УДК 517.91/93;517.958

И. А. Луковский, А. Н. Тимоха

О самосопряженности одного интегро-дифференциального оператора

Доказана самосопряженность интегро-дифференциального оператора, возникающего в теории устойчивости капиллярно-звуковых равновесных форм.

Доведена самоспряженість інтегро-диференціального оператора, який виникає в теорії стійкості капілярно-звукових форм рівноваги.

При исследовании устойчивости капиллярно-звуковых форм равновесия ограниченного объема жидкости возникает необходимость в анализе следующей задачи на собственные значения [1]:

$$AH = \lambda H \text{ на } \Sigma_0; \ BH = 0 \text{ на } \partial\Sigma_0; \ \int H dy dz = 0, \tag{1}$$

где

$$A = A_1 + A_2 L,$$

$$A_1 H = -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla H}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} + \frac{\nabla H_0 (\nabla H, \nabla H_0)}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{3/2}} + bH + \right.$$

$$+ (k^2 \Phi_0 \Phi_{0x} H - (\nabla \Phi_0, \nabla \Phi_{0x}) H)/(2\mu),$$

$$A_2 H = (k^2 \Phi_0 \Phi - (\nabla \Phi_0, \nabla \Phi))/(2\mu),$$

$$BH = \frac{\partial H}{\partial e} + \cos\alpha \frac{(\nabla H_0, \nabla H)}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}},$$

© И. А. ЛУКОВСКИЙ, А. Н. ТИМОХА, 1990

$$\frac{\partial H}{\partial e} = \frac{H_y W_y + H_z W_z}{|\nabla W|},$$

а L $(\Phi = LH)$ — линейный интегральный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $H(y, z)$ решение $\Phi(x, y, z)$ следующей краевой задачи:

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = 0 \text{ в } Q_0;\ \partial\Phi/\partial n = 0 \text{ на } S \cup S_0,$$

$$\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}\,\partial\Phi/\partial n = \Phi_{0xx}H - \Phi_{0y}H_y - \Phi_{0z}H_z - \tag{2}$$

$$-(\Phi_{0xy}H_{0y} + \Phi_{0xz}H_{0z}) \text{ на } \Sigma_0.$$

Здесь Σ_0 — поверхность, определяемая уравнением $x = H_0(y, z), Q_0 = \{(x, y, z): W(y, z) \leqslant 0,\ H_0(y, z) \leqslant x \leqslant h_1\}$ — область в R^3, S_0 — поверхность $x = h_1$, S — боковые стенки цилиндра Q_0, H_0 и Φ_0 — решения нелинейной краевой задачи (задачи о капиллярно-звуковой равновесной форме):

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla H_0}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}}\right) + bH_0 + \frac{1}{4\mu}\left(k^2(\Phi_0)^2 - (\nabla\Phi_0)^2\right) = \text{const на } \Sigma_0,$$

$$-\partial H_0/\partial e = \cos\alpha\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2} \text{ на } \partial\Sigma_0;\quad \int H_0\,dydz = 0, \tag{3}$$

$$\Delta\Phi_0 + k^2\Phi_0 = 0 \text{ в } Q_0;\quad \partial\Phi_0/\partial n = 0 \text{ на } S \cup \Sigma_0,$$

$$\partial\Phi_0/\partial x = \frac{\mu_0}{k}V(y, z) \text{ на } S_0. \tag{4}$$

Докажем самосопряженность интегро-дифференциального оператора A.

Лемма. *Пусть* (H_0, Φ_0) — *решение задачи* (3), (4) *причем* $H_0 \in C^1(S_0)$, $\Phi_0 \in W_2^2(Q_0)$, *а пары* (H_i, Φ_i), $i = 1, 2$, *определены из задачи* (2) $(H_i \in C^1(S_0)$, $\int H_i\,dydz = 0$, $\|H_i\|_{C^1} = 1)$. *Тогда*

$$\int_{\Sigma_0}\left(k^2\Phi_1\Phi_0 - (\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_0)\right)H_2\,dydz = \int_{Q_0}\left(k^2\Phi_1\Phi_2 - (\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)\right)dQ. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $Q_\varepsilon = \{(x, y, z): W \leqslant 0,\ H_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant h_1\}$, $\psi \in W_2^2(Q_\varepsilon)$, $\psi_i \in W_2^1(Q_\varepsilon)$, а также $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ в Q_ε, $\partial\psi/\partial n = 0$ на S, $\partial\psi/\partial x = \mu_0 V/k$ на S_0; $\Delta\psi_i + k^2\psi_i = 0$ в Q_ε, $\partial\psi_i/\partial n = 0$ на $S_0 \cup S$.

