УДК 517.9

И. С. Кац, д-р физ.-мат. наук (Одес. технол. ин-т пищ. пром-сти),

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТРУНЫ

In this survey, we present the principal results of M. Krein's spectral theory of a string and describe its development by the other authors.

Викладені основні положення розробленої М. Г. Крейном спектральної теорії струни та її подальший розвиток у працях інших авторів.

В настоящем обзоре освещены разработанная М. Г. Крейном спектральная теория струны и дальнейшее ее развитие в работах других авторов. К сожалению, нет возможности изложить здесь спектральную теорию струны с массами разных знаков (Г. Лангер [64]), струны с диполями и струны с матричной массой (Л. П. Клотц и Г. Лангер [37]). Естественно, подбор материала, изложенного в этом обзоре, отражает мои интересы. Считаю нужным принести в связи с этим извинения читателю.

1. Дифференциальная операция струны, дифференциальное уравнение струны, спектральные функции.

1.1. Пусть I — интервал одного из четырех видов: $I=(a, b)$, $I=[a, b)$, $I=(a, b]$, $I=[a, b]$, где $-\infty \le a < b \le +\infty$, причем в случае, когда $a \in I$ $(b \in I)$, равенство $a=-\infty$ $(b=+\infty)$ исключается. Пусть на I задана конечная неубывающая функция M, которая может иметь интервалы постоянства, ненулевые абсолютно непрерывную, непрерывную сингулярную и разрывную составляющие. Полагаем $a_0 := \inf \mathfrak{F}_M$, $b_0 := \sup \mathfrak{F}_M$, где $\mathfrak{F}_M$ — множество точек роста функции M. Если $a \notin I$ $(b \notin I)$, считаем $M(a) := \inf_{x\in I} M(x)$ $(M(b) = \sup_{x\in I} M(x))$. С I и M ассоциируем натянутую единичной силой на I струну $S(I, M)$, у которой M служит функцией распределения ее масс в том смысле, что $M(x_2+$ $+0)-M(x_1-0)$ при любых $x_1 \le x_2$, $x_1, x_2 \in I$ — это масса ее части, расположенной на интервале $[x_1, x_2]$; здесь при $a \in I$ $(b \in I)$ считаем $M(a-0)=M(a)$ $(M(b+0)=M(b))$. Левый (правый) конец струны $S(I, M)$ (и интервал I) называем *регулярным*, если $a_0 > -\infty$, $M(a) > -\infty$ $(b_0 < +\infty$, $M(b) < < +\infty)$. В противном случае он называется *сингулярным*. Конец $x=a$ $(x=b)$ называется *вполне регулярным*, если $a \in I (b \in I)$.

1.2. *Продленные функции.* В случае, когда $I=(a, b)$, дифференциальная операция $l_M[\cdot]$, вводимая ниже, действует на обычных комплекснозначных функциях $x \mapsto f(x)$, определенных на I. Если у интервала I имеются вполне регулярные концы, то для определения дифференциальной операции $l_M[\cdot]$ понадобятся продленные функции. Например, если $I=[a, b]$, нам понадобятся продленные в обе стороны функции $f[\cdot]$, которые получаются из обыкновенных функций $I \overset{f(\cdot)}{\mapsto} \mathbb{C}$ путем присоединения к ним двух чисел $f^-(a)$ и $f^+(b)$, которые для удобства называем соответственно левой производной в точке $x=a$ и правой производной в точке $x=b$; $f[\cdot]=\{f(\cdot), f^-(a), f^+(b)\}$. В случае, когда только один конец струны $S(I, M)$, например левый, вполне регулярен, вводятся продленные влево функции $f[\cdot)$, получающиеся из обычных присоединением лишь одного „производного числа" $f^-(a)$; $f[\cdot)=\{f(\cdot), f^-(a)\}$. В случае, когда $I=(a, b]$, вводятся продленные вправо функции $f(\cdot]=\{f(\cdot), f^+(b)\}$. Во всех трех видах продленных функций, записанных выше, $f(\cdot)$ называется их непродленной частью. Говоря о продленных функциях, слово „продленная" обычно будем опускать. Его заменяют соответствующие скобки. Равенство продленных функций, линейные операции над ними и операция сопряжения определяются естественным образом поточечно для непродленной части и отдельно для присоединенных значений (см. [36], § 1, п. 1). Впредь, в обозначении интервала I и продленных функций скобка $\langle$ понимается как [, если $a \in I$, и как (, если $a \notin I$. Аналогично понимается скобка $\rangle$.

1.3. *Дифференциальная операция* $l[\cdot] = l_{MI}[\cdot]$ *струны* $S(I, M)$.

Определение 1. *Пусть* $I = \langle a, b\rangle$. *Тогда* $D = D_M = D_{MI}$ — *множество всех функций* $f\langle\cdot\rangle$ *таких, что* 1) $f(\cdot)$ *локально абсолютно непрерывна на* $\langle a, b\rangle$; 2) *в каждой точке* $x \in (a, b)$ *существует конечные левая* $f^-(x)$ *и правая* $f^+(x)$ *производные;* 3) *существует* M *-измеримая на* I *функция* $\varphi(\cdot)$ *такая, что для любых двух точек* $x_1, x_2 \in I$

$$f^{\pm}(x_2) - f^{\pm}(x_1) = -\int\limits_{x_1 \pm 0}^{x_2 \pm 0} \varphi(s)\, dM(s) \tag{1}$$

при любой из четырех возможных комбинаций знаков ($f^{\pm}(x_j)$ *в левой части записывается с тем же знаком, что и* $x_j \pm 0$ *в правой;* $j = 1, 2$).

Определение 2. *Для функций* $f\langle\cdot\rangle \in D_{MI}$ *считаем*

$$l[f](x) = l_M[f](x) = l_{MI}[f](x) = \varphi(x) \quad \forall\, x \in I,$$

где $\varphi(\cdot)$ — *функция, фигурирующая в определении* 1.

Замечание. Этим $l_{MI}[f](x)$ определено лишь с точностью до эквивалентности по M-мере. Нетрудно понять, что для $f\langle\cdot\rangle \in D_{MI}$ при M-почти всех $x \in I$

$$l_M[f](x) = -\frac{d}{(d)M(x)} f^+(x) = -\frac{d}{(d)M(x)} f^-(x), \tag{2}$$

где $\dfrac{d}{(d)M(x)}$ — символ симметричной производной по отношению к функции M. В связи с (2) операцию $l_M[\cdot]$ будем иногда условно записывать в виде $-\dfrac{d}{(d)M(x)}\dfrac{d}{dx}$, отображающем в общих чертах ее действие.

Для того, чтобы лучше понять „дух" дифференциальной операции $l_{MI}[\cdot]$, отметим ряд свойств функций $f\langle\cdot\rangle \in D_{MI}$ (см. [23], § 1, п. 1; [36], § 1, п. 1):

a) $f(\cdot)$ является линейной на каждом интервале постоянства функции M; b) если x — точка непрерывности функции M, то $f^-(x) = f^+(x)$, даже если $x = a \in I$ или $x = b \in I$; c) для каждой точки $x_0 \in (I \setminus \{b\})$ $f^+(x_0) = \lim\limits_{x \downarrow x_0} f^+(x) = \lim\limits_{x \downarrow x_0} f^-(x)$, а для каждой точки $x_0 \in (I \setminus \{a\})$ $f^-(x_0) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f^+(x) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f^-(x)$. В связи с последним вместо $f^-(x)$ и $f^+(x)$ мы пишем иногда $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$ соответственно (даже, если $f^-(x)$ или $f^+(x)$ — это присоединенное значение).

В заключение отметим, что для любых $f\langle\cdot\rangle$, $g\langle\cdot\rangle \in D_{MI}$ и любых $\alpha, \beta \in I$ справедливо „тождество Лагранжа"

$$\int_{\alpha \pm 0}^{\beta \pm 0} \left(l[f](x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{l[g](x)}\right) dM(x) = [f, g]_x \Big|_{\alpha \pm 0}^{\beta \pm 0}, \tag{3}$$

где $[f, g]_x = f(x)\overline{g'(x)} - f'(x)\overline{g(x)}$ (см. [23], § 2, п. 1) при любой из четырех комбинаций знаков $\pm$ при α и β, одинаковых в обеих частях (3).

1.4. *Дифференциальное уравнение струны.*

Определение 3. *Функцию* $u\langle\cdot\rangle$ *считаем решением дифференциального уравнения*

$$l_{MI}[y](x) = g(x), \tag{4}$$

если $u\langle\cdot\rangle \in D_{MI}$ *и* $l_{MI}[u](x) = g(x)$ *при* M*-почти всех* $x \in I$.

Дифференциальное уравнение

$$l_{MI}[y] - \lambda y = 0 \tag{5}$$

называем дифференциальным уравнением струны $S(I, M)$. Если $\omega > 0$, то дифференциальному уравнению (5) с $\lambda = \omega^2$ удовлетворяет амплитудная функция струны $S(I, M)$, колеблющейся с частотой ω.

Теперь можно пояснить механическую мотивацию введения присоединенных значений. Если, например, струна $S([a, b], M)$ колеблется с частотой ω и ее левый конец закреплен так, что может скользить без трения в направлении, перпендикулярном равновесному положению, то ее амплитудная функция из-за возникающих сил инерции удовлетворяет граничному условию $y^+(a) = -\omega^2 m_a y(a)$, где $m_a = M(a+0) - M(a)$ — величина массы, сосредоточенной в точке $x = a$. Возникает неестественная ситуация: граничное условие зависит не только от способа закрепления, но и от распределения масс струны, и от частоты ее колебаний. Введение же присоединенного значения $y^-(a)$ позволяет избежать этого. Теперь граничное условие приобретает вид $y^-(a) = 0$.

В частном случае, когда M абсолютно непрерывна, уравнение (5) равносильно уравнению

$$-y'' - \lambda\rho(x)y = 0, \quad x \in I, \tag{6}$$

для непродленной части. Здесь $\rho(x) = M'(x)$ п. в. на I. Свойства решений уравнения (5) аналогичны свойствам решений уравнения (6), а неоднородного уравнения $l_{MI}[y] - \lambda y = g(x)$ — свойствам уравнения $-y'' - \lambda\rho(x)y = \rho(x)g(x)$ (см. [36, 23]).

