УДК 517.432

А. В. Кужель, д-р физ.-мат. наук (Симфероп. ун-т)

ЭВОЛЮЦИЯ ПОНЯТИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

A brief survey of development and applications of the concept of a characteristic function of different classes of linear operators is presented.

Подано короткий огляд розвитку та застосувань поняття характеристичної функції різних класів лінійних операторів.

Введение. В последние десятилетия при изучении несамосопряженных или неунитарных операторов существенную роль играет понятие характеристической функции линейного оператора. Характеристическая функция (х. ф.) — это математический объект (матрица или оператор), который ставится в соответствие тому или иному классу несамосопряженных (или неунитарных) операторов и характеризует спектральные свойства операторов из этого класса. Если при этом характеристическая функция оказывается более простым объектом, чем соответствующий оператор, то такой путь значительно упрощает задачу исследования рассматриваемого оператора.

Характеристические функции существенно используются при построении модельных операторов, при изучении различных классов линейных операторов методом пространств граничных значений, в теории дилатаций, в теории рассеяния, в теории нестационарных вероятностных процессов и др. При этом понятие х. ф. даже у одного и того же автора со временем видоизменялось, эволюционировало в соответствии как с теоретическими, так и практическими запросами. В настоящее время как в журнальной, так и в монографической литературе накопилось много фактов, относящихся к развитию и применению х. ф. Настоящая статья содержит краткий обзор основных направлений развития и применения понятия х. ф.

Автор выражает признательность проф. А. В. Штраусу за полезные обсуждения и дополнения.

1. Неунитарные (квазиунитарные) операторы.

1. Впервые понятие х. ф. появилось в работе М. С. Лившица [1] при изучении неунитарных расширений изометрического оператора V с индексом дефекта $(1,1)$. Последнее означает, что $\mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_V$ и $\mathcal{H} \ominus \Delta_V$ — одномерные подпространства в $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, в котором действует оператор V, $\mathfrak{D}_V$ и Δ_V — соответственно область определения и множество значений оператора V).

В указанной работе оператор T_a, действующий в $\mathcal{H}$, называется квазиунитарным расширением оператора V, если $V \subset T_a$ и $T_a g = a g'$, где a — некоторое фиксированное комплексное число, которое называют коэффициентом сжатия, а g и g' — фиксированные орты соответственно из подпространств $\mathfrak{N}_0 = \mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_V$ и $\mathfrak{N}_0' = \mathcal{H} \ominus \Delta_V$.

Оператор $T_a(z) = (T_a - zI)(I - \bar{z} T_a)^{-1}$ является квазиунитарным расширением изометрического оператора $V(z) = (V - zI)(I - \bar{z} V)^{-1}$ ($|z| \neq 1$), причем векторы g_z из $\mathfrak{N}_z = \mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_{V(z)}$ и g'_z из $\mathfrak{N}'_z = \mathcal{H} \ominus \Delta_{V(z)}$ определяются равенствами

$$g_z = (I - zT_a^*)^{-1} g, \quad g'_z = (I - \bar{z} T_a)^{-1} g'. \tag{1}$$

Характеристической функцией квазиунитарного оператора T_a в [1] называется функция $w(z, a)$, определяемая равенством

$$T_a(z) g_z = w(z, a)\, \bar{g}_z, \quad \bar{g}_z = (I - \bar{z} T_a)^{-1} \bar{g}.$$

При этом $\bar{f} = Kf$, где K — „зеркальный" оператор, определяемый равенствами:

1) $K(\alpha f + \beta\varphi) = \bar{\alpha} Kf + \bar{\beta} K\varphi$;

2) $(Kf, Kf) = (f, f)$;

3) $K^2 f = f$.

