УДК 531.19:532.546

В. І. Герасименко, д-р фіз.-мат. наук,
П. В. Малишев, канд. фіз.-мат. наук,
О. Л. Ребенко, д-р фіз.-мат. наук (Ін-т математики АН України, Київ)

ПРО ПРАЦІ Д. Я. ПЕТРИНИ З СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

This is a brief survey of the papers by Prof. D. Ya. Petrina in various branches of modern mathematical physics.

Наведено короткий огляд робіт Д. Я. Петрини в різних галузях сучасної математичної фізики.

У сферу наукових інтересів Дмитра Яковича Петрини входять майже всі важливі напрямки сучасної математичної фізики, пов'язані з дослідженням безмежних систем частинок у квантовій теорії поля та статистичній механіці. Безмежними прийнято називати системи, що складаються з безмежного числа взаємодіючих частинок, розміщених у всьому безмежному просторі, а їх стани описуються нескінченними послідовностями функцій від зростаючого числа аргументів, що задовольняють операторні рівняння. Можна сказати, що головною проблемою сучасної математичної фізики є дослідження рівнянь для еволюції станів, доведення існування розв'язків та вивчення їх залежності від фізичних параметрів у різних граничних випадках.

Результати Дмитра Яковича Петрини в області сучасної математичної фізики можна віднести до таких напрямків:

1) конструктивна теорія поля та теорія аналітичної матриці розсіяння;
2) класична та квантова статистична механіка;
3) точно розв'язувані модельні системи статистичної механіки;
4) граничні задачі математичної фізики в областях з дрібнозернистою структурою та їх застосування до теорії мембран.

У цьому огляді ми зупинимось на деяких найбільш важливих результатах, одержаних Д. Я. Петриною у вказаних напрямках.

1. Конструктивна теорія поля та теорія аналітичної матриці розсіяння. Одним з фундаментальних результатів теорії поля є доведена Д. Я. Петриною відома теорема про неможливість побудови нелокальної теорії поля з додатним спектром оператора енергії – імпульса [4]. Цю теорему можна сформулювати так: якщо виконуються загальноприйняті аксіоми для квантованого поля $\varphi(x)$, а замість аксіоми локальної комутативності виконується аксіома

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{при} \ -l_2^2 < (x-y)^2 < -l_1^2,\ l_1 > 0,\ l_2 > 0, \tag{1}$$

де x, y — чотири-вектори у просторі Мінковського, а $[\varphi(x), \varphi(y)]$ — комутатор полів $\varphi(x)$ та $\varphi(y)$, то звідси випливає

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{при} \ (x-y)^2 < 0, \tag{2}$$

а це означає, що виконується аксіома локальної комутативності і теорія є локальною.

Ця теорема ввійшла в усі монографії з аксіоматичної квантової теорії поля.

Д. Я. Петрина був одним з піонерів у розвитку теорії евклідової матриці розсіяння, запропонувавши системи рівнянь для коефіцієнтних функцій евклідової матриці розсіяння. Не маючи змоги привести досить громіздкий точний вираз цих рівнянь, опишемо їх якісно. Матриця розсіяння визначається за послідовністю коефіцієнтних функцій

$$F = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \dots, F_s(x_1, \dots, x_s), \dots), \tag{3}$$

які задовольняють операторне рівняння для моделі $g:\varphi^4(x)$: вигляду

$$F = gAF + F^0, \tag{4}$$

де оператор A зв'язує F_s з $F_{s+2}, F_s, F_{s-2}, F_{s-4}$, а g — постійна зв'язку. Для неполіноміальних моделей оператор A зв'язує F_s з усіма F_N, де $N \geq s-1$. Для неполіноміальних нелокальних теорій ці рівняння мають єдиний розв'язок у певному банаховому просторі, елементами якого є послідовності функцій (3), а оператор A є узагальненням оператора Кірквуда – Зальцбурга з класичної статистичної механіки. Фактично в роботі [23] було вперше встановлено існування евклідової матриці розсіяння для нетривіальної неполіноміальної моделі за допомогою методів рівноважної класичної статистичної механіки.

Для поліноміальних моделей доведено існування розв'язку згладженого рівняння (4), а також існування розв'язків певним чином апроксимованих рівнянь. Результати цих досліджень підсумовані у монографії [35]. Зауважимо, що такі основоположні поняття, як евклідові оператори народження та знищення, евклідів простір Фока та ін. вперше були введені у згаданих вище роботах Д. Я. Петрини та його співробітників О. Л. Ребенка та С. С. Іванова. Необхідно також згадати роботу Д. Я. Петрини і О. Л. Ребенка [38], в якій сформульована принципово нова точка зору на виникнення ультрафіолетових розбіжностей у рівняннях для коефіцієнтних функцій. Задача про знаходження розв'язків цих рівнянь є некоректно поставленою, тому ітераційний метод (метод теорії збурень) приводить до появи ультрафіолетових розбіжностей. У роботі [38] сформульовано один з варіантів проекційно-ітеративного методу, еквівалентного перенормуванню S-матриці за допомогою R-операції Боголюбова – Парасюка.

Стосовно аналітичної матриці розсіяння Д. Я. Петрині належить найбільш загальний критерій справедливості спектральних зображень для амплітуд розсіяння теорії збурень. Математично проблема формулюється таким чином. Амплітуда розсіяння $f(s,t)$ є функцією двох комплексних змінних s та t, вона голоморфна в певній примітивній області, а її особливості розміщені на аналітичних поверхнях, які при дійсних (s,t) вироджуються у криві Ландау. Потрібно довести, що амплітуда розсіяння голоморфно продовжується в область, що складається з двох комплексних площин з розрізами вздовж дійсних осей. Виявилося, що амплітуда розсіяння $f(s,t)$ допускає голоморфне продовження в цю область при певній поведінці кривих Ландау, а саме: вони повинні бути опуклими зовні примітивної області голоморфності. Цей критерій загально визнаний як найбільш потужний. Він дозволяє встановити справедливість спектрального зображення для ряду внесків від діаграм Фейнмана та вивчити аналітичні властивості парціальних амплітуд у теорії збурень.