1.5. *Дифференциальный оператор* L_0 *струны* $S(I, M)$. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство $\mathfrak{L}_M^{(2)}(I)$ M-измеримых на I комплекснозначных функций, имеющих M-суммируемый квадрат. В нем скалярное произведение определяется равенством

$$(f, g)_{\mathfrak{H}} = \int_I f(x)\overline{g(x)}\, dM(x).$$

Точнее говоря, элемент $\boldsymbol{f}$ пространства $\mathfrak{H}$ — это семейство „изображающих его" функций $f \in \mathfrak{L}_M^{(2)}$, попарно совпадающих M-почти всюду на I. Для них мы пишем $f \in \boldsymbol{f}$ или $f(\cdot) \in \boldsymbol{f}$ (функцию f мы, все же, иногда называем элементом пространства $\mathfrak{H}$, если это не приводит к недоразумениям). По определению $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})_{\mathfrak{H}} = (f, g)_{\mathfrak{H}}$, где $f \in \boldsymbol{f}$, $g \in \boldsymbol{g}$.

К $\mathfrak{H}'$ относим элемент $\boldsymbol{f} \in \mathfrak{H}$, если существует $f \in \boldsymbol{f}$ такая, что $f(x) = 0$ при каждом x из каких-нибудь окрестностей каждого из сингулярных концов интервала I (если нет сингулярных концов, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$).

Определение 4. *Упорядоченную пару* $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\} \in \mathfrak{H}^2$ *относим к* L_0', *если* $\exists f\langle\cdot\rangle \in \boldsymbol{f}^*$, *имеющая следующие свойства:* 1) $f\langle\cdot\rangle \in D_{MI}$; 2) *существует*

* Мы пишем $f\langle\cdot\rangle \in \boldsymbol{f}$, если $f(\cdot) \in \boldsymbol{f}$.

$a_f \in I$ *такое, что* $f(x) = f^-(x) = 0 \ \forall (x \in I,\ x \le a_f)$; 3) *существует* $b_f \in I$ *такое, что* $f(x) = f^+(x) = 0 \ \forall (x \in I,\ x \ge b_f)$; 4) $l_{MI}[f] \in \mathbf{g}$.

Очевидно, L_0' — линейное отношение в $\mathfrak{H}$. Оказывается L_0' — это оператор в $\mathfrak{H}$ и даже в $\mathfrak{H}'$ — аналог, например, оператора L_0' из монографии М. А. Наймарка [69]. Как вытекает из (3), он эрмитов. Более того, он неотрицателен. В отличие от ситуации в [69] его область определения $\mathfrak{D}_0'$ не всегда плотна в $\mathfrak{H}$. Она плотна в $\mathfrak{H}$ в том и только в том случае, когда точки a_0 и b_0 имеют нулевую M-меру (в частности, когда онй не принадлежат I). В любом случае оператор L_0' имеет операторное замыкание L_0 и оператор L_0 либо сам является самосопряженным, либо имеет самосопряженные расширения в $\mathfrak{H}$. Оператор L_0 и его самосопряженные расширения реализуются дифференциальной операцией $l_{MI}[\cdot]$*. Его индекс дефекта (p, p), где $p \le 2$.

1.6. *Спектральные функции.* Пусть каждому $\lambda \in \mathbb{R}$ поставлено в соответствие множество G_λ, вообще говоря, продленных функций. Будем говорить, что семейство $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ таких множеств является определяющим, если при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ задача

$$l_{MI}[y] - \lambda y = 0, \quad y \in G_\lambda \quad (G_\lambda \in \mathcal{G}) \tag{7}$$

имеет единственное решение $u\langle \cdot, \lambda\rangle$. В случае, когда хотя бы при одном фиксированном $x \in I$ (а значит, и при любом) функции $\lambda \mapsto u(x, \lambda)$ и $\lambda \mapsto u^-(x, \lambda)$ B-измеримы и ограничены на каждом компактном интервале из $\mathbb{R}$, определяющее семейство $\mathcal{G}$ будем называть lB-семейством.

Определение 5. *Не убывающая на* $\mathbb{R}$ *функция* τ, *нормированная условиями*

$$2\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0) + \tau(\lambda + 0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \tau(0) = 0, \tag{8}$$

называется спектральной функцией (*сокращенно СФ*) *задачи* (7) *с определяющим семейством* $\mathcal{G}$, *если отображение* $U : f \mapsto \mathfrak{F}$, *где* $f \in \mathfrak{H}'$, *а*

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_I f(x) u(x, \lambda)\, dM(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{9}$$

(*при* $f \in \mathfrak{H}'$ *последний интеграл сходится при любом фиксированном* $\lambda \in \mathbb{R}$) *изометрически переводит* $\mathfrak{H}'$ *в* $\mathfrak{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$, *т. е. для каждой функции* $f \in \mathfrak{H}'$

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathfrak{F}(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \int_I |f(x)|^2 dM(x), \quad \mathfrak{F} = Uf. \tag{10}$$

Спектральная функция τ *задачи* (7) *называется ортогональной, если* $\overline{U\mathfrak{H}'} = \mathfrak{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$. *Спектром* $s[\tau]$ *спектральной функции* τ *низываем множество ее точек роста.*

Отметим сразу, что если для некоторого определяющего семейства $\mathcal{G}$ задача (7) имеет спектральную функцию, то отображение U по непрерывности продолжается до отображения $U_\tau : f \mapsto \mathfrak{F}$, изометрически переводящего $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$. Оно осуществляется равенством (9), если интеграл в нем понимать в смысле сходимости в метрике $\mathfrak{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$. Если, кроме того, $\mathcal{G}$ — lB-семейство, то для любой функции $f \in \mathfrak{H}$ в смысле сходимости в $\mathfrak{L}_M^{(2)}(I)$

* Доказательство всего изложенного здесь можно найти в [23].

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(\lambda) u(x, \lambda)\, d\tau(\lambda), \tag{11}$$

где $\mathfrak{F}(\cdot)$ определено равенством (9).

Равенством (11) реализуется отображение U_τ^{-1} на элементах $\mathfrak{F} \in U_\tau \mathfrak{H}$. Отметим еще, что отображение U_τ переводит оператор L_0 в замкнутую часть оператора Λ_τ умножения на независимую переменную в $\mathfrak{L}_\tau^{(2)}(\mathbb{R})$ и, следовательно, у него имеются самосопряженные расширения с простым спектром. Поэтому если оператор L_0 самосопряжен и его спектр не является простым, то ни при каком определяющем семействе $\mathcal{G}$ задача (7) не может иметь спектральную функцию. Такая ситуация имеет место, например, у струны $S(I, M)$ с $I = (-\infty, +\infty)$, $M(x) = x \ \forall x \in I$.

Отметим еще, что задача отыскания спектральных функций — это задача типа задач теории моментов. В самом деле, имеется некоторое семейство функций $\lambda \mapsto |\mathfrak{F}(\lambda)|^2$, где $\mathfrak{F}$ пробегает $U\mathfrak{H}'$, и для каждой такой функции равенством (10), где $f = U^{-1}\mathfrak{F}$, определено значение интеграла в левой его части. Требуется найти τ такое, чтобы это равенство было справедливым для всех таких функций $|\mathfrak{F}(\cdot)|^2$.

2. Спектральная теория М. Г. Крейна струны S_1.

2.1. S_1 *и* S_0 *— струны с вполне регулярным левым концом.* Для удобства считаем, что их левый конец расположен в точке $x = 0$. Таким образом, $I = [0, b\rangle$. Функцию M распределения масс нормируем условием $M(0) = 0$. Если левый конец струны $S([0, b\rangle, M)$ закреплен так, что он может скользить без трения по прямой, перпендикулярной оси x, будем называть ее струной $S_1([0, b\rangle, M)$, а в случае, когда ее левый конец неподвижно закреплен, — струной $S_0([0, b\rangle, M)$. Спектральными (ортогональными спектральными) функциями струн $S_1([0, b\rangle, M)$ и $S_0([0, b\rangle, M)$ называем спектральные (ортогональные спектральные) функции граничных задач

$$l_{MI}[y] - \lambda y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y^-(0) = 0, \tag{12}$$

$$l_{MI}[y] - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y^-(0) = 1, \tag{13}$$

соответственно. Решение (единственное) граничной задачи (12) обозначаем через $\varphi[\cdot, \lambda\rangle$, а граничной задачи (13) — через $\psi[\cdot, \lambda\rangle$. Непродленные части $\varphi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ этих решений и односторонние производные $\varphi^{\pm}(x, \lambda)$, $\psi^{\pm}(x, \lambda)$ по переменной x при фиксированном $x \in I$ являются целыми функциями типа

$$t_M(x) := \int_0^x \sqrt{M'(s)}\, ds \tag{14}$$

порядка $1/2$ (здесь M' — почти всюду существующая производная функции M). Изложенное справедливо и для присоединенных значений $\varphi^+(b, \lambda)$ и $\psi^+(b, \lambda)$, если $b \in I$.

Здесь мы изложим основные положения разработанной М. Г. Крейном спектральной теории лишь струн S_1. Прежде всего приведем описание множества $\mathfrak{T}([0, b], M)$ СФ регулярной струны $S_1([0, b], M)$ и множества $\mathfrak{T}_+([0, b], M)$ спектральных функций этой струны, имеющих неотрицательный спектр. Этому предпошлем следующий пункт.

2.2. *R-функции.* Здесь кратко изложим сведения из [35].

Определение 6. *Функцию f комплексной переменной относим к классу (R) и называем R-функцией, если она определена и голоморфна в каждой из полуплоскостей $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ и 1) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}_+$, 2) $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geq 0$ $\forall z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$.*

Любая R-функция $f(\cdot)$ представима в виде

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\tau(\lambda), \qquad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{15}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \geq 0$ — константы, а $\tau(\cdot)$ — неубывающая на $\mathbb{R}$ функция. α и β в (15) однозначно определяются R-функцией f, а при нормировке (8) τ также однозначно определяется этой R-функцией. При такой нормировке ее называют спектральной функцией R-функции f. Для нее справедлива формула обращения Стилтьеса

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{\lambda} \operatorname{Im} f(\xi + i\varepsilon)\, d\xi. \tag{16}$$

Кстати, если f — какая-нибудь функция (не обязательно R-функция) такая, что предел в правой части (16) существует при любом $\lambda \in \mathbb{R}$, то для функции τ, определенной равенством (16), будем писать $\tau = \mathfrak{S}[f]$.