Устанавливается, что $w(z, a)$ является регулярной функцией, отображающей единичный круг $\mathcal{D}$ в себя, и допускает представление

$$w(z, a) = \frac{a + w(z,0)}{1 + \bar{a}\, w(z,0)} \qquad \left(w(z, a) = -z \frac{(g_z, \bar{g})}{(g_z, g)} \right).$$

Кроме того, в указанной работе устанавливается критерий унитарной эквивалентности для простых частей рассматриваемых операторов и дана характеристика спектра квазиунитарных операторов в терминах х. ф.

2. В дальнейшем М. С. Лившиц в работе [2] обобщил предыдущие результаты на случай квазиунитарных расширений изометрических операторов с индексом дефекта (m, m) $(m < \infty)$. Здесь х. ф. определяются как $m \times m$-матрица $w(T, z) = B^{-1}(z) A(z)$, где $B(z) = g(z) - z\, g'(z)\, \tau^*$, $A(z) = g(z)\, \tau - z\, g'(z)$, $g(z) = \|(g_k(z), g_s)\|$, $g'(z) = \|(g_k(z), g'_s)\|$; $\{g_k(z)\}_{k=1}^m$ — произвольный фиксированный базис дефектного подпространства $\mathfrak{N}_z$; $\{g_k\}_{k=1}^{m}$ и $\{g'_k\}_{k=1}^m$ — ортонормированные базисы соответственно в подпространствах $\mathfrak{N}_0$ и $\mathfrak{N}'_0$.

Матрица $\tau = \|\tau_{ki}\|$ определяется равенствами

$$T g_k = \sum_{j=1}^{m} \tau_{kj}\, g'_j, \quad k = \overline{1, m}. \tag{2}$$

3. В работе М. С. Лившица и В. П. Потапова [3] х. ф., рассмотренная в предыдущем пункте, „нормируется". В результате авторы приходят к понятию нормированной х. ф. при условии, что $\det(E - \tau^* \tau) \neq 0$, где элементы матрицы τ определяются равенствами (2).

Нормированная х. ф. $w_T(z)$ квазиунитарного оператора T определяется равенством

$$w_T(z) = u^* |E - \tau\tau^*|^{1/2} (I - w(z)\, \tau^*)^{-1} (\tau - w(z))\, |E - \tau^*\tau|^{-1/2}\, v^*,$$

где u, v — некоторые унитарные матрицы, $w(z) = -z\, g^{-1}(z)\, g'(z)$ — х. ф. изометрического оператора V $(V \subset T)$, а матрицы $g(z)$ и $g'(z)$ имеют тот же смысл, что и в п. 2.

В [3] авторы выясняют условия, при которых заданная матрица-функция $w(z)$ является характеристической для некоторого квазиунитарного оператора T (обратная задача); устанавливают критерий унитарной эквивалентности простых частей квазиунитарных операторов в терминах х. ф.; формулируют теорему умножения в случае, когда $T = \begin{pmatrix} T_1 & \Gamma \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ и квазиунитарные операторы T_1 и T_2 имеют один и тот же ранг m (т. е. максимальные изометрические операторы, расширениями которых являются указанные операторы, — это изометрические операторы с индексом дефекта (m, m)).

4. Ю. Л. Шмульян в работе [4], отталкиваясь от работы М. С. Лившица и В. П. Потапова [3], ввел понятие нормированной х. ф. $w(T, z)$ неунитарного расширения T изометрического оператора V, дефектные числа которого не предполагаются ни конечными, ни равными.

По определению Ю. Л. Шмульяна при любом f из $\mathfrak{N}_0 = \mathcal{H} \ominus \mathfrak{D}_V$

$$w(T, z)f = |I - TT^*|^{-1/2}(T - zI)(I - zT^*)^{-1}|I - T^*T|^{1/2} f. \tag{3}$$

Или, так как $T|I - T^*T|^{1/2} = |I - TT^*|^{1/2}T$ и $(T - zI)(I - zT^*)^{-1} = T - z(I - TT^*)(I - zT^*)^{-1}$, то (при $f \in \mathfrak{N}_0$)

$$w(T, z)f = Tf - zJ'|I - TT^*|^{1/2}(I - zT^*)^{-1}|I - T^*T|^{1/2} f, \tag{4}$$

где $J' = \operatorname{sign}(I - TT^*)$. Здесь же при определенных условиях формулируется теорема умножения и рассматриваются некоторые общие свойства х. ф.