2. Класична та квантова статистична механіка. Дослідження в області квантової теорії поля привернули увагу Д. Я. Петрини до статистичної механіки. На перший погляд, квантова теорія поля та статистична механіка мають мало спільного — в одній досліджуються властивості елементарних частинок, а в іншій — властивості систем, що складаються з великого, практично безмежного, числа частинок. Насправді ці наукові дисципліни мають багато спільного як з фізичної, так і з математичної точок зору. Дійсно, квантоване поле може породити нескінченне число частинок. Крім цього, систему скінченного числа частинок можна розглядати як таку, що перебуває в безмежній системі віртуальних частинок. Ще більше спільного можна знайти в математичному описі систем квантованих полів та систем статистичної механіки. Як зазначалося вище, матриця розсіяння повністю визначається нескінченною послідовністю коефіцієнтних функцій (3), а квантоване поле — нескінченною послідовністю (3) функцій Вайтмана чи функцій Гріна, які теж задовольняють рівняння вигляду (4).

У класичній статистичній механіці стан системи описується нескінченною послідовністю функцій розподілу

$$F(t) = (F_1(t, x_1), \dots, F_s(t, x_1, \dots, x_s), \dots), \tag{5}$$

де t — час, x — точка фазового простору. У квантовій статистичній механіці стан описується послідовністю статистичних операторів, які задаються своїми ядрами

$$F(t) = (F_1(t, x_1; y_1), \dots, F_s(t, x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_s)), \tag{6}$$

де x та y — точки евклідового простору.

В обох випадках стани задовольняють еволюційні рівняння вигляду

$$\frac{dF(t)}{dt} = AF(t), \quad F(t)\big|_{t=0} = F(0), \tag{7}$$

з певними необмеженими операторами A. Ці рівняння називаються рівняннями ББГКІ (Боголюбова – Борна – Гріна – Кірквуда – Івона).

Фактично центральною проблемою статистичної механіки є побудова розв'язків еволюційних рівнянь (7). Д. Я. Петрині належать піонерські праці, в яких рівняння (7) для послідовностей (5) та (6) було розглянуто як еволюційне рівняння в певних функціональних просторах, явно побудовано еволюційний оператор $U(t)$, інфінітезімальний оператор якого співпадає з A, і доведена єдиність розв'язків, що визначаються формулою

$$F(t) = U(t)F(0). \tag{8}$$

Проблема обґрунтування термодинамічної границі була сформульована як задача розширення еволюційного оператора $U(t)$ з функціональних просторів, що описують стани скінченних систем, на функціональні простори, що описують стани безмежних систем. Ця надзвичано важлива і важка задача була розв'язана Дмитром Яковичем разом з учнями як для одновимірних, так і для багатовимірних задач у класичному випадку. При цьому суттєво використовувалось нове для теорії гамільтонових систем поняття області взаємодії. Ці результати є найсильнішими в даній області.

Принциповою в статистичній механіці є задача строгого виведення кінетичного рівняння Больцмана з рівнянь (7). Рівняння Больцмана є нелінійним рівнянням для одночастинкової функції $F_1(t, x_1)$, і задача його строгого виведення має фундаментальне значення не тільки для математики чи фізики, а навіть для філософії, а саме: як і з рівнянь (7), що описують зворотньо еволюцію, можна одержати незворотні рівняння Больцмана. Ця задача була розв'язана у ряді праць Д. Я. Петрини та В. І. Герасименка для системи пружних куль у границі Больцмана – Греда в просторі, що відповідає станам безмежних систем. Математично задача формулюється таким чином. Рівняння (7) містить у собі параметри: d — радіус кулі та $1/v$ — густину. Границя Больцмана – Греда полягає у тому, що $d \to 0$, $1/v \to \infty$, $d^2/v = \text{const}$. Виконуючи формально цей граничний перехід, ми одержимо ієрархію Больцмана

$$\frac{d\tilde{F}(t)}{dt} = A_0\tilde{F}(t) \tag{9}$$

для граничного стану

$$\tilde{F}(t) = (\tilde{F}_1(t, x_1), \dots, \tilde{F}_s(t, x_1, \dots, x_s), \dots). \tag{10}$$

Доведено, що стан $F(t)$ збігається до стану $\tilde{F}(t)$ у тому розумінні, що $F_s(t, x_1, \dots, x_s)$ збігається рівномірно на компактах назовні певних множин, міра яких прямує до нуля разом з d. Ієрархія Больцмана має розв'язки $\tilde{F}_s(t, x_1, \dots, x_s) =$

$= \tilde{F}_1(t, x_1), \dots, \tilde{F}_1(t, x_s)$, де одночастинкові функції розподілу задовольняють нелінійне рівняння Больцмана. Труднощі, які вдалося перебороти при доведенні існування границі Больцмана – Греда, дуже значні. Вони пов'язані з необмеженістю операторів A та A_0 і сингулярним характером динаміки пружних куль.

У працях Д. Я. Петрини досліджені також стаціонарні розв'язки рівнянь (7), що описують стан рівноваги. Д. Я. Петрина разом з М. М. Боголюбовим та Б. Г. Хацетом виконали основоположну працю, в якій дано обгрунтування існування термодинамічної границі для рівноважних станів систем класичної статистичної механіки в рамках канонічного ансамблю, доведена збіжність віріальних розкладів та еквівалентність канонічного і великого канонічного ансамблів.

Математично ця задача формулюється так. В скінченній області Λ містяться N частинок, які взаємодіють через парний потенціал. Їх стан при певній абсолютній температурі T описується послідовністю функцій розподілу

$$F^{(N)} = \left(F_1^{(N)}(x_1), \dots, F_s^{(N)}(x_1, \dots, x_s), \dots, F_N^{(N)}(x_1, \dots, x_N)\right),$$

що задовольняє певне рекурентне співвідношення Кірквуда – Зальцбурга

$$F^{(N)} = K^{(N)} F^{(N-1)} + F_0^{(N)}, \tag{11}$$

де $F^{(N-1)}$ — стан $N-1$ частинки в Λ, а $K^{(N)}$ —лінійний оператор, що зв'язує $F_s^{(N)}$ з $F_{s-1}^{(N)}, \dots, F_N^{(N)}$.

