительно плоской меры Лебега. Из теории Дюфренуа [11], гл. 6, следует, что основная часть меры μ_f сосредоточена в окрестности множества E. С другой стороны, μ_f — риссовская мера неотрицательной субгармонической функции $u = \ln \sqrt{1 + |f|^2}$ (см., например, [5, с. 19]), поэтому она не может быть сосредоточена на редком множестве.

Доказательство теоремы 1. Если $z \notin E_{1/2}$, то $\operatorname{dist}(z, E) \geqslant \frac{M}{2} |z| / \sqrt{V(|z|)}$, и в силу теоремы Дюфренуа [11], теорема 6.2, выполняется

$$\rho_f(z) \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\operatorname{dist}(z, E)} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{M} \frac{\sqrt{V(|z|)}}{|z|},$$

поэтому

$$\mu_f(D(r) \setminus E_{1/2}) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D(r) \setminus E_{1/2}} \rho_f^2 dm_2 \leqslant \frac{\mathrm{const}}{M^2} \int_1^r \frac{V(t)}{t} dt \leqslant \frac{\mathrm{const}}{M^2 \rho} V(r). \tag{2}$$

(Здесь и далее через const мы обозначаем различные абсолютные положительные постоянные.)

Зафиксируем $r = |z|$, $R = 2r$. Рассмотрим потенциал Грина

$$G_R \nu(z) = \iint\limits_{D(R)} G_R(z, \xi) \, d\nu(\xi),$$

где G_R — ядро Грина для круга $D(R)$. В силу формулы Пуассона—Иенсена и неотрицательности субгармонической функции $u(z)$ имеем

$$G_R \mu_f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi}) \frac{\partial G_R(z, Re^{i\varphi})}{\partial R} d\varphi - u(z) \leqslant V(R) \leqslant \mathrm{const}\, 2^{\rho} V(r). \tag{3}$$

Обозначим через c_R гринову емкость относительно круга $D(R)$. Оценим снизу величину $c_R(E\cap D(r))$. Пусть λ — равновесная мера множества $E_{1/2}\cap\cap D(r)$ для ядра Грина G_R. В силу неотрицательности потенциала Грина «принципа взаимности» и (3) имеем

$$\mu_f(E_{1/2}\cap D(r)) = \iint\limits_{E_{1/2}\cap D(r)} G_R\lambda d\mu_f \leqslant \iint\limits_{D(R)} G_R\lambda d\mu_f = \iint\limits_{D(R)} G_R\mu_f d\lambda =$$

$$= \iint\limits_{E_{1/2}\cap D(r)} G_R\mu_f d\lambda \leqslant \text{const}\, 2^{\rho} V(r)\, c_R(E_{1/2}\cap D(r)). \qquad (4)$$

Используя (2) и (4), получаем

$$c_R(E_{1/2}\cap D(r)) \geqslant \text{const}\, 2^{-\rho}\frac{\mu_f(E_{1/2}\cap D(r))}{V(r)} \geqslant$$

$$\geqslant \text{const}\, 2^{-\rho}\left(\frac{\mu_f(D(r))}{V(r)} - \frac{\text{const}}{M^2\rho}\right). \qquad (5)$$

Через B^t обозначим гомотетию множества B с коэффициентом t относительно начала координат. Тогда

$$\frac{\text{cap}\,(B\cap D(r))}{r} = \text{cap}\,(B^{1/r}\cap D(1)) = \exp\{-c^{-1}(B^{1/r}\cap D(1))\} \geqslant$$

$$\geqslant \exp\{-\text{const}\, c_2^{-1}(B^{1/r}\cap D(1))\} = \exp\{-\text{const}\, c_R^{-1}(B\cap D(r))\}, \qquad (6)$$

где c — винеровская емкость, c_2 — емкость Грина относительно круга D (2).

Так как порядок функции f положителен, то существует постоянная k, зависящая лишь от ρ, такая, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\mu_f(D(r))}{V(r)} \geqslant k > 0. \qquad (7)$$

Объединяя оценки (5)—(7), получаем утверждение теоремы 1.

Замечание. Если множество E расположено на конечном числе прямых (как известно, [5], гл. 6, в этом случае порядок функции f конечен), то теорему 1 можно усилить. Положим

$$E_{3/4} = E_{3/4}(M) = \bigcup_{z\in E} D\left(z,\ M\,\frac{|z|}{(V(|z|))^{3/4}}\right).$$

Покажем, что в условиях теоремы 1 множество $E_{1/2}$ можно заменить на $E_{3/4}$.

По теореме Дюфренуа

$$\max\{\rho_f^2(z): z\in E_{1/2}\setminus E_{3/4}\} \leqslant \frac{\text{const}\,(V(r))^{3/2}}{M^2r^2}\ . \qquad (8)$$

Через $\theta(r)$ обозначим угловую меру множества $E_{1/2}\cap\{z: |z| = r\}$. Тогда

$$\theta(r) \leqslant \frac{\text{const}}{\sqrt{V(r)}}\, p, \qquad (9)$$

где p — число лучей, на которых расположены точки множества E.