В дальнейшем В. Т. Поляцкий [5], воспользовавшись определением х. ф. в виде (3), а также результатами М. С. Лившица [6], относящимися к построению модельных операторов ограниченных несамосопряженных операторов, построил модели (треугольные модели) для широкого класса неунитарных операторов.

5. Авторы [7, 8] пришли к понятию х. ф. сжатия T совершенно другим путем — изучая унитарные дилатации оператора T. Так, если T — сжатие, то можем рассмотреть операторы $D_T = (I - T^*T)^{1/2}$ и $D_{T^*} = (I - TT^*)^{1/2}$, а также подпространства $\mathfrak{N}_T = \overline{D_T \mathcal{H}}$ и $\mathfrak{N}_{T^*} = \overline{D_{T^*} \mathcal{H}}$. Тогда х. ф. $\theta_T(z)$ оператора T определяется равенством

$$\theta_T(z) = [-T + zD_{T^*}(I - zT^*)^{-1}D_T]\big|_{\mathfrak{N}_T}. \tag{5}$$

Сравнивая последнее соотношение с (4), видим, что $\theta_T(\lambda)$ является частным случаем х. ф. $w(T, z)$ Ю. Л. Шмульяна (точнее, отличается от $w(T, z)$ лишь знаком). Более подробно о свойствах и применениях х. ф. $\theta_T(z)$ см. [9].

6. В работе А. В. Кужеля [10] х. ф. оператора T определяется несколько иначе. А именно: рассматривается ограниченный обратимый оператор T, для которого $\dim(I - T^*T)\mathcal{H} = r$ $(r < \infty)$. Совокупность $\{g_k\}_{k=1}^s$ называется α-базисом оператора T, если оператор $I - T^*T$ представим в виде $I - T^*T = \sum_{k,\,i=1}^s (\cdot, g_k) J_{ki} g_i$, где матрица $J = \|J_{ki}\|$ эрмитова и унитарная. При некоторых дополнительных условиях на α-базис х. ф. $W(\lambda)$ оператора T определяется равенством $W(z)W(0) = E - \|((I - zT^*)^{-1} g_k, g_i)\| J$, где $W(0)$ — эрмитово неотрицательная матрица. Такое определение х. ф. дало возможность обосновать теорему умножения в более общем виде, чем это сделано в работе М. С. Лившица и В. П. Потапова [3].

7. По аналогии с (4) и (5) А. В. Кужель в работе [11] определил х. ф. $\theta_T(z)$ произвольного ограниченного неунитарного оператора T равенством

$$\theta_T(z) = TJ_T - zQ_{T^*}(I - zT^*)^{-1}Q_T, \tag{6}$$

где $Q_T = |I - T^*T|^{1/2}$, $J_T = \operatorname{sign}(I - T^*T)$.

Определенная таким образом х. ф. удовлетворяет, в частности, следующим условиям:

$$\theta_T^*(z) = \theta_{T^*}(\bar{z}), \quad \theta_T(\bar{z}) J_T \theta_T^*(1/z) = J_{T^*},$$

$$\theta_T^*(0) J_{T^*} \theta_T(z) = J_T - Q_{T^*}(I - zT^*)^{-1} Q_T,$$

$$\theta_T(z) J_T \theta_T^*(0) = J_{T^*} - Q_{T^*}(I - zT^*)^{-1} Q_T.$$

По аналогии с (5) можем рассмотреть сужение $\theta_T(z)$ на $\mathfrak{N}_T$:

$$\theta_T(z) = [TJ_T - z\theta_{T^*}(I - zT^*)^{-1} Q_T]\Big|_{\mathfrak{N}_T}. \tag{7}$$

Если при этом T — сжатие, то $J_T\big|_{\mathfrak{N}_T} = I$ и х. ф. $\theta_T(z)$, определяемая равенством (7), лишь знаком отличается от х. ф., которая определяется равенством (5).