Термодинамічною границею називається граничний перехід, коли область Λ в певному розумінні покриває весь евклідів простір $R^3, \Lambda \nearrow R^3$ її об'єм $V(\Lambda)$ прямує до нескінченності $(V(\Lambda) \to \infty)$, число частинок теж прямує до нескінченності $(N \to \infty)$, а густина $1/v = N/V$ залишається сталою. Виконуючи формально термодинамічну границю в (11), одержуємо рівняння Кірквуда – Зальцбурга для стану $F = (F_1(x_1), \dots, F_s(x_1, \dots, x_s), \dots)$

$$F = KF + F_0. \tag{12}$$

Завдання полягає у тому, щоб довести існування розв'язків співвідношень (11) та рівняння (12), а також збіжність $F^{(N)}$ до F. Це було зроблено при низьких густинах і певних обмеженнях на потенціал у банаховому просторі E, елементами якого є послідовності функцій, заданих на фазовому просторі, обмежених за координатами q і експоненціально спадних за імпульсами p з нормою

$$\|f\| = \sup_{s \geq 1} \xi^s \sup_{x_1, \dots, x_s} |f_s(x_1, \dots, x_s)| \exp\left\{-\beta \sum_{i=1}^{s} (p_i^2/2m)\right\}, \tag{13}$$

де $\xi \geq 0$ — певна стала, що визначається параметрами системи, β — обернена температура, а m — маса частинок. При розв'язуванні цієї задачі були переборені значні математичні труднощі, пов'язані з тим, що оператор $K^{(N)}$ не збігається до оператора K ні сильно, ні за нормою у просторі E_ξ.

Як згадувалось у п. 1, методи, розроблені при обгрунтуванні термодинамічної границі, знайшли широке застосування в квантовій теорії поля, де Д. Я. Петриною та В. І. Скрипником уперше було доведено існування евклідової матриці розсіяння для неполіноміальних нелокальних моделей. При цьому використовувались глибокі аналогії між рівноважною класичною статистичною механікою та евклідовою теорією поля.

3. Точно розв'язувані моделі квантової статистичної механіки. Д. Я. Петрина розробив новий підхід до дослідження важливих моделей теорії надпровідності, надплинності, моделі Пайєрлса – Фрьоліха та моделі Хуанга – Янга – Латтінджера. Усі ці моделі мають одну характерну рису, а саме: їх гамільтоніан взаємодії складається з суми інтегралів по всьому евклідовому простору від добутку операторів народження та знищення з певним потенціалом, причому ці інтеграли діляться на певні степені об'єму всього простору.

Так, гамільтоніан теорії надпровідності має вигляд

$$H_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2V} \iiiint v(x_1 - x_2)\overset{+}{\psi}(x_1)\overset{+}{\psi}(x_2) v(x_1' - x_2')\psi(x_1')\psi(x_2')\,dx_1\,dx_2\,dx_1'\,dx_2',$$

де інтеграл береться по всьому R^3 по кожній змінній, а V — це об'єм R^3. Гамільтоніан теорії надплинності містить доданки вигляду

$$\frac{1}{V^2} \iint \Phi(x_1 - x_2)\overset{+}{a}(x_1)\,a(x_2)\,dx_1\,dx_2 \int a(x_3)\,dx_3 \int a(x_4)\,dx_4,$$

$$\frac{1}{V^3}\tilde{\Phi}(0) \iiiint \overset{+}{a}(x_1)\,\overset{+}{a}(x_2)\,a(x_3)\,a(x_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4.$$

Тут $\overset{+}{\psi}(x), \psi(x)$ — оператори народження та знищення ферміонів, $\overset{+}{a}(x), a(x)$ — оператори народження та знищення бозонів, v та Φ — потенціали взаємодії, $\tilde{\Phi}$ — перетворення Фур'є потенціалу Φ.

В статистичній механіці розрізняють стани скінченного числа частинок, що описуються хвильовими функціями, та стани нескінченного числа частинок, що описуються нескінченною послідовністю функцій Гріна або редукованих матриць густини. Хвильові функції визначаються розв'язками рівнянь Шредінгера. Щоб одержати такі розв'язки, необхідно визначити результат дії гамільтоніана на хвильову функцію. Обмежимося гамільтоніаном теорії надпровідності. Використовуючи правила вторинного квантування, одержуємо

$$(Hf)_N(x_1, \ldots, x_N) = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta_i}{2m} f_N(x_1, \ldots, x_N) +$$

$$+ \sum_{i<j=1}^{N} v(x_1 - x_j)\,\frac{1}{V} \iint v(x_1' - x_2') f_N(x_1', x_2', x_1, \overset{i}{\check{}}\ldots\overset{j}{\check{}}, x_N)\,dx_1'\,dx_2', \tag{14}$$

де другий доданок треба розуміти як границю

$$\lim_{\Lambda \uparrow R^3} \frac{1}{V(\Lambda)} \sum_{i<j=1}^{N} v(x_1 - x_j) \int_{\Lambda}\int_{\Lambda} v(x_1' - x_2') f_N(x_1', x_2', x_1, \overset{i}{\check{}}\ldots\overset{j}{\check{}}, x_N)\,dx_1'\,dx_2'. \tag{15}$$

Звичайний підхід, коли гамільтоніан розглядається спочатку на всюди щільній в $L_2(R^{3N})$ множині основних функцій, а потім будується його самоспряжене розширення, в цьому випадку приводить до вільного гамільтоніана, бо гамільтоніан взаємодії на основних функціях просто дорівнює нулю. З іншого боку, відомо, що за допомогою модельного гамільтоніана теорії надпровідності можна пояснити явище надпровідності, яке не вкладається в рамки теорії вільних невзаємодіючих частинок.