Нам понадобятся несколько подклассов класса (R). К классу (R_1) относи: функции $f \in (R)$, для которых представление (15) можно преобразовать к вид;

$$f(z) = \gamma + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0,$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, а спектральная функция τ такова, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|)^{-1}\, d\tau(\lambda) < \infty.$$

К классу (R_0) относим функции $f \in (R)$, для которых представление (15 может быть преобразовано к виду

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{17}$$

где спектральная функция τ имеет ограниченное изменение на $(-\infty, +\infty)$.

К классу (S) относим функции $f \in (R)$, для которых представление (15) можно преобразовать к виду

$$f(z) = \gamma + \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{18}$$

где $\gamma \geq 0$, а спектральная функция τ такова, что $\tau(\lambda) = \tau(-0)$ $\forall \lambda \in (-\infty, 0)$ и $\int_{-0}^{+\infty} (1 + \lambda)^{-1}\, d\tau(\lambda) < \infty$.

Классы $(\tilde{R})$, $(\tilde{S})$ получаются соответственно из классов (R), (S) присоединением к ним функции, тождественно равной ∞. Наложенные на поведение функции $f \in (R)$ условия, необходимые и достаточные для принадлежности классам (R_1), (R_0), (S), можно найти в [35].

2.3. *Описание множества спектральных функций струны* $S_1([0, b], M)$. Будем считать, что эта струна имеет тяжелый правый конец, т. е. $M(x) < M(b)$ $\forall\, x \in (0, b)$.

Для каждой функции $h \in (\tilde{R})$ определим функцию Ω_h равенством

$$\Omega_h(z) = \frac{\psi^+(b, z)h(z) + \psi(b, z)}{\varphi^+(b, z)h(z) + \varphi(b, z)} \qquad \forall\, z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}). \tag{19}$$

Установлено (см. [16], лемма 3.1), что $\Omega_h \in (R_1)$ и, значит, допускает абсолютно сходящееся представление

$$\Omega_h(z) = \gamma_h + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau_h(\lambda)}{\lambda - z} \qquad \forall\, z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}), \tag{20}$$

где $\gamma_h \in \mathbb{R}$, а $\tau_h(\cdot)$ — неубывающая функция, нормированная условиями типа (8), и, следовательно,

$$\tau_h(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_0^{\lambda} \operatorname{Im} \Omega_h(\xi + i\varepsilon)\, d\xi \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Оказывается, в (20) $\gamma_h = a_0$ $\forall\, h \in (\tilde{R})$.

Теорема 1. *Любая функция* $\tau \in \mathfrak{T}([0, b], M)$ *совпадает с функцией* τ_h, *полученной по формулам* (19), (21) *с некоторым* $h \in (\tilde{R})$. *Обратно, в случае, когда правый конец струны* $S_1([0, b], M)$ *не несет сосредоточенной массы* ($M(b) = M(b-0)$), *любая функция* τ_h, *полученная по этим формулам с* $h \in (\tilde{R})$, *принадлежит* $\mathfrak{T}([0, b], M)$, *а в случае, когда этот конец несет сосредоточенную массу* ($M(b-0) < M(b)$)*, $\tau_h \in \mathfrak{T}([0, b], M)$ *в том и только в том случае, когда* $h \in ((\tilde{R}) \setminus (R_0))$. *СФ* τ_h *струны* $S_1([0, b], M)$ *ортогональна в том и только в том случае, когда* h *— вещественная константа, возможно бесконечная.*

Заметим, что в случае, когда $M(b-0) < M(b)$, функция τ_h для $h \in (R_0)$ является СФ струны, полученной из данной изъятием сосредоточенной массы в точке $x = b$, а также струны, полученной из данной $S_1([0, b], M)$ путем присоединения к сосредоточенной массе, имеющейся в этой точке, массы, равной $(\sup\limits_{\eta > 0} (\eta \operatorname{Im} h(i\eta)))^{-1}$, но не является СФ исходной струны.

Теорему 1 дополняет следующая теорема.

Теорема 2. *СФ* τ_h *струны* $S_1([0, b], M)$ *принадлежит* $\mathfrak{T}_+([0, b], M)$ *в том и только в том случае, когда* $h \in (\tilde{S})$. *При таких и только таких* h *функция* Ω_h *принадлежит классу* $(\tilde{S})$.

Отметим, что, когда $z < 0$, для любой функции $\tau \in \mathfrak{T}_+([0, b], M)$ справедливы неравенства

$$\frac{\psi(b, z)}{\varphi(b, z)} \le a_0 + \int\limits_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \le \frac{\psi^+(b, z)}{\varphi^+(b, z)}. \tag{22}$$

* Эту часть теоремы установил И. С. Кац (см. [36], литературно-исторические примечания, п. 1; [29]).

В первом из неравенств (22) имеет место знак равенства хотя бы при одном $z < 0$ (а тогда и любом) лишь в случае, когда $\tau = \tau_0$, а во втором — лишь когда $\tau = \tau_\infty$.

В случае регулярной струны $S_1([0, b), M)$ с $b = b_0 < \infty$ множество ее СФ совпадает с множеством СФ струны, полученной из $S_1([0, b), M)$ присоединением к ней точки $x = b$ без сосредоточенной массы. В описании множества спектральных функций такой струны $\varphi^+(b, z)$ и $\psi^+(b, z)$ можно заменить на $\varphi^-(b, z)$ и $\psi^-(b, z)$ соответственно.

2.4. Здесь уместно упомянуть о полученном М. Г. Крейном обобщении неравенств Чебышева – Маркова (см. [53, 62]). Оно устанавливает некоторые экстремальные свойства ортогональных СФ струны $S_1([0, b], M)$. Ортогональная СФ τ_h ($h = \text{const}, h \in \mathbb{R}$) является функцией чистых скачков, а ее спектр совпадает с множеством нулей целой функции $z \mapsto \varphi^+(b, z)\, h + \varphi(b, z)$. Для простоты будем считать, что струна $S_1([0, b], M)$ имеет тяжелый правый конец и точка $x = b$ не несет сосредоточенной массы. В этом случае любая точка ξ вещественной оси является точкой спектра одной ортогональной СФ, которую обозначим через $\tau^{(\xi)}$. Марком Григорьевичем [62] установлена следующая теорема.

Теорема 3. *Для любой функции* $\tau \in \mathfrak{T}([0, b], M)$ *и любого* $\xi \in \mathbb{R}$ *справедливы неравенства*

$$\tau(\xi - 0) - \tau(-\infty) \geq \tau^{(\xi)}(\xi - 0) - \tau^{(\xi)}(-\infty);$$

$$\tau(\xi + 0) - \tau(-\infty) \leq \tau^{(\xi)}(\xi + 0) - \tau^{(\xi)}(-\infty).$$

Если хотя бы в одном из этих неравенств имеет место строгое равенство, то $\tau(\lambda) = \tau^{(\xi)}(\lambda)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Эта теорема содержит в себе следующие два предложения.

A. Из всех СФ τ струны $S_1([0, b], M)$ наибольшую спектральную массу $\tau(\xi + 0) - \tau(\xi - 0)$ в фиксированной точке $\xi \in \mathbb{R}$ имеет ортогональная СФ $\tau^{(\xi)}$. Если же $\tau(\xi + 0) - \tau(\xi - 0) = \tau^{(\xi)}(\xi + 0) - \tau^{(\xi)}(\xi - 0)$, то $\tau(\lambda) = \tau^{(\xi)}(\lambda)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

B. Пусть $\xi_1 < \xi_2$ — две соседние точки спектра ортогональной СФ $\tilde{\tau}$ струны $S_1([0, b], M)$ (т. е. $\tilde{\tau}(\xi_1 - 0) < \tilde{\tau}(\xi_1 + 0) = \tilde{\tau}(\xi_2 - 0) < \tilde{\tau}(\xi_2 + 0)$). Тогда, если СФ τ этой струны не имеет точек роста на (ξ_1, ξ_2), то $\tau(\lambda) = \tilde{\tau}(\lambda)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

В связи с предложением А отметим, что

$$\tau^{(\xi)}(\xi + 0) - \tau^{(\xi)}(\xi - 0) = \left(\int_0^b (\varphi(x, \xi))^2 dM(x) \right)^{-1} \tag{23}$$

и, в частности,

$$\max_{\tau \in \mathfrak{T}([0, b], M)} (\tau(+0) - \tau(-0)) = (M(b))^{-1}. \tag{24}$$

Если ограничиться только СФ с неотрицательным спектром, то для них справедлива аналогичная теорема (см. [62], теорема 6), но роль ортогональных СФ будут играть так называемые канонические. Они получаются из (19), (21), если в качестве $h(z)$ взять константу из $[0, +\infty]$ (это канонические спектральные функции первого типа; они же ортогональные спектральные функции) или $-m / z$, где $m > 0$ (это канонические спектральные функции второго типа).

Отметим, что для граничной задачи

$$-y'' + q(x) y - \lambda \rho(x) y = 0 \quad (0 \leq x < b), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = h, \tag{25}$$

с нагруженным уравнением Штурма – Лиувилля справедливатеорема, аналогичная теореме 3 (см. [53]). Это позволило М. Г. Крейну в случае, когда $\rho(x) \equiv 1$, улучшить остаточный член в полученной В. А. Марченко [67] асимптотической формуле

$$\tau(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}), \quad \lambda \to \infty, \tag{26}$$

для спектральной функции. Это было очередное улучшение после полученного к тому времени Б. М. Левитаном [66].

2.5. *Спектральные функции сингулярных струн* $S_1([0, b), M)$. Напомним, что левый конец струны $S_1([0, b), M)$ регулярен. Поэтому сингулярность такой струны означает сингулярность ее правого конца, т. е. что $M(b) + b_0 = \infty$, а в этом случае обязательно $b_0 = b$.