Отметим также, что так как при $x \in \mathfrak{N}_T$ $TJ_T\ x = J_{T^*}T\, x$, то, применяя оператор J_{T^*} к обеим частям равенства (4) и сравнивая полученное равенство с (7), убеждаемся, что х. ф. $w(T, z)$ и $\theta_T(z)$ связаны равенством $J_{T^*} w(T, z) = \theta_T(z)$. Х. ф. $\theta_T(z)$, определяемая равенством (6) (или (7)), использовалась при исследовании различных свойств операторов в работах А. В. Кужеля [12] (теорема о факторизации х. ф.); Ч. Дэвиса и Ч. Фояша [13] (построение и изучение J-унитарной дилатации, а также доказательство теоремы Л. А. Сахновича [14] о подобии — при соответствующих условиях — оператора T унитарному оператору); Д. Кларка [15] (построение абстрактной модели для ограниченного оператора T, не являющегося сжатием); В. Мак-Енниса [16–18] (построение моделей и J-унитарные дилатации); Н. Г. Макарова [19] (задача об устойчивости существенного спектра неунитарных операторов) и др.

8. В случае ограниченного и обратимого в узком смысле $(0 \in \rho(T))$ оператора T В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн в работе [20] определили х. ф. $\theta_{\mathcal{J}}(z)$ узла $\mathcal{J} = (\mathcal{H}, \mathcal{E}; T, R, J)$ равенством

$$\theta_{\mathcal{J}}(z) = J(K^*)^{-1}(J - R^*(I - zT^*)^{-1} R), \tag{8}$$

где J — самосопряженный и унитарный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{E}$; оператор $R \in \mathcal{B}[\mathcal{E}, \mathcal{H}]$ и удовлетворяет условию $I - T^*T = R\ JR^*$; K — ограниченный обратимый оператор, действующий в пространстве $\mathcal{E}$ и являющийся решением операторного уравнения $J - R^*R = K^*JK$ (разрешимость этого уравнения может быть обоснована различными способами).

После некоторых преобразований авторы записывают х. ф. (8) в виде $\theta^*_{\mathcal{J}}(0)\, J\, \theta_{\mathcal{J}}(z) = J - R^*(I - zT^*)^{-1} R$.

В. М. Бродский в [21], опираясь на определение х. ф. в виде (8), показал, что произведению операторных узлов отвечает произведение соответствующих х.ф. (теорема умножения).

В работах В. Н. Полякова [22–24] методом А. В. Штрауса (см. п. 3.3) исследованы ограниченные неунитарные операторы.

В заключение отметим, что х. ф. неунитарных операторов нашла существенное применение не только при исследовании неунитарных операторов, но также и в теории рассеяния, теории прогнозирования и др. (см., например, [25–30] и др.).

2. Ограниченные несамосопряженные операторы. Характеристическая функция ограниченного оператора A с вполне непрерывной мнимой компонентой $\operatorname{Im} A$ определена в работе М. С. Лившица [6] равенством

$$W(\lambda) = I + i\,\operatorname{sign}\Big[\frac{A-A^*}{i}\Big]\sqrt{\Big|\frac{A-A^*}{i}\Big|}\;(A^*-\lambda I)^{-1}\sqrt{\Big|\frac{A-A^*}{i}\Big|}\,.$$

Там же исследованы свойства х. ф., доказана теорема умножения и построена треугольная модель.

Л. А. Сахнович в работах [14, 31, 32], воспользовавшись результатами М. С. Лившица, получил условия подобия для широкого класса несамосопряженных операторов, а также рассмотрел вопрос о приведении несамосопряженных операторов к диагональному виду.