Щоб розв'язати це протиріччя, Д. Я. Петрина запропонував розглянути гамільтоніан (14) в специфічному гільбертовому просторі трансляційно-інваріантних функцій. Для того щоб описати цей простір, розіб'ємо множину N точок $(x_1, \ldots, x_N)$ на k підмножин $\{n_1\} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}), \ldots, \{n_k\} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_k}})$, $n_1 + \ldots + n_k = N$, і поставимо їм у відповідність функцію вигляду

$$f_{N;\,n_1,\,\dots\,,\,n_k}(x_{i_1},\,\dots\,,x_{i_{n_1}};\,\dots\,;x_{j_1},\,\dots\,,x_{j_{n_k}}) \tag{16}$$

трансляційно-інваріантну за кожною групою змінних з $\{n_1\},\,\dots\,,\{n_k\}$ та інтегровну за модулем у квадраті за незалежними $\{n_1-1\},\,\dots\,,\{n_k-1\}$ різницевими змінними

$$\int \left| f_{N;\,n_1,\,\dots\,,\,n_k}(x_{i_2}-x_{i_1},\,\dots\,,x_{i_{n_1}}-x_{i_1};\,\dots\,;x_{j_2}-x_{j_1},\,\dots\,,x_{j_{n_k}}-x_{j_1})\right|^2 \times$$
$$\times\, d\,(x_{i_2}-x_{i_1})\,\dots\,d\,(x_{i_{n_1}}-x_{i_1})\,\dots\,d\,(x_{j_2}-x_{j_1})\,\dots\,d\,(x_{j_{n_k}}-x_{j_1}).$$

Відповідний гільбертів простір позначимо через $h_{N;\,n_1,\,\dots\,,\,n_k}$. Введемо загальний гільбертів простір h_N^T як пряму ортогональну суму гільбертових просторів $h_{N;\,n_1,\,\dots\,,\,n_k}$

$$h_N^T \;=\; \sum_{n_1,\,\dots\,,\,n_k} \oplus\; h_{N;\,n_1,\,\dots\,,\,n_k},$$

де сума береться за всіма можливими розбиттями N точок на k підмножин $1\le k\le N$. У цьому підпросторі гамільтоніан (14) не зводиться до вільного і може бути зображений у вигляді

$$H \;=\; \sum_{n_1,\,\dots\,,\,n_k} \oplus\; I\otimes\dots\otimes H_{n_i}\otimes\dots\otimes I, \tag{17}$$

де

$$H_{n_i} \;=\; H^0_{n_0},\;\; n_i\ne 2;\qquad H_{n_i} \;=\; H_2,\;\; n_i = 2,$$

і двохчастинковий гамільтоніан H_2 задається на функціях $f_2(x_1,\,x_2) = f_2(x_1 - x_2)\in\, h_2$ оператором

$$(H_2f_2)(x_1,\,x_2) \;=\; \left(\frac{\Delta_1}{2m} + \frac{\Delta_2}{2m}\right) f_2(x_1-x_2)\; +$$
$$+\; v(x_1-x_2)\int v(x_1'-x_2')f_2(x_1'-x_2')\,d(x_1'-x_2'). \tag{18}$$

Зауважимо, що для теорії надпровідності слід розглядати h_N^T тільки з $n_i\ge 2$.

Таким чином, в гільбертовому просторі трансляційно-інваріантних функцій h_N^T з $n_i\ge 2$ модельний гамільтоніан теорії надпровідності не зводиться до вільного, а задається оператором (18). Фізичний зміст оператора (18) полягає у тому, що модельний гамільтоніан теорії надпровідності описує взаємодію пар частинок з протилежними імпульсами (наведено спрощений безспіновий варіант), а вже пари між собою не взаємодіють. Аналогічні результати одержані і для модельного гамільтоніана теорії надплинності та інших моделей.

Д. Я. Петрина дослідив і загальний гамільтоніан з парною взаємодією в гільбертовому просторі трансляційно-інваріантних функцій. На функціях $f_N(x_1,\,\dots\,,x_N)\in\, h_N^T$ загальний гамільтоніан задається виразом

$$(H_Nf_N)(x_1,\,\dots\,,x_N) \;=\; -\sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_i}{2m}f_N(x_1,\,\dots\,,x_N) \;+\; \sum_{i<j=1}^{N}\Phi\,(x_1-x_j)f_N(x_1,\,\dots\,,x_N). \tag{19}$$

Встановлена така фундаментальна властивість гамільтоніана (19) в h_N^T. Спектр

H_N в h_N^T є об'єднанням за всіма можливими розбиттями $\{n_1\}, \ldots, \{n_k\}$ суми спектрів гамільтоніанів $H_{n_1} \ldots H_{n_k}$ в просторах $h_{n_1} \ldots h_{n_k}$:

$$\sigma(H_N) = \bigcup_{n_1, \ldots, n_k} \sum_{i=1}^{k} \sigma(H_{n_i}). \tag{20}$$

Одержано також структуру власних векторів H_N в h_N^T і показано, що їх відповідні власні значення визначаються проекціями власних векторів на підпростір $h_{N;\, n_1, \ldots, n_k}$, що відповідає найнижчим розбиттям.

Це дало можливість встановити важливу властивість модельних гамільтоніанів теорії надпровідності та надплинності, а саме: простір пар (всі $n_i = 2$) є інваріантним відносно модельного гамільтоніана теорії надпровідності і співпадає з проекцією результату дії загального гамільтоніана на підпростір пар. Звідси випливає, що спектр модельного гамільтоніана в підпросторі пар співпадає з тією частиною спектра загального гамільтоніана, що відповідає власним векторам з компонентою їх підпростору пар. Це означає, що статистичні середні модельного гамільтоніана співпадають із статистичними середніми загального гамільтоніана, якщо обмежитися частиною спектра, що відповідає підпростору пар.

