УДК 517.986+519.4

Г. Б. Подколзин

Инфинитезимальные алгебры для гиперкомплексной системы $SO(4)//SO(2)$

Построены два инфинитезимальных объекта для гиперкомплексной системы с базисом $SO(4)//SO(2)$. Доказано, что они являются конечно порожденными алгебрами. Для обеих алгебр найдены порождающие генераторы и для каждой алгебры найдены коммутационные соотношения между ее порождающими генераторами. Доказано, что эти алгебры являются алгебрами типа Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

Побудовані два інфінітезімальних об'єкти для гіперкомплексної системи з базою $SO(4)//SO(2)$. Доведено, що вони є скінченно породженими алгебрами. Для обох алгебр знайдені породні генератори та для кожної алгебри знайдені комутаційні співвідношення між її породними генераторами. Доведено, що ці алгебри є алгебрами типу Пуанкаре — Біркгофа — Вітта.

1. Теория Дельсарта — Левитана операторов обобщенного сдвига (о. о. с.) [1] позволяет получить далеко идущие обобщения групповых и алгебраических методов. Как и в теории групп, здесь естественны два подхода: глобальный и инфинитезимальный. Развивая теорию о. о. с. в рамках первого подхода, Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн ввели понятие гиперкомплексных систем (г. с.) с непрерывным базисом [2] и построили гармонический анализ для таких систем. В последнее время рассматриваются и близкие к г. с. объекты: гипергруппы и сверточные алгебры [3, 4, 9].

Инфинитезимальный подход изучался значительно меньше. С этой точки зрения основной является проблема построения теории в духе теории Ли, т. е. построение инфинитезимального объекта по о. о. с. и, наоборот, по инфинитезимальному объекту построить о. о. с. В качестве инфинитезимальных объектов могут выступать не только алгебры Ли, но и объекты, порожденные коммутационными соотношениями более общей природы. Коммутативный случай изучался Ф. А. Березиным и И. М. Гельфандом [5]. Некоммутативные классы о. о. с. рассматривались в работах Б. М. Левитана [1], Д. И. Гуревича [7], Г. Л. Литвинова [8] (см. приведенную там библиографию).

В настоящей статье строятся инфинитезимальные объекты для двух не изоморфных г. с. с базисом $SO(4)//SO(2)$. Показано, что эти объекты являются конечнопорожденными и для них доказаны теоремы типа Пуанкаре—Биркгофа—Витта (ПБВ) [6].

2. Пусть G — локально компактная группа Ли, H — ее компактная подгруппа. Обозначим через $Q = G//H$ множество двойных классов смежности Двойным классом смежности, или двойной H-орбитой, называется множество $p(g)=\{h_1gh_2\in G|h_1, h_2\in H\}$, $g\in G$. Очевидно, что $p(e)=H$. Топология в Q задается посредством отображения $G\ni g\mapsto p(g)\in Q$. Пространство $L_1(Q, m)$ с мерой m, являющейся образом меры Хаара μ в G при отображении p, и о. о. с., заданными на бинвариантных функциях ($f(h_1gh_2)=f(g)$; $h_1, h_2\in H$; $g\in G$) формулой

$$R^{p_2}f(p_1) = \int_H f(g_1hg_2)\, dh, \tag{1}$$

где dh — мера Хаара на H, а $p_i = p(g_i)$, является г. с. [2]. В дальнейшем будем придерживаться обозначений $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $D^\alpha_s = D^{\alpha_1}_{s_1} \ldots D^{\alpha_n}_{s_n}$, где $D^{\alpha_i}_{s_i}$ — производная α_i порядка по переменной s_i в локальной системе координат.

Правым инфинитезимальным генератором, или генератором о. о. с. порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ называется оператор $Y_\alpha f(p_1) = D^\alpha_{p_2} R^{p_2} f(p_1)|_{p_2=H}$. Множество всех правых генераторов порождает алгебру инфинитезимальных правых сдвигов $D_e(Q)$ [8]. Инфинитезимальные алгебры для г. с. являются аналогом универсальной обертывающей алгебры Ли [8].