М. С. Бродский [33, 34] предложил более общее определение х. ф. ограниченного оператора A в виде

$$W(\lambda) = I - 2iK^*\,(A-\lambda I)^{-1}\,KJ, \tag{9}$$

где J — самосопряженный и унитарный оператор, действующий в некотором вспомогательном („внешнем") пространстве $\mathcal{E}$; K — ограниченный оператор, действующий из $\mathcal{E}$ в $\mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, в котором действует оператор A) и удовлетворяющий условию $(A-A^*)/2i = KJK^*$. Такое определение х. ф. позволило при меньших ограничениях и значительно проще обосновать теорему умножения, а также рассмотреть ряд общих вопросов теории несамосопряженных операторов (треугольные представления вольтерровых операторов, критерий одноклеточности вольтерровых и диссипативных операторов и др.).

В работах А. Г. Руткаса [35] и И. И. Карпенко [36] определение х. ф. вида (9) перенесено на случай неограниченных операторов с $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_{A^*}$. При этом в работе И. И. Карпенко на рассматриваемый класс операторов перенесен и ряд результатов М. С. Бродского.

3. Неограниченные самосопряженные операторы.

1. Впервые х. ф. неограниченного оператора B определена в работе М. С. Лившица [1] при условии, что B — несамосопряженное расширение симметрического (плотно заданного) оператора A с индексом дефекта (1.1). При таком условии, как показано в рассматриваемой работе, произвольный элемент u из $\mathfrak{D}_B$ при фиксированном невещественном λ однозначно представим в виде $u = \varphi_\lambda + u_\lambda + w_B(\lambda)\,K u_\lambda$, где K — зеркальный оператор, о котором шла речь ранее. Функция $w_B(\lambda)$ и называется х. ф. оператора B. В указанной работе рассматриваются свойства определенной таким образом х. ф. В частности, показано, что она связана с х. ф. $w_T(z)$ соответствующего квазиунитарного оператора $T = (B+iI)(B-iI)^{-1}$ равенством $w_B(\lambda) = e^{i\alpha}\,w_T((\lambda-i)/(\lambda+i))$, где α — некоторая вещественная постоянная.

2. В работах А. В. Кужеля [37, 38] х. ф. определена для квазиэрмитовых расширений эрмитова (не обязательно плотно заданного) оператора H с конечными и равными дефектными числами (K^r-операторы). Если A — K^r-оператор и $-i \in \rho(A)$, то самосопряженный оператор $B = iR_{-i} - iR^*_{-i} - 2R^*_{-i}R_{-i}$ представим в виде

$$Б = \sum_{k,i=1}^{s} (\cdot, g_k)\,J_{ki}\,g_i,\quad J = \|J_{ki}\|;\; J^* = J = J^{-1}$$

Тогда х. ф. $W_A(\lambda)$ оператора A определяется равенством

$$W_A(\lambda) W_A(i) = I + i(\lambda + i)\,\|((A^* - iI)(A^* - \lambda I)^{-1} g_k, g_m)\|\,J, \tag{10}$$

где $W_A(i)$ — эрмитово неотрицательная матрица.

В указанных работах рассмотрены общие свойства таких х. ф., построена треугольная модель для K^r-операторов и исследован спектр таких операторов. Обоснование этих и других результатов (в частности, теорема умножения х. ф.) приведены в диссертации А. В. Кужеля [39].

3. В то же самое время А. В. Штраус [40, 41] следующим образом вводит понятие х. ф. в случае произвольного замкнутого плотно заданного оператора A с непустым множеством регулярных точек $\rho(A)$. В фактор-пространстве $\mathcal{L}_A = \mathfrak{D}_A/G_A$, где $G_A = \{x \in \mathfrak{D}_A \mid (Ax, y) = (x, Ay)\ (\forall\, y \in \mathfrak{D}_A)\}$, вводится индефинитное скалярное произведение $[\tilde{x}, \tilde{y}] = i^{-1}[(Ax, y) - (x, Ay)]$ $(\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \subset \mathcal{L}_A)$, где $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$. Затем равенством $[\Gamma x, \Gamma y] = i^{-1}[(Ax, y) - (x, Ay)]$ определяется „граничный" оператор Γ, отображающий $\mathfrak{D}_A$ на некоторое линейное пространство $\mathcal{L}$, изоморфное пространству $\mathcal{L}_{A'}$.