Выберем $|\alpha| < \varepsilon$, $|\beta| < \varepsilon$ и рассмотрим функцию

$$J(\alpha, \beta) = \int_{S_0}\left\{\int_{(H_0 + \alpha H_2)}^{h_1}\left(k^2\psi_1(\psi + \beta\psi_2) - (\nabla\psi_1, \nabla(\psi + \beta\psi_2)\right)dx\right\}dydz \equiv$$

$$\equiv \int_{S_0}\frac{\partial(\psi + \beta\psi_2)}{\partial n}\sqrt{1 + (\nabla H_0 + \nabla\alpha H_2)^2}\,\psi_1|_{x = H_0 + \alpha H_2}\,dydz + \int_{S_0}\frac{\mu_0}{k}V\psi_1\,dydz.$$

Дифференцируя правую и левую части тождества и приравнивая $\alpha = \beta = 0$, получаем

$$I = -\int_{S_0}\left(k^2\psi_1\psi - (\nabla\psi_1, \nabla\psi)\right)|_{x = H_0}H_2\,dydz + \int_{Q_0}\left(k^2\psi_1\psi_2 - (\nabla\psi_1, \nabla\psi_2)\right)dQ \equiv$$

$$\equiv \int_{S_0}\left[\left\{\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2} - \psi_{xx}H_2 + \psi_y H_{2y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \psi_z H_{2z} + (\psi_{xy}H_{0y} + \psi_{xz}H_{0z})H_2\right\}\psi_1\right]\Bigg|_{x = H_0}dydz + \int_{\Sigma_0}\frac{\partial\psi}{\partial n}\psi_{1x}H_2\,ds.$$

$\forall\,\varepsilon > 0$ рассмотрим $\psi \in W_2^2(Q_\varepsilon)$ и последовательно устремим сначала $\|\psi - \Phi_0\|_{W_2^2(Q_0)} \to 0$, а затем $\|\psi_i - \Phi_i\|_{W_2^1(Q_0)} \to 0$. Левая часть слабо непрерывна при $\psi \to \Phi_0$, $\psi_i \to \Phi_i$, следовательно, слабо непрерывна правая часть. Если (H_i, Φ_i) — пары, определяемые из (2), то $I \to 0$, откуда следует (5). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть H_0 и Φ_0 — решения задачи* (3), (4), *причем* $H_0 \in C^1(S_0)$, *а* $\Phi_0 \in W_2^2(Q_0)$. *Тогда оператор A — самосопряженный.*

Доказательство. Рассмотрим

$$(AH_1, H) = \int\limits_{\Sigma_0} \left[\frac{(\nabla H_1, \nabla H_2)}{\sqrt{1 + (\nabla H_0)^2}} + \frac{(\nabla H_0, \nabla H_1)(\nabla H_0, \nabla H_2)}{(1 + (\nabla H_0)^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\left. + bH_1H_2 + \frac{1}{2\mu} (k^2 \Phi_0 \Phi_{0x} H_1 H_2 - (\nabla \Phi_0, \nabla \Phi_{0x}) H_1 H_2) \right] dydz + \frac{1}{2\mu} \times$$

$$\times \int\limits_{\Sigma_0} (k^2 \Phi_0 \Phi_1 - (\nabla \Phi_0, \nabla \Phi_1)) H_2 dydz.$$

Ко второму слагаемому можно применить тождество (5), откуда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие. *Все собственные значения задачи* (1)—(4) *вещественны, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.*

1. *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* К задаче управления свободной поверхностью ограниченного объема жидкости при помощи звука // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989.— № 7.— С. 52—55.
2. *Гидромеханика* невесомости / Под ред. А. Д. Мышкиса.— М. : Наука, 1978.— 504 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 07.12.89