Аналогічні результати справедливі і для модельного гамільтоніана теорії надплинності, тільки його треба розглядати у підпросторі пар та конденсату.

Усі ці результати проливають нове світло на модельні системи теорії надплинності та надпровідності і показують, що вони є просто обмеженнями загальних гамільтоніанів на відповідні підпростори.

Д. Я. Петрина дослідив також рівняння для станів модельних систем. Обмежимося знову теорією надпровідності, а стан опишемо нескінченною послідовністю функцій Гріна

$$G = (\ldots, G_{mn}(t_1, x_1, \ldots, t_m, x_m; t_{m+1}, x_{m+1}, \ldots, t_{m+n}, x_{m+n})),$$

де G_{mn} — це статистичне середнє хронологічного добутку m операторів знищення та n операторів народження. Рівняння стану для G можна зобразити у вигляді

$$\frac{\partial G}{\partial t_1} = AG,$$

де оператор A містить у собі інтегральний оператор вигляду

$$\frac{1}{V} \iint v(x_1 - y)\, v(x_1' - x_2')\, G_{m+1\, n+1}(t_1, x_1', t_1, x_2', t_2, x_2, \ldots,$$
$$t_m, x_m; t_1, y, t_{m+1}, x_{m+1}, \ldots, t_{m+n}, x_{m+n})\, dx_1'\, dx_2'\, dy, \tag{21}$$

причому цей оператор треба розуміти у тому ж сенсі, що й вираз (15).

Дмитро Якович запропонував розглядати оператор (21) у просторі трансляційно-інваріантних функцій, що є узагальненням просторів h_N^T і показав, що у цьому просторі він зводиться до оператора

$$c \int v(x_1 - y)\, G_{m-1\, n+1}(t_2, x_2, \ldots, t_m, x_m; t_1, y, t_{m+1}, x_{m+1}, \ldots, t_{m+n}, x_{m+n})dy \tag{22}$$

де

$$c = \int v(x_1' - x_2')\, G_{20}(t_1, x_1' - x_2', 0, 0)\, d(x_1' - x_2').$$

Звідси випливає, що модельний гамільтоніан (13) термодинамічно еквівалентний так званому апроксимуючому гамільтоніану

$$H_{\mathrm{appr}} = \int \overset{*}{\psi}(x)\left(-\frac{\Delta}{2m} - M\right)\psi(x)\,dx + c\int v(x_1-x_2)\,\overset{*}{\psi}(x_1)\,\overset{*}{\psi}(x_2)\,dx_1\,dx_2 +$$

$$+ \overset{*}{c}\int v(x_1-x_2)\,\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,dx_1\,dx_2 - |c|^2 V, \tag{23}$$

де сталі c та $\overset{*}{c}$ визначаються з мінімуму вільної енергії для H_{appr}. Термодинамічна еквівалентність означає, що стани, визначені за модельним (13) та апроксимуючим гамільтоніаном (23) в термодинамічній границі, співпадають. Підкреслимо, що апроксимуючий гамільтоніан визначається за модельним, якщо в останньому замінити операторні вирази

$$\frac{1}{V}\iint v(x_1-x_2)\,\overset{*}{\psi}(x_1)\,\overset{*}{\psi}(x_2)\,dx_1\,dx_2, \qquad \frac{1}{V}\int v(x_1'-x_2')\,\psi(x_1')\,\psi(x_2')\,dx_1\,dx_2$$

по черзі на оператор cI кратний одиничному, а сталу c визначити з умови мінімуму вільної енергії, яка зводиться до нелінійного рівняння.

Апроксимуючий гамільтоніан допускає точні розв'язки, тобто явно визначається його спектр та послідовність функцій Гріна.

Цей підхід був успішно застосований до моделей надплинності, Боголюбова, моделі ваємодіючого бозе-газу Хуанга – Янга – Латтінджера та моделі Пайєрлса – Фрьоліха. Зазначимо, що в останній моделі певні операторні вирази в модельному гамільтоніані заміняються на функції, які визначаються з мінімуму функціоналу вільної енергії. В роботах Д. Я. Петрини та Є. Д. Білоколоса [46, 47] було показано, що рівняння мінімуму зводиться до рівняння Кортевега – де Фріза, яке розв'язується точно за допомогою скінченно-зонного потенціалу. Таким чином, вперше було вказано на тісний зв'язок між методом оберненої задачі розсіяння для розв'язування нелінійних рівнянь з частинними похідними та методом апроксимуючого гамільтоніана.

4. Граничні задачі математичної фізики та їх застосування до терії мембран. Дослідження електричних полів та задач дифузії і гідродинаміки в просторово-неоднорідних середовищах, що моделюють мембрани різних типів, має важливе значення для опису ряду явищ фізики, хімії та біології.

Так, у 80-х рр. Д. Я. Петрина зацікавився проблемою протікання розчинів через мембрани і запропонував досліджувати явище протікання рідин через мембрану як самоузгоджену задачу для рівнянь гідродинаміки, дифузії і електростатики. В результаті досліджень, проведених Дмитром Яковичем та його учнями, одержано ряд принципово нових результатів, що мають важливе теоретичне і практичне значення, а саме: детально описаний вплив електричних полів на селективні властивості мембран, одержані нові розв'язки рівнянь Лапласа і Пуассона поблизу мембран різних типів і досліджено їх властивості, побудовані функції розподілу систем заряджених частинок поблизу мембран, досліджені розв'язки задачі про дифузію заряджених частинок в електричному полі, створеному мембраною.

Зупинимося більш детально на роботі [43], де, використовуючи глибинну аналогію з квантовою теорією поля, Д. Я. Петрина запропонував новий метод дослідження крайових задач для рівнянь класичної математичної фізики в областях зі складною структурою. Основним елементом цього методу є розроблена Д. Я. Петриною „віднімальна процедура" — аналог відомої в квантовій теорії поля віднімальної процедури Боголюбова – Парасюка. За допомогою цього методу вперше вдалося одержати строгий розв'язок класичної задачі Максвелла про ефективну діелектричну сталу середовища, в якому розміщена нескінченна кількість сферичних діелектричних тіл.