У любой сингулярной струны $S_1([0, b), M)$ имеется точно одна СФ τ_+ с неотрицательным спектром и она ортогональна. Функция Ω_+, определенная при $z \in \operatorname{Ext}[0, \infty)$ равенством

$$\Omega_+(z) = a_0 + \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau_+(\lambda)}{\lambda - z} \tag{27}$$

удовлетворяет неравенствам (см. [36], § 10, п. 4)

$$\frac{\psi(x, z)}{\varphi(x, z)} < \Omega_+(z) \le \frac{\psi^+(x, z)}{\varphi^+(x, z)} \quad \forall\, (x \in [0, b),\ z < 0). \tag{28}$$

Отметим, что при фиксированном $z < 0$ функция $x \mapsto \dfrac{\psi(x, z)}{\varphi(x, z)}$ монотонно возрастает, а функция $x \mapsto \dfrac{\psi^+(x, z)}{\varphi^+(x, z)}$ не возрастает на $[0, b)$. Кроме того, $\dfrac{\psi^+(x, z)}{\varphi^+(x, z)} - \dfrac{\psi(x, z)}{\varphi(x, z)} \to 0$ при $x \uparrow b$. Поэтому

$$a_0 + \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau_+(\lambda)}{\lambda - z} = \lim_{x \uparrow b} \frac{\psi(x, z)}{\varphi(x, z)} := \mathring{\Gamma}(z). \tag{29}$$

Причем согласно теореме Витали это равенство справедливо не только при $z < 0$, но и при всех $z \in \operatorname{Ext}[0, +\infty)$.

СФ τ_+ сингулярной струны $S_1([0, b), M)$ является единственной ее СФ в том и только в том случае, когда

$$\int_{-0}^{b} x^2\, dM(x) = \infty. \tag{30}$$

Поэтому если сингулярная струна $S_1([0, b), M)$ имеет конечную длину, то она имеет только одну СФ τ_+. Описание множества всех СФ в случае, когда (30) не выполняется, можно найти в работе [36] (§ 10, п. 7).

2.6. *Главный коэффициент динамической податливости (КДП) произвольной струны* $S_1([0, b\rangle, M)$ *и ее главная спектральная функция.* В пп. 2.3 – 2.5 мы рассматривали струны $S_1([0, b\rangle, M)$, у которых $b_0 = b$. У таких струн на правом конце нет интервала, свободного от массы. Теперь откажемся от этого требования (для сингулярных струн $S_1([0, b\rangle, M)$ оно выполнялось автоматически). Для любой струны $S_1([0, b\rangle, M)$ (регулярной или сингулярной) существует предел

$$\lim_{x\uparrow b} \frac{\psi(x, z)}{\varphi(x, z)} := \mathring{\Gamma}(z) \quad \forall z \in \operatorname{Ext}[0, +\infty) \tag{31}$$

(если $b \in I$, то он равен $\psi(b, z)/\varphi(b, z)$). $\mathring{\Gamma}$ — это $\tilde{S}$-функция, ее спектральная функция $\mathring{\tau}$ имеет неотрицательный спектр. За исключением случая, когда $b \in I := [0, b\rangle$ и $M(b-0) < M(b)$, $\mathring{\tau}$ является СФ струны $S_1([0, b\rangle, M)$. Ее называют *главной спектральной функцией этой струны*, а функцию $\mathring{\Gamma}$ — ее главным *коэффициентом динамической податливости* (КДП). Термин объясняется тем, что в случае, когда $z = \omega^2$, где $\omega > 0$, и $z \notin s[\mathring{\tau}]$, $\mathring{\Gamma}(z)$ равно амплитуде вынужденных колебаний левого конца струны, под действием периодической силы $\mathfrak{F} = \sin \omega t$, приложенной к этому концу и перпендикулярной равновесному положению, если ее правый конец $x = b$ в случае, когда он регулярен, неподвижно закреплен. Неподвижное закрепление конца $x = b$, когда $b_0 < b \le \infty$, равносильно отбрасыванию участка $(b_0, b\rangle$ струны и затем предоставлению возможности концу b_0 оставшейся части струны скользить без трения по окружности, центр которой расположен в точке b и, в частности, когда $b_0 < b = \infty$, — по прямой, перпендикулярной оси Ox.

В случае, когда струна $S_1([0, b\rangle, M)$ невесома $(M(x) = 0 \;\; \forall\, x \in [0, b\rangle)$, $\mathring{\Gamma}(z) \equiv b$ и, в частности, $\mathring{\Gamma}(z) \equiv \infty$, когда $b = \infty$. У невесомых струн $\mathring{\tau}(\lambda) = 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Если $b \in I$ и $m_b := M(b) - M(b-0) > 0$, то, как мы указывали, $\mathring{\tau}$ не является СФ струны $S_1([0, b\rangle, M)$. В этом случае не вводится понятие главного КДП струны. „Механически" это объясняется тем, что сосредоточенная масса m_b не участвует в описанном выше колебательном процессе.

Главный КДП $\mathring{\Gamma}$ струны $S_1([0, b\rangle, M)$ связан с ее главной СФ $\mathring{\tau}$ равенством

$$\mathring{\Gamma}(z) = \gamma + \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\mathring{\tau}(\lambda)}{\lambda - z} \quad \forall z \in \operatorname{Ext}[0, \infty), \tag{32}$$

где $\gamma = a_0$. У сингулярной струны $S_1([0, b), M)$ главная СФ — это ее единственная СФ с неотрицательным спектром.

2.7. *Основной результат М. Г. Крейна в спектральной теории струн* $S_1([0, b\rangle, M)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Любая функция $\mathring{\Gamma} \in (\tilde{S})$ является главным КДП единственной струны $S_1([0, b), M)$ (сингулярной или регулярной).*

Замечание. Если струна $S_1([0, b), M)$, фигурирующая в теореме 4, регулярна и $b < \infty$, то та же функция $\mathring{\Gamma}$ является главным КДП еще только одной струны $S_1([0, b], M)$, получающейся из струны $S_1([0, b), M)$ присоединением точки $x = b$, не несущей сосредоточенной массы.

Из теорем 2 и 4 легко получается следующая теорема.

Теорема 5. *Любая имеющая неотрицательный спектр спектральная функция τ регулярной струны $S_1([0, b\rangle, M)$ с тяжелым правым концом является либо главной спектральной функцией этой струны, либо главной спектральной функцией струны $S_1([0, B), \check{M})$, получающейся из струны $S_1([0, b\rangle, M)$ неко-*

торым продлением вправо.

Задача восстановления струны по ее главной спектральной функции имеет некоторую неоднозначность, ибо спектральная функция функции класса $(\tilde{S})$ определяет эту функцию лишь с точностью до аддитивной неотрицательной константы γ. Учитывая механический смысл этой константы $(\gamma = a_0)$, из теорем 4 и 5 может быть получена следующая теорема.

Теорема 6. *Для того чтобы неубывающая на* $(-\infty, +\infty)$ *функция* τ, *нормированная условиями* (8) *и не имеющая точек роста на полуоси* $(-\infty, 0)$, *была спектральной функцией некоторой струны* S_1, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_{-0}^{+\infty} (1+\lambda)^{-1}\, d\tau(\lambda) < \infty. \tag{33}$$

При выполнении этого условия τ *является главной спектральной функцией единственной струны* $S_1([0, b), M)$ *с тяжелым левым концом. Более того, любая струна* $S_1([0, \tilde{b}], \tilde{M})$ *с тяжелыми концами, для которой* τ *является спектральной, но не главной спектральной функцией, получается из* $S_1([0, b), M)$ *путем отбрасывания ее интервала* $(\tilde{b}, b)$ *возможно с дополнительным изъятием сосредоточенной массы, имеющейся в точке* $x = \tilde{b}$ *(без изъятия самой точки).*

Множество функций τ, удовлетворяющих условиям теоремы 6, будем обозначать через $\mathfrak{T}_+$.

Отметим некоторые свойства биективного соответствия, устанавливаемого теоремой 4 между множеством струн $S_1([0, b\rangle, M)$ и множеством функций $\mathring{\Gamma} \in (\tilde{S})$ вида (32), являющихся главными КДП этих струн:

1^0. $\mathring{\tau}(+\infty) - \mathring{\tau}(-\infty) = (M(a_0+0) - M(a_0-0))^{-1}$.

2^0. $b = \gamma + \int_{-0}^{+\infty} \lambda^{-1}\, d\mathring{\tau}(\lambda)$.

3^0. Если считать, что неподвижное закрепление правого конца $x = b < \infty$ струны $S_1([0, b\rangle, M)$ равносильно присоединению к ней в точке $x = b$ бесконечной массы, то

$$(\mathring{\tau}(+0) - \mathring{\tau}(-0))^{-1} = M, \tag{34}$$

где M — полная масса струны. Следовательно, если $\mathring{\tau}(+0) - \mathring{\tau}(-0) > 0$, то $b = \infty$, $M < \infty$ и выполняется (34).

4^0. Если $S_1 = S_1([0, b), M)$ — сингулярная струна, то для того, чтобы функция $\mathring{\Gamma}$ была мероморфной, т. е. чтобы дискретным был спектр $s[\mathring{\tau}]$ ее СФ $\mathring{\tau}$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

$$\lim_{x \uparrow b} x\,(M(b) - M(x)) = 0, \qquad \lim_{x \uparrow b} M(x)(b - x) = 0.$$

Первое из них подразумевает, что $M(b) < \infty$ и $b = \infty$, а второе,— что $b < \infty$, $M(b) = \infty$ (см. [34]).

5^0. Если $S_1 = S_1([0, b), M)$ — сингулярная струна, то для того, чтобы спектр $s[\mathring{\tau}] = \{\lambda_j \mid j = 0, 1, 2, \ldots\}$ удовлетворял условию

$$\sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j^{-1} < \infty, \tag{35}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

$$\int^b (M(b) - M(x))\, dx < \infty, \qquad \int^b (b - x)\, dM(x) < \infty. \tag{36}$$

Первое из этих условий подразумевает, что $M(b) < \infty$, а второе,— что $b < \infty$.

Отметим, что при выполнении первого из условий (36) правый конец струны в принятой в теории диффузионных процессов терминологии В.Феллера называется концом-входом, а при выполнении второго — концом-выходом (очевидно, конец, являющийся концом-входом и концом-выходом, — это регулярный конец).

2.8. *Классы* $\mathfrak{B}_A$.

Определение 7. *Непрерывную функцию* Φ, *определенную на* $[0, A)$, *отнесем к классу* $\mathfrak{B}_A$, *если* 1) $\Phi(0) = 0$, 2) *ядро* $\mathfrak{T}(s, t) := \Phi(s) + \Phi(t) - \Phi(|t - s|)$ *является положительно определенным на квадрате* $0 \le s, t < A$.