Используя (8), (9) и свойства уточненного порядка, получаем

$$\mu_f((E_{1/2}\setminus E_{3/4})\cap D(r)) \leqslant \theta(r)\,\frac{\text{const}}{M^2}\int\limits_1^r \frac{(V(t))^{3/2}}{t}\,dt \leqslant \frac{\text{const}}{M^2}\, pV(r). \qquad (10)$$

Объединив оценки (2), (7), (10) и повторив уже проводившиеся рассуждения, получаем необходимое усиление теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Выберем число $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$, $0 < \varepsilon < 1$, так, чтобы

$$\delta^{2\varepsilon}(r) V(r) \to \infty, \quad r \to \infty, \tag{11}$$

где V — функция сравнения, для которой выполняется (1).

Пусть $D_j = D(z_j, R\delta(R))$, $D_j' = D(z_j, R\delta^{\varepsilon}(R))$, $E \cap K(R/2, R) \subset \bigcup_{j=1}^{N} D_j$, $N = N(R, \delta)$. Если для каждого j $z \notin D_j'$, то по теореме Дюфренуа $\rho_f^2(z) \leqslant \leqslant \frac{\text{const}}{R^2\delta^{2\varepsilon}(R)}$, поэтому в силу (11)

$$\mu_f\left(K(R/2, R) \setminus \bigcup_{j=1}^{N} D_j'\right) \leqslant \frac{\text{const}}{\delta^{2\varepsilon}(R)} = o(V(R)), \quad R \to \infty. \tag{12}$$

В силу (7) можно выбрать такие сколь угодно большие числа R, чтобы выполнялось

$$\mu_f(K(R/2, R)) \geqslant k_1 V(R). \tag{13}$$

Объединяя оценки (11) и (12), получаем

$$\varepsilon k_1 V(R) \ln \frac{1}{\delta(R)} \leqslant \varepsilon \mu_f(K(R/2, R)) \ln \frac{1}{\delta(R)} \leqslant 2\varepsilon\mu_f\left(\bigcup_{j=1}^{N} D_j'\right) \ln \frac{1}{\delta(R)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{R\delta^{\varepsilon}(R)}^{R\delta(R)} \mu_f(D(z_j, t)) \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{j=1}^{N} [\max_{|z| \leqslant 2R} u(z) - u(z_j)] \leqslant 2^{\rho} V(R) N(R, \delta).$$

Сравнивая крайние члены этого неравенства, получаем утверждение теоремы 2.

Пусть f — мероморфная функция конечного порядка $\rho > 0$, $\rho(r) \to \rho$ — ее уточненный порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$. Обозначим через Λ_a, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, множество a-точек функции f с учетом кратности, $n_z(t, a) = \text{card}(D(z, t) \cap \Lambda_a)$, $E_V(f)$ — множество валироновских дефектных значений функции f [5].

Справедлива следующая теорема (приводим без доказательства).

Теорема 3. *Пусть f — мероморфная функция нормального типа относительно $V(r)$, и для последовательности $\{z_m\} \subset \mathbb{C}$ равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{z_m \to \infty} \int_{\varepsilon|z_m|}^{|z_m|} n_{z_m}(t, a) \frac{dt}{t} = +\infty \tag{14}$$

справедливо либо для одного значения $a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E_V(f)$, либо для двух различных значений $a_1, a_2 \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда (14) *справедливо для всех $a \in \overline{\mathbb{C}}$.*

Легко построить мероморфную функцию f, для которой выполнено (14). Например, положим

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z - c_k}\right)^{c_k^{\rho}}, \quad \frac{c_{k+1}}{c_k} \to \infty.$$

Эта функция имеет нормальный тип при порядке ρ, и для произвольного значения $a \in \overline{\mathbb{C}}$ a-точки функции f сгущаются около последовательности $\{c_k\}$.

1. *Gross F., Yang C.-C.* On preimage and range sets of meromorphic functions // Proc. Jap. Acad. Sci.— Ser A.— 1982.— **58**, N 1.— P. 17—20.
2. *Gross F., Yang C-C.* Meromorphic functions covering certain finite sets at the same points// // Ill. J. Math.— 1982.— **26**, N 3.— P. 432—441.
3. *Gundersen G., Yang C.-C.* On the preimage sets of entire functions // Kodai Math. J.— 1984.— N 7.— P. 76—85.
4. *Барсегян А. А.* О необходимости условий существования решения общей интерполяционной задачи // Изв. АрмССР.— 1983.— **18**, № 6.— С. 441—447.

5. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
6. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств.— М. : Мир, 1971.— 125 с.
7. *Гольдберг А. А.* Мероморфные функции // Итоги науки и техники. Мат. анализ.— М. : ВИНИТИ, 1971.— С. 5—97.
8. *Anderson J. M., Clunie J.* Picard sets of entire and meromorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI.— 1980.— **5**.— P. 27—43.
9. *Toppila S.* On the value distribution of meromorphic functions with a deficient value // Ibid.— P. 179—184.
10. *Toppila S.* Picard sets for meromorphic functions with a deficient value // Ibid.—P. 263—300.
11. *Хейман У.* Мероморфные функции.— М. : Мир, 1966.— 287 с.

Харьк. ин-т радиоэлектроники Получено 25.11.85