Не маючи змоги детально викласти ці роботи, ми наведемо лише постановку задачі і короткий опис труднощів, що були переборені, та результатів.

Розглянемо тривимірний простір, заповнений середовищем з діелектричною проникністю ε_1, в якому певним чином розміщені сферичні діелектричні тіла, що характеризуються діелектричною проникністю ε_2 ($\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$). В усіх цитованих роботах ці тіла або розміщені у вузлах нескінченної кубічної гратки з параметром a, або випадково (з деякими обмеженнями). Початок координат пов'язаний з одним із тіл, а осі $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ напрямлені вздовж ребер гратки.

Розглядається збурення „зовнішнього" електричного поля такою системою тіл. Зовнішнім полем $\varphi_0(x)$ в роботі [43] є однорідне електричне поле $\varphi_0(x) = -\vec{E}\vec{x}/\varepsilon_1$ ($\vec{E}$ — напруженість), а в [40] — поле сукупності точкових зарядів.

Потенціал поля в такій системі визначається як розв'язок такої крайової задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta\varphi(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi_+(x) = \varphi_-(x), \; x \in \partial F,$$
$$\partial F = \bigcup_{\vec{k} \in \mathbb{Z}^3} \partial F_{\vec{k}}, \; \vec{k} = (k_1, k_2, k_3), \quad \varepsilon_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)_+ (x) = \varepsilon_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)_- (x), \;\; x \in \partial F, \tag{24}$$

де ∂F_i — поверхня i-го тіла, а „+" і „–" позначають граничні значення відповідних величин при просуванні до поверхні тіла відповідно зовні та зсередини.

Якщо при цьому шукати потенціал у вигляді

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{\vec{E}_1\vec{x}}{\varepsilon_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \int_{\partial F_0} \frac{\sigma_{\vec{k}}(y)\, dS_y}{|\vec{x} - \vec{y} - a\vec{k}|}\, dS_y = \varphi_0(x) + \varphi_1(x), \tag{25}$$

то визначення потенціалу $\varphi(\vec{x})$ зводиться до розв'язування системи нескінченного числа інтегральних рівнянь для невідомих густин поверхневих зарядів $\sigma_{\vec{k}}$, заданих на поверхнях кожного тіла

$$\sigma_{\vec{k}}(\vec{k}) + \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \int_{\partial F_0} \frac{\sigma_{k'}(\vec{y}) \cos(\vec{x} - \vec{y} - a\vec{k}', \; \vec{n}_k)}{2\pi|\vec{x} - \vec{y} - a(\vec{k} - \vec{k}')|^2}\, dS_y = -2\lambda\xi\vec{E}\,\vec{n}_k. \tag{26}$$

Дослідження рівняння (26) пов'язане з суттєвими математичними труднощами, оскільки ряди, що входять у ядра інтегральних операторів, не є абсолютно збіжними. Для подолання цих труднощів і застосовується віднімальна процедура, яка дозволяє, використовуючи змістовні фізичні міркування, а також симетрію задачі, довести, що розбіжні доданки, у певному сенсі, рівні нулю.

Для рівняння, що одержується після застосування цієї процедури, можна побудувати розв'язок у вигляді збіжного ряду послідовних наближень. Члени цього ряду відповідають внескам мультиполів певного порядку. Так, у своїй роботі [43] Д. Я. Петрина врахував доданки, що описують вплив диполів і одержав (уперше строго) класичну формулу Максвелла для ефективної діелектричної сталої.

Цей метод остаточно довів свою ефективність у роботах учнів Д. Я. Петрини, в яких, поступово враховуючи вплив мультиполів вищих порядків, вдалося одержати всі відомі формули для ефективної діелектричної сталої і встановити нову більш точну формулу, що узагальнює всі попередні. Крім формули для ефективної діелектричної сталої знайдено явні наближені розв'язки для потенціалу, густини поверхневих зарядів, дипольні моменти, тощо (П. В. *Малишев* і Д. В. Малишев).

В роботах [40, 41] розглянуто більш складну систему, коли тіла розміщені в певному шарі в тривимірному просторі випадковим чином, а зовнішнє поле створене системою точкових зарядів, розміщених поблизу мемрани.

У згаданій роботі встановлено розв'язуваність задачі (24) (рівняння (26)) за умови, що густина розподілу зарядів порівняно мала, одержано явні наближені формули для потенціалу, створеного мембраною в присутності зарядів.

Однією з найважливіших у цьому напрямку є робота Д. Я. Петрини [47], в якій досліджено нелінійну узгоджену систему рівнянь дифузії і електростатики для системи заряджених частинок поблизу мембрани.

Викорицтовуючи електронейтральність тіл і віднімальну процедуру, Д. Я. Петрині вдалося уникнути розбіжностей у ядрах відповідних інтегральних рівнянь і встановити теорему існування і єдиності розв'язку за умови досить малої густини зарядів і тіл у мембрані. Система нелінійних рівнянь, досліджена в цій роботі, є дуже складною і її вивчення було пов'язане з серйозними технічними труднощами.

Д. Я. Петрина також дослідив характер поведінки функцій розподілу систем заряджених частинок поблизу мембрани і встановив відштовхувальний характер взаємодії іонів обох знаків з мембраною та вивчив її кількісно. Це дозволило зробити висновок про те, що внесок електростатичного відштовхування є одним з визначальних для селективних властивостей мембран такого типу.

Наприкінці зауважимо, що цей короткий огляд може відобразити лише малу частку глибоких результатів, оригінальних ідей і розробок ученого. Великий внесок Дмитра Яковича Петрини у розвиток різних областей сучасної математичної фізики приніс йому заслужене міжнародне визнання.