Очевидно функция Φ, определенная на $[0, +\infty)$ равенством

$$\Phi(t) = \int_{-0}^{+\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda} t}{\lambda}\, d\tau(\lambda) \tag{37}$$

с какой-либо функцией $\tau \in \mathfrak{T}_+$, принадлежит $\mathfrak{B}_\infty$ и, следовательно, классу $\mathfrak{B}_A$ с любым $A \in (0, +\infty)$. М. Г. Крейн [57] установил, что любая функция $t \mapsto \Phi(t)$ из $\mathfrak{B}_A$, где A фиксировано, $0 < A \le +\infty$, представима на $[0, A)$ в виде (37) с $\tau \in \mathfrak{T}_+$. Поэтому при $A < \infty$ любая функция $\Phi \in \mathfrak{B}_A$ может быть продолжена на $[0, +\infty)$ так, что после продолжения будет принадлежать классу $\mathfrak{B}_\infty$. Задача такого продолжения функции $\Phi \in \mathfrak{B}_A$ с $A < \infty$ равносильна задаче отыскания такой функции $\tau \in \mathfrak{T}_+$, что равенство (37) справедливо при каждом $t \in [0, A)$.

Если $\Phi \in \mathfrak{B}_\infty$, то число $T_\Phi > 0$ будем называть разделяющей точкой функции Φ, если она неоднозначно продолжима с любого интервала $[0, A)$ с $A < T_\Phi$ и однозначно продолжима с любого интервала $[0, A)$ с $A > T_\Phi$. Если Φ однозначно продолжима с любого интервала $[0, A)$ с $A > 0$, полагаем $T_\Phi = 0$. Если же она неоднозначно продолжима с любого интервала $[0, A)$ с $A > 0$, полагаем $T_\Phi = \infty$.

В случае $A < T_\Phi$ $(A > 0)$ М. Г. Крейн нашел описание множества $V_{\Phi, A} \subset \mathfrak{T}$ всех τ, дающих ее представление (37) на интервале $0 \le t < A$. Более того, он нашел алгоритм вычисления значения так называемой центральной функции $\theta_\Phi(A) := \max_{\tau \in V_{\Phi, A}} (\tau(+0) - \tau(-0))$ при любом $A \in (0, T_\Phi)$. Этот аппарат позволил во многих случаях эффективно решить обратную задачу отыскания струны по данной ее главной СФ $\tau \in \mathfrak{T}_+$ (подробнее об этом см. в следующем пункте).

2.9. *Переходные функции струны* $S_1([0, b\rangle, M)$ *с тяжелым левым концом.* Для каждой функции $\tau \in \mathfrak{T}_+([0, b\rangle, M)$ определим на $[0, +\infty)$ функцию Φ_τ равенством

$$\Phi_\tau(t) = \int_{-0}^{+\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda} t}{\lambda}\, d\tau(\lambda) \quad \forall\, t \in [0, +\infty). \tag{38}$$

Она называется переходной функцией (сокращенно ПФ) струны $S_1([0, b\rangle, M)$, а функция $\overset{\circ}{\Phi} := \Phi_{\overset{\circ}{\tau}}$ — главной ПФ этой струны. Из теоремы 6 вытекает, что любая функция $\Phi \in \mathfrak{B}_\infty$ является главной ПФ единственной струны S_1, с тяжелым левым концом и, более того, любая ПФ струны $S_1([0, b\rangle, M)$ является либо главной ПФ этой струны, либо главной ПФ струны $S_1([0, B), \check{M})$, полученной из $S_1([0, b\rangle, M)$ в случае, когда $b_0 = b$, некоторым продлением вправо ($\check{M}(x) = M(x) \quad \forall x \in [0, b\rangle$), а в случае, когда $b_0 < b$, отбрасыванием ее части, лежащей на $(b_0, b\rangle$ (и свободной от массы), а затем продлением вправо.

Примечательно (см. [57]), что для любой $\tau \in \mathfrak{T}_+([0, b\rangle, M)$

$$\Phi_\tau(t) = \overset{\circ}{\Phi}(t) \quad \forall t \in [0, 2T), \tag{39}$$

где $T = t_M(b)$ (см. (14)). Из (38) и (39) следует, что $\mathfrak{T}_+([0, b), M) \subset V_{\overset{\circ}{\Phi}, 2T}$. Более того, М. Г. Крейн установил в случае, когда правый конец струны $S_1([0, b), M)$ не является разряженным, т. е. нет интервала $(b - \varepsilon, b)$, на котором $M'(x) = 0$ п. в., что $\mathfrak{T}_+([0, b), M) = V_{\overset{\circ}{\Phi}, 2T}$. В этом случае $\theta_\Phi(2T)$ определяет полную массу струны $S_1([0, b), M)$ (см. (24)). Теперь понятно, что для любого $t \in (0, T)$ может быть найдена по $\overset{\circ}{\Phi}$ масса части струны, лежащей на $[0, x_t)$, где x_t — наименьший корень уравнения $x_M(x) = t$. В том же случае, когда на струне S_1 нет интервалов, на которых $M'(x) = 0$ п. в., упомянутая идея вместе с равенством (14) дают возможность найти длину b струны и $M(x)$ для каждого $x \in (0, b)$ по $\overset{\circ}{\Phi}$ и, следовательно, по главной спектральной функции. В этом плане М. Г. Крейн доказал следующие две теоремы [57].

Теорема 7. *Для того чтобы функция* $\tau \in \mathfrak{T}_+$ *была главной СФ некоторой струны* $S_1([0, b), M)$ *такой, что* $t_M(b) = T$, *где* T *— заданное число из* $[0, +\infty]$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $T_\Phi = 2T$, *где* $\Phi = \Phi_\tau$.

Теорема 8. *Пусть* $\Phi \in \mathfrak{B}_\infty$, $T_\Phi > 0$ *и* $\exists\, \Phi'(t) \quad \forall t \in [0, T_\Phi / 2)$, *причем* Φ' *локально абсолютно непрерывна на* $[0, T_\Phi / 2)$, *а* $S_1([0, b), M)$ *— струна, главной ПФ которой служит* Φ. *Тогда, если при некотором* $A \in [0, T_\Phi / 2)$ *интегральное уравнение*

$$2\Phi'(0) q(t) + \int_{-A}^{A} \Phi''(|t - s|)\, q(s)\, ds = 1 \tag{40}$$

имеет суммируемое на $[-A, A]$ *решение* $q = q(t; A)$, *то оно единственно и при любом комплексном* λ

$$\int_{-A}^{A} q(t, A) \cos \lambda t\, dt = \int_{-0}^{x_A - 0} \varphi(x, \lambda^2)\, dM(x) = -\frac{1}{\lambda^2} \varphi^-(x_A, \lambda^2),$$

в частности,

$$\int_{-A}^{A} q(t, A)\, dt = M(x_A - 0).$$

Более того, если $\Phi'(0) > 0$, *то уравнение* (40) *при любом* $A \in (0, T_\Phi/2)$ *будет иметь непрерывное на* $[-A, A]$ *решение, а функции* $t \mapsto M(x_t)$ *и* $t \mapsto \varphi^-(x_t, \lambda)$ *будут иметь абсолютно непрерывные производные по переменной* t *и при любом комплексном* λ *справедливо равенство*

$$\varphi(x_t, \lambda^2) = \frac{1}{p(t)} \frac{d}{dt} \int_{-t}^{t} q(s, t) \cos \lambda s \, ds,$$

где $p(t) = dM(x_t)/dt$.

Эта теорема вместе с рядом предложений (см. [54]), указывающих, как преобразуется струна при некоторых простых преобразованиях ее главной спектральной функции, дала возможность указать большой класс функций $\tau \in \mathfrak{T}_+$, для которых можно эффективно найти струну S_1 с главной спектральной функцией τ. Более того, она позволила расширить класс струн S, для которых решение уравнения струны (5) при любом λ можно выразить, используя элементарные и специальные функции (функции Бесселя, функции Лежандра).

Развитие идеи теоремы 8 привело Марка Григорьевича к ряду интересных результатов, не имеющих прямого отношения к спектральной теории струны [58–61].

Завершим этот пункт механической трактовкой переходной функции струны и попыткой дать механическое объяснение равенства (39). Пусть $\mathring{\Phi}$ — главная ПФ струны $S_1([0, b\rangle, M)$. Тогда $\mathring{\Phi}(t)$, как установил М. Г. Крейн, равно перемещению за время t левого конца этой струны под действием единичной поперечной силы, мгновенно приложенной к этому концу доселе покоящейся струны. Если $\tau \in \mathfrak{T}_+([0, b\rangle, M)$, то, как указывалось выше, Φ_τ — главная ПФ некоторой струны $\check{S}_1 = S_1([0, B\rangle, \check{M})$, у которой на интервале $[0, b_0)$ распределение масс совпадает с распределением масс струны $S_1([0, b\rangle, M)$. Отметим, что для любого $x \in [0, B)$ $t_{\check{M}}(x)$ — это время, за которое волна, вызванная поперечным перемещением левого конца струны, дойдет до точки x или (обратная) волна, вызванная поперечным перемещением точки x, дойдет до левого конца. На движение точки $x = 0$ струны $\check{S}_1$ оказывают влияние приложенная единичная сила, та часть струны $\check{S}_1$, которая пришла в движение, и часть струны, оставшаяся неподвижной. Неподвижная часть оказывает свое влияние только продольным натяжением, которое не зависит от расположенных на ней масс. Для точек $x \in (b_0, B)$ $t_{\check{M}}(x) \geq T$ (заметим, что $T = t_M(b) = t_M(b_0) = t_{\check{M}}(b_0)$). Поэтому за время $t < 2T$ часть струны $\check{S}_1$, лежащая правее точки b_0, т. е. часть струны $\check{S}_1$, присоединенная к исходной струне, не влияет на перемещение левого конца (волна не успеет дойти до точек этой части и возвратиться к точке $x = 0$). Эффект получается такой, как будто точка b_0 неподвижно закреплена. Этим объясняется, что ПФ Φ_τ исходной струны (она же главная ПФ струны $\check{S}_1$) совпадает с главной ПФ $\Phi_{\mathring{\tau}}$ на интервале $0 \leq t < 2T$.

Мне не удалось понять, что было раньше,— аналитический подход к доказательству равенства (39) и теоремы 7 или механические соображения. Я склоняюсь ко второму. М. Г. Крейн обладал сильнейшей механической интуицией, которая вместе с неповторимой аналитической техникой и умением видеть явления во всей их общности творила чудеса.