3. Рассмотрим $SO(4)$ — группу вращений пространства $\mathbb{R}^4$ с орт нормированным репером (f_1, f_2, f_3, f_4). Она изоморфна группе $SO(3)$ $\times SO(3)$. Подгруппа $SO(2)$ реализуется как группа вращений плоскост (f_1, f_2) и (f_4, f_3) на одинаковый угол. Введем на группе $SO(4)$ следующие к ординаты: $SO(4) \ni g(t) = g_1(t_1)\, g_2(t_2)\, g_3(t_3)\, g_4(t_4)\, g_5(t_5)\, g_6(t_6)$, $g_1(t_1)$ $= g_{12}(t_1/2) \times g_{34}(t_1/2)$, $g_2(t_2) = g_{13}(-t_2/2) \times g_{24}(t_2/2)$, $g_3(t_3) = g_{14}(t_3/2)$ $\times g_{23}(t_3/2)$, $g_4(t_4) = g_{14}(t_4/2) \times g_{23}(-t_4/2)$, $g_5(t_5) = g_{13}(t_5/2) \times g_{24}(t_5/2)$, $g_6(t_6)$ $= g_{12}(t_6/2) \times g_{34}(-t_6/2)$, $t = (t_1, \ldots, t_6)$, $t \in [0, 2\pi)$, $i = \overline{1, 6}$, $g_{ij}(\theta)$ — вр щение в плоскости (f_i, f_j) на угол θ. Элементы g_1, g_2, g_3 и g_4, g_5, g_6 парам ризуют две группы изоморфные $SO(3)$, коммутирующие между собс Тогда $SO(2)$ реализуется как $g_6(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Построим вложение γ множества $Q = SO(4)//SO(2)$ в группу $SO($ Подмногообразие $T = \{g_1(s_1)\, g_2(s_2)\, g_3(s_3)\, g_4(s_4) \mid s_i \in [0, 2\pi),\ i = \overline{1,}$ $s_4 \in [0, \pi)\}$ группы $SO(4)$ трансверсально пересекает каждую орбиту из Отображение γ каждой орбите ставит в соответствие точку ее пересечен с T. Отображение γ позволяет ввести координаты на Q. Очевидно, чт $\dim Q = 4$. Г. с. $L_1(Q, m)$ содержит подалгебру, изоморфную $L_1(SO(3$

Найдем образующие алгебры $D_e(Q)$. В нашем случае генераторы о. о. равны:

$$Y_\alpha f(\hat{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_\alpha f(g(t)\, g_6(\varphi))\, d\varphi,$$

где $\hat{t}$ — координата точки многообразия Q, $g(t)$ — образ этой точки п отображении γ, X_α — групповой генератор в соответствующих коорди тах. Пользуясь биинвариантностью функции f и меры Хаара $d\varphi$, полу ем следующие равенства для генераторов о. о. с. первого порядка: $Y_i f(\hat{t})$ $= X_i f(g(t))$, $i = 1,2,3$, $Y_4 f(\hat{t}) = 0$.

Итак, часть генераторов о. о. с. первого порядка равна 0. Поэтому д нахождения порождающих операторов приходится искать генераторы ст ших порядков. Для генераторов второго порядка, пользуясь биинвариа ностью функций и меры Хаара, получаем следующие выражения, отличн от формулы (2):

$$Y_{ij} f(\hat{t}) = X_{ij} f(g(t)) \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$Y_{44} f(\hat{t}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (X_{44} + X_{55})\, f(g(t)\, g_6(\varphi))\, d\varphi,\ Y_{i4} f(\hat{t}) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Теорема 1. *Генераторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_{44} линейно независимы и ляются образующими инфинитезимальной алгебры $D_e(Q)$.*

Найдем коммутационные соотношения между генераторами о. о. Y_1, Y_2, Y_3, Y_{44}. Используя формулы коммутирования групповых гене торов, получаем следующие соотношения:

$$[Y_1, Y_2] = Y_3,\ [Y_2, Y_3] = Y_1,\ [Y_3, Y_1] = Y_2,\ [Y_i, Y_{44}] = 0,\ i = 1, 2, 3. \quad ($$

Обозначим $Z_1 = Y_1$, $Z_2 = Y_2$, $Z_3 = Y_3$, $Z_4 = Y_{44}$, $L = \mathrm{span}\{Z_1,$ $Z_3, Z_4\}$. Квадратичные соотношения (3) порождают в пространстве L опе цию $[Z_i, Z_j] = Z_j Z_i - Z_j Z_i$.

Предложение 1. *Пространство L со скобкой $[\cdot, \cdot]$ являет алгеброй Ли, изоморфной алгебре Ли $SO(3) \oplus \mathbb{R}^1$.*

Теорема 2. *Универсальная обертывающая алгебра U_0 алгебры L изоморфна алгебре $D_e(Q)$.*

Замечание. Из этой теоремы следует теорема ПБВ для $D_e($

4. Рассмотрим другую реализацию группы $SO(2)$ как подгруп $SO(4)$. $SO(2)$ — группа вращений в плоскости (f_3, f_4). Группу SO параметризуем координатами второго рода: $SO(4) \ni g(t) = g_{12}(t_1)$ $\times g_{13}(t_2)\, g_{14}(t_3)\, g_{23}(t_4)\, g_{24}(t_5)\, g_{34}(t_6)$, где $t = (t_1, \ldots, t_6)$, $t_i \in [0, 2$ Тогда подгруппа $SO(2) = \{g_{34}(\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Вложение множест $Q = SO(4)//SO(2)$ в этом случае строится так же, как и в предыдущ только в качестве многообразия T выбирается следующее: $T = \{g_{12}(t_1)$

$\times g_{13}(t_2) g_{14}(t_3) g_{23}(t_4) g_{24}(t_5) \mid t_i \in [0, 2\pi);\ i = \overline{1, 5};\ \cos(t_2)\sin(t_5)\sin(t_4) + \cos(t_5)\sin(t_2)\sin(t_3) = 0;\ \cos t_3 \cos t_5 \geqslant 0\}$. При такой реализации Q инволюция совпадает с операцией взятия обратного элемента в группе. Естественно и в этом случае $\dim Q = 4$.