1. *Петрина Д. Я., Парасюк О. С., Тацуняк П. Н.* Теорема Челлена – Лемана для квантовой теории поля в пространстве с индефинитной метрикой // Укр. мат. журн. – 1958. – **10**, № 3. – С. 344–346.
2. *Петрина Д. Я.* Дисперсионные соотношения для неупругого рассеяния в нерелятивистском приближении // Там же. – 1959. – **11**, № 3. – С. 267–274.
3. *Петрина Д. Я.* Решение обратной задачи дифракции // Там же. – 1960. – **12**, № 4. – С. 476–479.
4. *Петрина Д. Я.* О невозможности построения нелокальной теории поля с положительным спектром оператора энергии–импульса // Там же. – 1961. – **13**, № 4. – С. 109–111.
5. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства парциальных волн амплитуды рассеяния в теории возмущений // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 4. – С. 755–758.
6. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства амплитуды рассеяния на потенциале на первом „нефизическом" листе // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1963. – **44**, вып. 1. – С. 151–156.
7. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства вкладов диаграмм Фейнмана // Докл. АН СССР. – 1963. – **149**, № 4. – С. 808–807.
8. *Петрина Д. Я.* Комплексные особые точки вкладов диаграмм Фейнмана и теорема непрерывности // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 31–40.
9. *Петрина Д. Я.* О принципе максимальной аналитичности по комплексному орбитальному моменту // Там же. – **16**, № 4. – С. 502–512.
10. *Петрина Д. Я.* Представление Мандельстама и теорема непрерывности // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1964. – **46**, вып. 2. – С. 544–554.
11. *Петрина Д. Я.* Доказательство представления Мандельстама для лестничной диаграммы шестого порядка // Там же. – **47**, вып. 8. – С. 524–529.
12. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства одного класса функций, определяемых интегралами по многообразию. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 54–66.
13. *Петрина Д. Я.* Аналитические свойства одного класса функций, определяемых интегралами по многообразию. II // Там же. – № 6. – С. 60–66.
14. *Петрина Д. Я.* О голоморфном продолжении вкладов от диаграмм Фейнмана // Докл. АН СССР. – 1966. – **168**, № 2. – С. 308–309.
15. *Петрина Д. Я.* О полноте амплитуд теории возмущений в пространстве амплитуд // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 3. – С. 62–78.
16. *Петрина Д. Я.* О полноте амплитуд теории возмущений в пространстве амплитуд // Докл. АН СССР. – 1967. – **173**, № 2. – С. 295–297.

17. *Петрина Д. Я.* О суммировании вкладов от диаграмм Фейнмана: теорема существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1052–1074.
18. *Петрина Д. Я.* Математические вопросы теории матриц рассеяния: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1968. – 30 с.
19. *Петрина Д. Я.* Математические вопросы теории матриц расеяния: Автореф. дис ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1968. – 250 с.
20. *Петрина Д. Я., Иванов С. С.* Об уравнениях, возникающих при суммировании рядов теории возмущений для матрицы рассеяния // Докл. АН СССР. – 1969. – **188**, № 4. – С. 776–779.
21. *Петрина Д. Я., Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И.* Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля // Теорет. и мат. физика. – 1969. – **1**, № 2. – С. 251–274.
22. *Петрина Д. Я.* О гамильтонианах квантовой статистики и о модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Там же. – 1970. – **4**, № 3. – С. 394–411.
23. *Петрина Д. Я., Скрипник В. И.* Уравнения Кирквуда – Зальцбурга для коэффициентных функций матрицы рассеяния // Там же. – 1971. – **8**, № 3. – С. 369–380.
24. *Петрина Д. Я., Яцишин В. П.* О модельном гамильтониане теории сверхпроводимости // Там же. – 1972. – **10**, № 2. – С. 283–299.
25. *Петрина Д. Я.* О решениях кинетических уравнений Боголюбова. Квантовая статистика // Там же. – 1972. – **13**, № 3. – С. 391–405.
26. *Петрина Д. Я., Видыбида А. К.* Задача Коши для кинетических уравнений Боголюбова // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. **136**. – С. 370–378.
27. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* Об уравнениях для коэффициентных функций *S*-матрицы в квантовой теории поля // Теорет. и мат. физика. – 1974. – **19**, № 1. – С. 37–46.
28. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* *S*-матрица в конструктивной теории поля // Там же. – 1975. – **23**, № 2. – С. 160–177.
29. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* *S*-матрица в конструктивной теории поля // ЭЧАЯ. – 1976. **7**, вып. 3. – С. 647–686.
30. *Петрина Д. Я., Видыбида А. К.* Задача Коши для уравнений Боголюбова // Докл. АН СССР. – 1976. **228**, № 3. – С. 573–575.
31. *Петрина Д. Я., Энольский В. З.* О колебаниях одномерных систем. – 1976, Киев. – (Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики;).
32. *Петрина Д. Я., Энольский В. З.* О колебаниях одномерных систем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1976. № 8. – С. 756–760.
33. *Петрина Д. Я., Боголюбов Н. Н. (мл.)* Об одном классе модельных систем, допускающих понижение степени гамильтониана в термодинамическом пределе. I // Теорет. и мат. физика. – 1977. – **33**, № 2. – С. 231–245.
34. *Петрина Д. Я., Боголюбов Н. Н. (мл.)* Об одном классе модельных систем, допускающих понижение степени гамильтониана в термодинамическом пределе. II // Там же. – 1978. – **37**, № 2. – С. 246–257.
35. *Петрина Д. Я., Иванов С. С., Ребенко А. Л.* Уравнения для коэффициентных функций матрицы рассеяния. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
36. *Петрина Д. Я.* Математическое описание эволюции бесконечных систем классической статистической физики. Локально возмущенные одномерные системы // Теорет. и мат. физика. – 1979. – **38**, № 2. – С. 230–250.
37. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Статистическая механика квантовоклассических систем. Неравновесные системы // Там же. – 1980. – **42**, № 1. – С. 88–100.
38. *Петрина Д. Я., Ребенко А. Л.* Проекционно-итеративный метод решения уравнений квантовой теории поля и его связь с теорией перенормировок. Уравнения квантовой теории поля и некорректно поставленные задачи математической физики // Там же. – № 2. – С. 167–183.
39. *О процессе* обратного осмоса как краевой задаче в областях с мелкозернистой структурой / Д. Я. Петрина, В. И. Герасименко, А. И. Пилявский, П. В. Малышев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 75–78.
40. *Петрина Д. Я., Пилявский А. И.* О потенциале электростатического поля заряженных частиц и динамической мембраны. – Киев, 1980. – 32 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т теорет. физики; 80–141Р).
41. *Петрина Д. Я., Пилявский А. И.* О потенциале электростатического поля системы заряженных частиц и динамической мембраны // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 7. – С. 57–60.
42. *Петрина Д. Я.* О решении одной классической задачи электростатики и вычитательной процедуре // Докл. АН СССР. – 1983. -- **270**, № 1. – С. 78–81.
43. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математическое описание эволюции состояния бесконечных систем классической статистической механики // Успехи мат. наук. – 1983. – **38**, № 5. – С. 5–61.
44. *Петрина Д. Я.* О решении одной классической задачи электростатики с помощью вычитательной процедуры // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1984. – **24**, № 5. – С. 709–721.
45. *Петрина Д. Я.* Квантовая теория поля. – Киев: Вища шк., 1984. – 248 с.