2.10. *Задача экстраполяции стационарных случайных процессов.* Пусть σ — не убывающая на $\mathbb{R}$ нечетная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\lambda^2)^{-1}\, d\sigma(\lambda) < \infty. \tag{41}$$

Обозначим через Λ_∞ пространство $\mathfrak{L}^{(2)}_\sigma(-\infty,+\infty)$ с обычной нормой. Пусть $J_\alpha = (-\alpha, +\alpha)$, $0 \le \alpha < +\infty$, — интервал вещественной оси. Через Λ_α обозначим линейную замкнутую в Λ_∞ оболочку семейства функций

$$\lambda \mapsto \int_{t_1}^{t_2} \exp(i\lambda s)\, ds, \qquad t_1, t_2 \in J_\alpha.$$

М. Г. Крейн в работе [56] привел решения двух проблем:

I. Каков критерий того, что $\Lambda_\alpha = \Lambda_\infty$?

II. Если $\Lambda_\alpha \ne \Lambda_\infty$, то как аналитически выразить ортогональную проекцию $P_\infty F$ на Λ_α произвольного элемента $F \in \Lambda_\infty$.

Эти вопросы можно трактовать, как вопросы упреждения (экстраполяции) и фильтрации стационарных процессов по их наблюдению на интервале $-\alpha < t < \alpha$. Не нарушая общности, будем считать, что σ нормирована условиями типа (8). Положим $\tau(\lambda) = 2\sigma(\sqrt{\lambda}) - \sigma(+0)$ $\forall\, \lambda > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\lambda) = -\sigma(+0)$ $\forall\, \lambda < 0$. Так определенная функция нормирована условиями (8) и, как следует из (41), справедливо (33). Согласно теореме 6, существует струна $S_1([0, b), M)$ с тяжелым левым концом, главной спектральной функцией которой служит τ. *Решение проблемы* I дает в терминах струны $S_1([0, b), M)$ следующая теорема.

Теорема 9. *Для того чтобы* $\Lambda_\alpha = \Lambda_\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* a) $t_M(x) \le \alpha$ $\forall\, x \in [0, b)$; b) $M(x_\alpha) = M(b)$, *где* x_α — *наименьший корень уравнения* $t_M(x) = \alpha$.

Пусть теперь $\Lambda_\alpha \ne \Lambda_\infty$ и $F \in \Lambda_\infty$. Построим функции

$$f(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\, \varphi(x, \lambda^2)\, d\sigma(\lambda), \quad g(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\, \varphi^-(x, \lambda^2)\, \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda},$$

где первый предел понимается в смысле сходимости в $\mathfrak{L}^{(2)}_M[0, b)$, а второй — в смысле сходимости в $\mathfrak{L}^{(2)}[0, b)$. Здесь $\varphi(\,\cdot\,, \lambda)$ — непродленная часть решения задачи 12.

Решение проблемы II дается формулой

$$(P_\alpha F)(\lambda) = \int_{-0}^{x_\alpha - 0} f(x)\, \varphi(x, \lambda^2)\, dM(x) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_\alpha} g(x)\, \varphi^-(x, \lambda^2)\, dx. \tag{42}$$

Квадрат же расстояния от F до Λ_α определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda) - (P_\alpha F)(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = \int_{x_\alpha - 0}^{b} |f(x)|^2\, dM(x) + \int_{x_\alpha}^{b} |g(x)|^2\, dx.$$

Попутно М. Г. Крейн установил, что целыми функциями

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_{-0}^{x_\alpha - 0} f(x)\varphi(x, \lambda^2)\, dM(x),$$

где $f \in \mathfrak{L}_M^{(2)}[0, x_\alpha)$, исчерпываются все четные целые функции из Λ_α, а целыми функциями

$$\mathcal{G}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_\alpha} g(x)\varphi^-(x, \lambda^2)\, dx,$$

где $g \in \mathfrak{L}^{(2)}[0, x_\alpha)$, — все нечетные целые функции из Λ_α. Отсюда, собственно, и получается формула (42).

3. Дальнейшее развитие спектральной теории струны с неотрицательными массами.

3.1 *Кратность спектра.* Рассматривается струна $S((a, b), M)$ с двумя сингулярными концами. Как в п. 1. 5, L_0 — диференциальный оператор струны. Установлено, что если он не самосопряжен, т. е. когда не выполняется хотя бы одно из условий

$$\int_a^{k-0} (x - k)^2 dM(x) = \infty, \qquad \int_{k-0}^{b} (x - k)^2 dM(x) = \infty, \tag{43}$$

где k — какая-нибудь фиксированная точка из (a, b), у него имеются самосопряженные расширения с простым спектром. Если же его индекс дефекта $(1, 1)$, т. е. не выполняется только одно условие (43), то любое его самосопряженное расширение имеет простой спектр.

Наиболее интересна следующая теорема, касающаяся случая, когда L_0 — самосопряженный оператор (выполняются оба условия (43)). Введем дополнительные обозначения. Пусть c — точка (для простоты) непрерывности функции M. Рассмотрим две струны типа S_1: $S_1((a, c], M)$ и $S_1([c, b), M)$. Их спектральные функции τ_l и τ_r по определению — это единственные спектральные функции граничных задач

$$l_{M,(a,c]}[y] - \lambda y = 0, \quad y(c) = 1, \quad y^+(c) = 0,$$

$$l_{M,[c,b)}[y] - \lambda y = 0, \quad y(c) = 1, \quad y^-(c) = 0,$$

соответственно. Пусть Γ_l и Γ_r — их коэффициенты динамической податливости:

$$\Gamma_l(z) = \gamma_l + \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau_l(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \Gamma_r(z) = \gamma_r + \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau_r(\lambda)}{\lambda - z},$$

где $\gamma_l\,(\gamma_r)$ — длина наибольшего интервала, свободного от масс с правым (левым) концом в точке c. Обозначим через $P_a[\tau_l]$ множество тех точек $\lambda \in \mathbb{R}$, в которых существует конечная симметричная производная $\tau_l^{(\prime)}(\lambda)$, отличная от нуля, а через $P_{a+}[\tau_l]$ множество тех $\lambda \in \mathbb{R}$, в которых существует конечный невещественный предел $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \Gamma_l(\lambda + i\varepsilon)$ ($P_{a+}[\tau_l] \subset P_a[\tau_l]$, $P_a[\tau_l] \setminus P_{a+}[\tau_l]$ имеет лебегову меру нуль). Аналогичные обозначения принимаются для τ_r.

Теорема 10 (И. С. Кац [20, 21]). *Если оператор L_0 самосопряжен, то он имеет кратный спектр в том и только в том случае, когда множество* $K_+ :=$

$:= P_{a+}[\tau_l] \cap P_{a+}[\tau_r]$ (*множество* $K := P_a[\tau_l] \cap P_a[\tau_r]$) *имеет положительную лебегову меру. В этом случае множество* K_+ *является максимальной с точностью до множеств нулевой спектральной меры однородной частью кратности 2 спектра оператора* L_0. *На множестве* K_+ *спектр оператора* L_0 *абсолютно непрерывен и, более того, лебегов, т. е. любое множество* $A \subset K_+$ *имеет нулевую спектральную меру в том и только в том случае, когда равна нулю его лебегова мера.*

Таким образом, *кратная часть спектра* оператора L_0 (если он самосопряжен) *не может иметь сингулярной составляющей.*

Заметим еще, что в случае, когда оператор L_0 не самосопряжен, или когда он самосопряжен и имеет простой спектр, существует такое lB-семейство $\mathcal{G}$, что задача (7) имеет спектральную функцию.

Все изложенное здесь справедливо и для оператора Штурма–Лиувилля и для операторов, порождаемых в $\mathfrak{L}_M^{(2)}(I)$ введенной И. С. Кацем в [14] дифференциальной операцией

$$-\frac{d}{dM(x)}\left(y^-(x) - \int_{c-0}^{x-0} y(s)\,dQ(s)\right).$$

3.2. *Густота спектра.* Спектром струны $S(\langle a, b\rangle, M)$ будем называть спектр мягкого неотрицательного самосопряженного расширения оператора L_0 или самого оператора L_0, если он самосопряжен. Заметим, что у струны $S([0, b\rangle, M)$ с регулярным левым концом спектром является в случае сингулярности правого конца спектр главной спектральной функции струны $S_1([0, b), M)$, а в случае регулярности — спектр главной спектральной функции струны $S_1([0, +\infty\rangle, \check{M})$, полученной из $S_1([0, b\rangle, M)$ присоединением к ней справа бесконечного интервала (если $b < +\infty$), свободного от массы. Из теоремы 6 М. Г. Крейна следует, что любое замкнутое подмножество интервала $[0, +\infty)$ может служить спектром струны. Возник вопрос о существующих связях между расположением спектра и поведением функции M. Некоторые ответы на этот вопрос для струн $S([0, b\rangle, M)$ дают свойства 4^0 и 5^0 из п. 2.7.

Струну $S(\langle a, b\rangle, M)$ относим к классу $\mathfrak{S}_\alpha$, если ее спектр состоит из чисел $(0 \le)\ \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ и сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j)^{-\alpha}$. Из упомянутого свойства 5^0 следует, что $S(\langle a, b\rangle, M) \in \mathfrak{S}_1$ в том и только в том случае, когда каждый ее конец — это конец-вход или конец-выход.

У регулярной струны $S([a, b], M)$ спектр всегда дискретен и, как показал М. Г. Крейн (см. [46, 50, 6]),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{M'(x)}\, dx \ (< \infty). \tag{44}$$

Поэтому для регулярной струны вопрос о принадлежности классу $\mathfrak{S}_\alpha$ представляет интерес только при $\alpha \le 1/2$, да и то лишь, когда $M'(x) = 0$ п. в. на $[a, b]$. Если же струна $S(\langle a, b\rangle, M)$ сингулярна и $M'(x) > 0$ на множестве положительной меры, то интерес представляют лишь $\alpha > 1/2$.