Изучим структуру алгебры $D_e(Q)$ во втором случае.

Теорема 3. *Генераторы о. о. с.* $Y_1, Y_{22}, Y_{24}, Y_{25}, Y_{44}$ *линейно независимы и порождают алгебру* $D_e(Q)$.

Замечание. Для остальных генераторов первого и второго порядка верны следующие формулы: $Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_5 = 0 = Y_{12} = Y_{13} = Y_{14} = Y_{15} = Y_{23} = Y_{45}$; $Y_{34} = -Y_{25}$, $Y_{22} = Y_{33}$, $Y_{44} = Y_{55}$, $Y_{24} = Y_{35}$, $Y_{11} = Y_1^2$.

Теорема 4. *Коммутационные соотношения между генераторами* $Y_1, Y_{22}, Y_{25}, Y_{24}, Y_{44}$ *имеют вид*

$$[Y_{22}; Y_1] = [Y_1; Y_{44}] = 2Y_{24} - Y_1,\ Y_{25}^2 - Y_{22}Y_{44} = -Y_{24}^2,\ [Y_{24}; Y_1] = Y_{44} - Y_{22},\ [Y_\alpha, Y_{25}] = 0,\ [Y_{44}; Y_{22}] = 2Y_1Y_{24} + Y_1^2 - Y_{22} + Y_{44},$$
$$[Y_{44}; Y_{24}] = Y_{44}Y_1,\ [Y_{24}; Y_{22}] = Y_1Y_{22}. \quad (4)$$

Обозначим $Z_1 = Y_1$, $Z_i = Y_{ii}$, $i = 2,4$; $Z_3 = Y_{24}$, $Z_5 = Y_{25}$; $L = \mathrm{span}\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5\}$. Квадратичные соотношения (4) можно переписать в более единообразном виде

$$[Z_i, Z_j]_H = Z_iZ_j - h_{ij}^{kl} Z_kZ_l = c_{ij}^p Z_p,\ Z_3^2 = Z_2Z_4 - Z_5^2, \quad (5)$$

где тензоры $H = (h_{ij}^{kl})$, $C = (c_{ij}^p)$ находятся из соотношений (4).

Предложение 2. *Тензор* H *удовлетворяет уравнению Янга—Бакстера, а алгебра* L *со скобкой* $[\cdot, \cdot]_H$ *— обобщенная алгебра Ли в смысле* [7].

Рассмотрим алгебру U, обертывающую соотношения (5), т. е. фактор-алгебру $U = J/M$, где J — свободная тензорная алгебра, а M — идеал, порожденный соотношениями (5).

Обозначим через J_n элементы n-й тензорной степени в J и через β_n — вложение $\beta_n : J^n \to U_n$. Для обертывающей алгебры U справедлив аналог теоремы ПБВ для алгебр Ли.

Теорема 5. *Элементы* 1 *и* $\beta_s(Z_{i_1} \otimes \ldots \otimes Z_{i_s})$, $s \geqslant 1$, $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_s$, *и либо все* $i_k \in \{1, 2, 3, 5\}$, *либо* $i_k \in \{1, 3, 4, 5\}$) *образуют базис в линейном пространстве* U *и* $\dim J_n = (n+1)(n+2)(n-2+3)/6 < C_{n+4}^4$, *т. е.* U *— является алгеброй типа ПБВ.*

Теорема 6. *Алгебра* U *изоморфна алгебре* $D_e(Q)$.

Очевидно, что обертывающие алгебры U_0 и U не изоморфны.

1. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига.— М. : Наука, 1973.— 312 с.
2. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с континуальным базисом // Успехи мат. наук.— 1957.— **12**. № 2.— С. 147—152.
3. *Ross K. A.* Hypergroups and centers of measure algebras // Symposia Math.— 1977.— **22**.— P. 185—203.
4. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Hypercomplex systems with localy compact bases // Selecta Math. Sovietica.— 1985.— **14**, N 2.— P. 151—200.
5. *Березин Ф. А., Гельфанд И. М.* Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях // Тр. Моск. мат. о-ва — 1956. — **5**.— С. 311—351.
6. *Вершик А. М.* Алгебры с квадратичными соотношениями // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 35—57.
7. *Гуревич Д. И.* Операторы обобщенного сдвига на группах Ли // Изв. АН Арм ССР. Математика.— 1983.— **18**, № 4.— С. 305—317.
8. *Литвинов Г. Л.* Гипергруппы и гипергрупповые алгебры.— М. : ВИНИТИ, 1985.— С. 57—106.— (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения; т. 26).
9. *Вайнерман Л. И.* Двойственность алгебр с инволюцией и операторы обобщенного сдвига.— М. : ВИНИТИ 1986.— С. 165—206.— (Итоги науки и техники. Мат. анализ; т. 24).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 03.07.89