46. *Петрина Д. Я., Белоколос Е. Д.* О связи методов аппроксимирующего гамильтониана и конечнозонного интегрирования // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 3. – С. 580–582.
47. *Петрина Д. Я., Белоколос Е. Д.* О связи методов аппроксимирующего гамильтониана и конечнозонного интегрирования // Теорет. и мат. физика. – 1984. – **58**, № 1. – С. 61–71
48. *Петрина Д. Я.* Функции распределения систем заряженных частиц в пространственно-неоднородной среде // Там же. – 1985. – **60**, № 1. – С. 104–116.
49. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Эволюция состояния бесконечных систем классической статистической механики // Сов. науч. обзоры. Сер. С. – 1985. – Т. 5. – С. 1–51 (на англ. яз.).
50. *Петрина Д. Я., Пилявский А. И.* Задачи электростатики в пространственно-неоднородных средах и вычитательная процедура // Физика многочастич. систем. – 1985. – Вып. 7. – С. 82–96.
51. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Термодинамический предел неравновесных состояний трехмерной системы упругих шаров // Теорет. и мат. физика. – 1985. – **64**, № 1. – С. 130–149.
52. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Термодинамический предел неравновесных состояний трехмерной системы упругих шаров // Докл. АН СССР. – 1985. – **282**, № 1. – С. 130–136.
53. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Математические основы классической статистической механики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
54. *Петрина Д. Я., Митропольский Ю. А., Барьяхтар В. Г.* Творческий вклад академика Н. Н. Боголюбова в развитие математики, нелинейной механики и теоретической физики // Вестн. АН УССР. – 1985. – № 11. – С. 9–21.
55. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Теормодинамический предел и предел Больцмана – Грэда неравновесных состояний системы упругих шаров // Проблемы современной статистической физики. – Киев: Наук. думка, 1985. – С. 228–237.
56. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Малышев П. В.* Термодинамический предел для решений уравнений Боголюбова / Сов. науч. обзоры. Сер. С. – 1987. – Т. 7. – С. 280–336 (на англ. яз.).
57. *Петрина Д. Я.* Математические проблемы описания эволюции состояний бесконечных систем статистической механики // Труды междунар. рабочей группы „Избран. пробл. стат. физики". Т. 2. – Сингапур: World Scientific, 1987. – С. 332.
58. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Предел Больцмана – Грэда состояний бесконечной системы упругих шаров // Докл. АН СССР. – 1987. – **297**, вып. 2. – С. 336–340.
59. *Петрина Д. Я., Боголюбов А. Н., Урбанский Т. М.* Николай Митрофанович Крылов. – Киев: Наук. думка, 1987. – С. 157–169.
60. *Петрина Д. Я., Малышев П. В.* Термодинамический предел для неравновесных функций распределения трехмерных классических систем взаимодействующих частиц // Докл. АН СССР. – 1988. – **301**, № 3. – С. 585–589.
61. *Петрина Д. Я., Мищенко А. В.* О точных решениях одного класса уравнений Больцмана // Там же. – **298**, № 2. – С. 338–342.
62. *Петрина Д. Я., Мищенко А. В.* О линеаризации и точных решениях одного класса уравнений Больцмана // Теорет. и мат. физика. – 1988. – **77**, № 1. – С. 135–153.
63. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Предел Больцмана – Грэда равновесных состояний // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 12. – С. 17–19.
64. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* О предельной теореме Больцмана – Грэда // Там же. – 1989. – № 11. – С. 12–16.
65. *Petrina D. Ya., Gerasimenko V. I., Malyshev P. V.* Mathematical foundations of classical statictical mechanics. – London: Gordon & Breach, 1989. – 336 с.
66. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Существование предела Больцмана – Грэда для бесконечной системы упругих шаров // Теорет. и мат. физика. – 1990. – **83**, № 3. – С. 92–114.
67. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И.* Математические проблемы статистической механической системы упругих шаров // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 3. – С. 135–182.
68. *Petrina D. Ya.* Exactly solvable models of quantum statistical mechanics. – Torino, 1992. – 115 p. – (Preprint / Dipartimento di Matematica Politecnico di Torino; No. 18).
69. *Petrina D. Ya.* Mathematical foundations of quantum statictical mechanics. – Kluwer Acad. Publ., 1994 – (to appear).
70. *Петрина Д. Я.* Математические основы квантовой статистической механики. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1994. – (в печати).
71. *Петрина Д. Я., Герасименко В. И., Энольский В. З.* Об уравнениях движения одного класса квантово-классических систем // Докл. АН СССР. – 1990. – **315**, № 1. – С. 75–80.

Получено 15.01.94