В работе [17] И. С. Каца были приведены условия, достаточные для принадлежности струны S классу $\mathfrak{S}_\alpha$ с $\lambda \in (0, 1)$. Этим, пожалуй, впервые был затронут вопрос о росте λ_n в случае, когда $M'(x) = 0$ п. в. В результате улучшения этих результатов сначала в [28], а затем в [30, 32] получена следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть* $S(\langle a, b\rangle, M) \in \mathfrak{S}_1$. *Пусть* $r \mapsto \chi(r)$ — *какая-нибудь неубывающая на* $[0, +\infty)$ *выпуклая вверх функция, такая, что* $\chi(+0) = \chi(0) = 0$. *Тогда*

$$\left(\sum_{\lambda_j \neq 0} \chi\left(\lambda_j^{-1}\right) < \infty\right) \Leftrightarrow \left(\int_a^b dM(s) \int_0^{x_s(1)} \chi^+(x(M(s+x) - M(s-x)))dx < \infty\right),$$

где

$$x_s(1) = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x(M(s+x) - M(s-x)) < 1, \quad s - x > a, \quad s + x < b\}.$$

Результат (44) был обобщен в работе [1] М. С. Бирмана и В. В. Борзова на сингулярные струны $S([0, +\infty), M)$. Оказалось, что (44) справедливо, если существует убывающая на $[0, +\infty)$ функция p такая, что $p(x) > 0$ $\forall x \in [0, +\infty)$,

$$\int_0^{+\infty} p(x)dx < \infty, \quad \int_0^{+\infty} (p(x))^{-1} dM(x) < \infty.$$

Этот результат был впервые сформулирован в работе [68] Маккина и Рея, но приведенное там доказательство содержало ошибку. В монографии [7] Дима и Маккина дано уже безупречное доказательство, отличное от данного в [1].

В работе [71] Уно и Хонг, появившейся через несколько месяцев после [17], доказано, что для собственных чисел λ_n струны $S([0, 1], M)$, у которой M — канторова сингулярная функция („канторова лестница"), выполняются неравенства $C_1 \leq n\,\lambda_n^{-\gamma} \leq C_2$, где C_1, C_2 — некоторые положительные константы, а $\gamma = \log_6 2$.

В работе В. В. Борзова [2] доказано, что в случае, когда $b - a < \infty$, а функция M ограничена и является постоянной на интервалах $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ (нумерация в порядке убывания длин: $|\Delta_1| \geq |\Delta_1| \geq \ldots$), сумма длин которых равна $b - a$, из асимптотического равенства $|\Delta_n| = O(n^{-\delta})$, $n \to \infty$ следует, что $\lambda_n \geq C n^{1+\delta}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где C — положительная константа (результат допускает обобщения). Из этого и теоремы 11 вытекает ряд предложений о локальных свойствах сингулярных функций ограниченного изменения с такими интервалами постоянства.

И. С. Кацем в работе [28] приведена теорема, оценивающая сверху и снизу $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\lambda_n^{-\gamma}$ с $\gamma \in (0, 1/2)$ в зависимости от поведения при $h \downarrow 0$ отношений

$$\frac{M(s+h) - M(s+0)}{h^\beta}, \quad \frac{M(s+0) - M(s-h)}{h^\beta},$$

где $\beta = \gamma/(1-\gamma)$, во всех точках s, принадлежащих носителю M-меры.

3. 3. *Рост спектральных функций.* Приведем два результата И. С. Каца, касающиеся роста при $\lambda \to +\infty$ спектральной функции струны $S_1([0, b\rangle, M)$. Напомним, что М. Г. Крейном было установлено, что для любой спектральной функции τ струны $S_1([0, b\rangle, M)$ сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} \lambda^{-\alpha} d\tau(\lambda) \tag{45}$$

при $\alpha = 1$, а при $\alpha = 0$ он сходится в том и только в том случае, когда $M(+0) > M(0)$.

Теорема 12 [31]. *Пусть τ — какая-нибудь спектральная функция струны $S_1([0, b\rangle, M)$ с тяжелым левым концом и $M(0) = 0$. Пусть функция ξ не убывает на $[k, +\infty)$, где $k > 0$, и $\xi(k) > 0$. Тогда для любого фиксированного $l \in (0, b)$ такого, что $lM(l) < k^{-1}$*

$$\left(\int_k^{+\infty} \xi(\lambda)\lambda^{-2}\tau(\lambda)d\lambda < \infty\right) \Leftrightarrow \left(\int_0^l \xi\left(\frac{1}{xM(x)}\right)dx < \infty\right).$$

Из этой теоремы получаются, в частности, условия, необходимые и достаточные для сходимости интеграла (45) при $\alpha \in (0, 1)$.

Теорема 13 [26, 27]. *При условиях теоремы 12, если*

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{-\alpha} M(x) = A,$$

где A и α — константы, $0 < A \le +\infty$, $\alpha \in (0, +\infty)$, то

$$\tau(\lambda) = A^{\frac{-1}{\alpha+1}} \mathrm{B}(\alpha)\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + o\left(\lambda^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right), \quad \lambda \to +\infty,$$

где

$$\mathrm{B}(\beta) = \left(\frac{\beta}{(\beta+1)^2}\right)^{\beta/(\beta+1)} \Gamma^{-2}\left(\frac{2\beta+1}{\beta+1}\right).$$

Из теоремы, в частности, вытекает, что асимптотическое равенство (26), которое было установлено В. А. Марченко в [67] для спектральных функций граничной задачи

$$-y'' + q(x)y - \lambda y = 0, \quad 0 \le x < b, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = h, \ h \in \mathbb{R},$$

выполняется, когда M имеет в точке $x = 0$ правую производную, равную единице, что возможно даже в случае, когда M — функция чистых скачков.

Теорему 13 обобщил и полностью обратил Касахара в [11]*. Он использовал это в теории одномерных квазидиффузионных процессов (см. также [12, 13]).

3. 4. *Струны класса $\mathfrak{M}_s$ с граничным условием в конце-входе (в частности, сингулярном).* К классу $\mathfrak{M}$ относим не убывающую на интервале $I = (-\infty, b)$ с $b \le +\infty$ или $I = (-\infty, b]$ с $b < +\infty$ функцию M такую, что $M \in \mathfrak{L}^{(1)}(-\infty, c)$, где $c < b$. Струну $S(I, M)$, имеющую функцией распределения масс функцию $M \in \mathfrak{M}$, относим к классу $\mathfrak{M}_s$. Спектральной функцией струны $S(I, M) \in \mathfrak{M}_s$ называем СФ граничной задачи

$$l_{MI}[y] - \lambda y = 0, \qquad \lim_{x \downarrow -\infty} y(x) = 1. \tag{46}$$

Существование СФ такой струны анонсировалось в [14] и доказано в [23]. Заметим, что любая струна S_1 является по существу струной из $\mathfrak{M}_s$. Таким образом, спектральная теория струн класса $\mathfrak{M}_s$, развитая в работах [22, 24],— это некоторое обобщение спектральной теории струн S_1. Следующая теорема И. С. Каца дает описание множества спектральных функций струны $S((-\infty, b], M) \in \mathfrak{M}_s$ с тяжелым правым концом. В ней $\Phi(\cdot, z]$ — решение (единственное) граничной задачи (46), а $\Phi(\cdot, z)$ — ее непродленная часть.

Теорема 14. *При указанных условиях не убывающая на $(-\infty, +\infty)$ функция τ является спектральной функцией струны $S((-\infty, b], M) \in \mathfrak{M}_s$ в том и только в том случае, когда она совпадает с функцией τ_h, определяемой равенствами*

---

* И. С. Кац в [27] обратил ее лишь частично.

$$\Omega_h(z) = \frac{1}{(\Phi(b,z))^2 + (\Phi^+(b,z))^2}\,\frac{\Phi(b,z)\,h(z) - \Phi^+(b,z)}{\Phi^+(b,z)\,h(z) + \Phi(b,z)}, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

$$\tau_h(\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^{\lambda} \operatorname{Im}\Omega_h(\xi + i\varepsilon)\,d\xi \quad \forall\lambda \in (-\infty, +\infty)$$

с $h \in (\tilde{R})$ *в случае, когда* $M(b) - M(b-0) = 0$, *и с* $h \in ((\tilde{R})\setminus(R_0))$ *в случае, когда* $M(b) - M(b-0) > 0$. СФ τ_n *ортогональна в том и только в том случае, когда* h *— вещественная константа, в частности бесконечная. СФ* τ_h *имеет неотрицательный спектр в том и только в том случае, когда* $h \in (\tilde{S})$.

Трудность получения приведенного описания заключалась в том, что в отличие от описания множества СФ регулярной струны S_1 (теорема 1) приходится оперировать только одним решением Φ уравнения струны.

Как оказалось $\Phi(b,z) = D(z)$, $\Phi^+(b,z) = \mathcal{E}(z)$, где

$$D(z) = \prod_j\left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right), \quad \mathcal{E}(z) = -Mz\prod_j\left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right), \tag{47}$$

а $M > 0$, $0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3 < \ldots$. Более того, любая пара функций $D(z)$, $\mathcal{E}(z)$, представимых в виде (47) при указанных условиях, может служить в качестве $\Phi(b,z)$ и $\Phi^+(b,z)$ для некоторой струны $S((-\infty, b], M) \in \mathfrak{M}_s$. Это позволило получить теорему 2 из [22], дающую описание множества $T_{\mathfrak{M}}$ всех функций τ, которые могут служить СФ струн из $\mathfrak{M}_s$.

Из этой теоремы вытекают неожиданные следствия. 1. Каково бы ни было $\alpha < 1$, существует в $T_{\mathfrak{M}}$ непрерывно дифференцируемая функция τ такая, что $\tau'(\lambda)\,e^{-\lambda^{\alpha}} \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$. 2. Какова бы ни была не убывающая на $[1, +\infty)$ функция ρ, в $T_{\mathfrak{M}}$ существует функция τ такая, что $\tau(\lambda) > \rho(\lambda)$ $\forall\lambda \in [1, +\infty)$.

Получен ряд теорем, связывающих рост спектральных функций τ струны $S \in \mathfrak{M}_s$ с поведением ее функции распределения масс M в правой окрестности точки $-\infty$. Например (следствие теоремы 1 из [22]), функция τ мажорируется полиномом в том и только в том случае, когда $M(x) = o(|x|^{-1-\varepsilon})$, $x \downarrow -\infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Найдены некоторые достаточные условия того, что $\ln\tau(\lambda) = o(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$. Например, для этого достаточно, чтобы $|x|\ln|x|M(x) = o(1)$, $x \downarrow -\infty$. Получен ряд результатов по обратной задаче. Например, установлено (см. [24], теорема 1), что любая нормированная условиями (8) неубывающая функция τ, не имеющая точек роста на $(-\infty, 0)$, а на $[0, +\infty)$ мажорируемая полиномом, принадлежит $T_{\mathfrak{M}}$ и, более того, существует единственная с точностью до естественной неоднозначности струна из $\mathfrak{M}_s$, для которой τ служит спектральной функцией. Теория струн класса $\mathfrak{M}_s$ была использована в работе [38] Ш. Котани. Он дал другое описание множества $T_{\mathfrak{M}}$, воспользовавшись пространствами Крейна–де Бранжа. Однако существенные результаты этой работы являлись повторением ряда результатов из [22] и [24], на что, собственно, и указал Ш. Котани в предисловии к [38].

В заключение отметим, что Дим и Маккин в [7] решали задачу интерполяции стационарных гауссовых случайных процессов, используя струны, спектральные функции которых имеют достаточно быстрый рост. Вот тогда и понадобились струны класса $\mathfrak{M}_s$, названного новым классом струн ([7], § 6.12, 6.13).

1. *Бирман М. С., Борзов В. В.* Об асимптотике дискретного спектра некоторых сингулярных дифференциальных операторов // Пробл. мат. физики. – 1971. – Вып. 5. – С. 24 – 38.
2. *Борзов В. В.* О количественных характеристиках сингулярных мер // Там же. – 1970. – Вып. 4. – С. 42 – 47.
3. *De- Branges L.* Hilbert spaces of entire functions. – London: Prentice-Hall, Inc., 1968. – 326 p.
4. *Watanabe S.* On time inversion of one-dimensional diffusion processes // Z. Warscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1975. – **31**. – S. 115 – 124.
5. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М., Л.: ГТТИ, 1950. – 359 с.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967. – 508 с.
7. *Dym H., McKean H. P.* Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem. – New York: Acad. press, 1976. – 333 p.
8. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 859 с.
9. *Ито К.* Вероятностные процессы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – Вып. 2. – 133 с.
10. *Ито К., Маккин Г. П.* Диффузионные процессы и их траектории. – М.: Мир, 1968. – 394 с.
11. *Kasahara Y.* Spectral theory of generalized second order differential operators and its applications to Markov processes // Jap. J. math. – 1975. – **1**, № 1. – P. 67 – 84.
12. *Kasahara Y.* Limit theorems of occupation times for Markov processes // Publ. RIMS, Kyoto Univ. – 1977. – **12**. – P. 801 – 818.
13. *Kasahara Y., Kotani S., Watanabe H.* On the Green functions of 1-dimensional diffusion processes // Ibid. – 1980. – **16**. – P. 175 – 188.
14. *Кац И. С.* О существовании спектральных функций сингулярных дифференциальных систем второго порядка // Докл. АН СССР. – 1956. – **106**, № 1. – С. 15 – 18.
15. *Кац И. С.* О поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка // Там же. – № 2. – С. 183 – 186.
16. *Кац И. С.* Некоторые общие теоремы о поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка // Там же. – 1958. – **122**, № 6. – С. 974 – 977.
17. *Кац И. С.* О густоте спектра струны // Там же. – 1959. – **126**, № 6. – С. 1180 – 1182.
18. *Кац И. С.* О роде спектра сингулярной струны // Изв. вузов. Математика. – 1962. – № 1(26). – С. 57 – 64.
19. *Кац И. С.* Две общие теоремы об асимптотическом поведении спектральных функций дифференциальных систем второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1962. – **26**, № 1. – С. 53 – 78.
20. *Кац И. С.* О кратности спектра дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 3. – С. 510 – 513.
21. *Кац И. С.* Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – **27**, № 5. – С. 1081 – 1112.
22. *Кац И. С.* Поведение спектральных функций дифференциальных систем второго порядка с граничным условием в сингулярном конце // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 1. – С. 34 – 37.
23. *Кац И. С.* Существование спектральных функций обобщенных дифференциальных систем второго порядка с граничными условиями в сингулярном конце // Мат. сб. – 1965. – **68** **(110)**, № 2. – С. 174 – 227.
24. *Кац И. С.* Некоторые случаи единственности решения обратной задачи для струн с граничным условием в сингулярном конце // Докл. АН СССР. – 1965. – **164**, № 5. – С. 975 – 978.
25. *Кац И. С.* Интегральные характеристики роста спектральных функций обобщенных граничных задач второго порядка с граничными условиями в регулярном конце // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 1. – С. 175 – 205.
26. *Кац И. С.* Степенная асимптотика спектральных функций обобщенных граничных задач второго порядка // Докл. АН СССР. – 1972. – **203**, № 4. – С. 752 – 755.
27. *Кац И. С.* Обобщение асимптотической формулы В. А. Марченко для спектральных функций граничной задачи второго порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 2. – С. 422 – 436.
28. *Кац И. С.* Густота спектра струны // Докл. АН СССР. – 1973. – **221**, № 3. – С. 16 – 19.
29. *Кац И. С.* Описание множества спектральных функций регулярной струны, несущей сосредоточенную массу на конце, свободном от граничных условий // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 7(146). – С. 27 – 33.
30. *Кац И. С.* Некоторые общие теоремы о густоте спектра струны // Докл. АН СССР. – 1978. – **238**, № 4. – С. 785 – 788.
31. *Кац И. С.* Теорема об интегральных оценках роста спектральных функций струны // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 296 – 302.
32. *Кац И. С.* Интегральные оценки распределения спектра струны // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, № 2. – С. 62 – 74.
33. *Кац И. С.* Густота спектра сингулярной струны // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 3. – С. 23 – 30.
34. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Критерий дискретности спектра сингулярной струны // Там же. – 1958. – № 2(3). – С. 136 – 153.
35. *Кац И. С., Крейн М. Г.* *R*-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя // Доп. 1 к кн. Ф. Аткинсона „Дискретные и непрерывные граничные задачи". – М.: Мир, 1968. – 749 с.
36. *Кац И. С., Крейн М. Г.* О спектральных функциях струны // Доп. 2 к той же книге (см. п. 35).
37. *Klotz L. P., Langer H.* Generalized resolvents and spectral functions of a matrix generalization of the Krein – Feller second order derivative // Math. Nachr. – 1981. – **100**. – P. 163 – 186.

38. *Kotani S.* On a generalized Sturm – Liouville operator with a singular boundary // J. Math. Kyoto Univ. – 1975. – **15**, № 2. – P. 423 – 454.
39. *Kotani S., Watanabe S.* Krein's spectral theory of strings and generalized diffusion processes // Lect. Notes Math. – 1982. – **923**. – P. 235 – 259.
40. *Крейн М. Г.* О представлении функций интегралами Фурье – Стилтьеса // Учен. зап. Куйбышев. пед. ин-та. – 1943. – Вып. 7. – С. 123 – 148.
41. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. – 1944. – **45**, № 4. – С. 147 – 150.
42. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Там же. – 1946. – **53**, № 1. – С. 3 – 6.
43. *Крейн М. Г.* К теории целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – **11**. – С. 309 – 326.
44. *Крейн М. Г.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами // Зб. праць Інституту математики АН УРСР. – 1948. – **10**. – С. 83 – 106.
45. *Крейн М. Г.* Решение обратной задачи Штурма – Лиувилля // Докл. АН СССР. – 1951. – **76**, № 1. – С. 21 – 24.
46. *Крейн М. Г.* Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот // Там же. – 1951. – **76**, № 3. – С. 345 – 348.
47. *Крейн М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, вып. 3. – С. 323 – 348.
48. *Крейн М. Г.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма – Лиувилля на интервале $(0, \infty)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1952. – **16**, № 2. – С. 293 – 324.
49. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах для неоднородной струны // Докл. АН СССР. – 1952. – **82**, № 5. – С. 669 – 672.
50. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований Стилтьеса // Там же. – 1952. – **87**, № 6. – С. 881 – 884.
51. *Крейн М. Г.* О некоторых новых задачах теории колебаний штурмовых систем // Прикл. математика и механика. – 1952. – **16**, вып. 5. – С. 555 – 568.
52. *Крейн М. Г.* О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка // Докл. АН СССР. – 1953. – **88**, № 3. – С. 405 – 408.
53. *Крейн М. Г.* Аналог неравенства Чебышева – Маркова в одномерной краевой задаче // Там же. – **89**, № 1. – С. 5 – 8.
54. *Крейн М. Г.* О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Там же. – **93**, № 4. – С. 617 – 620.
55. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости // Там же. – № 5. – С. 767 – 770.
56. *Крейн М. Г.* Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов // Там же. – 1954. – **94**, № 1. – С. 13 – 16.
57. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Там же. – **97**, № 6. – С. 987 – 990.
58. *Крейн М. Г.* Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения второго порядка // Там же. – **97**, № 4. – С. 21 – 24.
59. *Крейн М. Г.* Об определении потенциала частицы по ее S-функции // Там же. – 1955. – **105**, № 3. – С. 433 – 436.
60. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности // Там же. – № 4. – С. 637 – 640.
61. *Крейн М. Г.* К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем // Там же. – 1956. – **111**, № 6. – С. 1167 – 1170.
62. *Крейн М. Г.* Неравенства Чебышева – Маркова в теории спектральных функций струны // Мат. исследования. – 1970. – **5**, № 1. – С. 77 – 101.
63. *Küchler U.* Some asymptotic properties of the transition densities of one-dimensional quasidiffusions // Publ. RIMS Kyoto Univ. – 1980. – **16**, № 1. – P. 245 – 268.
64. *Langer H.* Zur Spectraltheorie verallgemeinerter gewönnlicher Differenzialoperatoren zweiter Ordung mit einer nichtmonotonen Gewichtfunktion // University of Jyväskylä department of math., report 14, 1972. – 58 p.
65. *Langer H., Partzsch L., Schütze D.* Über verallgemeinerte gwönliche Differentialoperatoren mit nichtlokalen Randbedingungen und die von ihnen erzeugten Markov – Processe // Publ. RIMS Kyoto Univ. – 1972. – **7**, № 3. – P. 660 – 702.
66. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. АН СССР, Сер. мат. – 1952. – **16**. – С. 325 – 352.
67. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1952. – **1**. – С. 381 – 422.
68. *McKean H. P., Ray D. B.* Spectral distribution of a differential operator // Duke Math. J. – 1962. – **29**. – P. 281 – 292.
69. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
70. *Tomisaki M.* On the asymptotic behaviors of transition probability densities of one-dimensional diffusion processes // Publ. RIMS Kyoto Univ. – 1977. – **12**. – P. 819 – 834.
71. *Uno T., Hong I.* Some consideration of eigenvalues for the equation $d^2u / dx^2 + \lambda\rho(x)\, u = 0$ // Jap. J. Math. – 1959. – **29**. – P. 152 – 164.
72. *Feller W.* On second order differential operators // Ann. Math. – 1955. – **61**. – P. 90 – 105.

Получено 17.06.93