Аналогично равенством

$$[\Gamma'\varphi, \Gamma'\psi] = \frac{1}{i}[(\varphi, A^*\psi) - (A^*\varphi, \psi)] \tag{11}$$

определяется оператор Γ'. Затем рассматривается оператор $S_\lambda = (A^* - \lambda I)^{-1} \times (A - \lambda I)$, после чего равенством $X(\lambda)\Gamma x = \Gamma' S_\lambda x$ $(x \in \mathfrak{D}_A)$ определяется х. ф. $X(\lambda)$ оператора A.

В указанных работах А. В. Штрауса в терминах х. ф. обосновывается критерий унитарной эквивалентности простых частей несамосопряженных операторов; формулируется и обосновывается теорема умножения х. ф.; устанавливается связь с х. ф. М. С. Лившица и др.

4. В обзоре Э. Р. Цекановского и Ю. Л. Шмульяна [42] приведено принадлежащее первому автору определение х. ф. в терминах оснащенных гильбертовых пространств (подробнее о таких пространствах см., например, работу Ю. М. Березанского, Ю. Ф. Уса и З. Г. Шефтеля [43]). Указанное определение внешне совпадает с определением х. ф. в случае ограниченных операторов (равенство (9)).

5. В работах А. Г. Руткаса [44 – 46] вводится и изучается х. ф. операторного пучка $\lambda A + B$, которая затем используется при исследовании ряда радиофизических систем. Такая х. ф. определяется равенством $w(\lambda) = K - (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} L$, где A, B — заданные операторы, а K, M, N и L — некоторые вспомогательные операторы.

6. До Хонг Тан [47], опираясь на результаты работ А. В. Кужеля [38, 48], ввел понятие х. ф. $\chi(\lambda)$ в случае неограниченного замкнутого плотно заданного оператора A следующим образом: $\chi^*(i) J' \chi(\lambda) = J + i(\lambda + i) Q^*(A^* - iI)(A^* - \lambda I)^{-1} Q$, где операторы Q, J и J' определяются из условий

$$\begin{gathered} B = QJQ^* \quad (B = iR_{-i} - iR_{-i}^* - 2R_{-i}^* R_{-i}), \\ J\tau^{-1} = CJ'C^* \quad (\tau = I - 2Q^*QJ). \end{gathered} \tag{12}$$

В этой же работе установлена связь между определениями х. ф. А. В. Штрауса [40, 41] и автора [37, 38].

7. Г. М. Губреев [49], по аналогии с предыдущим, определил х. ф. $W(\lambda)$

замкнутого плотно заданного оператора A равенством $W(\lambda)JW^*(-i)=J-$ $-i(\lambda-i)Q^*(A+iI)(A-\lambda I)^{-1}Q$, где операторы Q и J определяются равенством (12). Здесь также доказывается теорема умножения и, кроме того, решается обратная задача (построение операторного узла по заданной оператор-функции).

4. Эрмитовы операторы.

1. Первые определения характеристических функций эрмитовых и изометрических операторов принадлежит М. С. Лившицу [1, 2]. Так, в случае изометрического оператора V с индексом дефекта (m, m) $(m<\infty)$ х. ф. этого оператора называется матрица-функция $w_V(z)=B^{-1}(z)A(z)$, где матрицы $B(z)$ и $A(z)$ определяются так же, как и в п. 1.2, при условии, что $\tau=0$. Х. ф. эрмитова оператора A определяется равенством $W_A(\lambda)=\theta\, w_V((\lambda-i)/(\lambda+i))$, где $V=(A-iI)(A+iI)^{-1}$, а $|\theta|=1$.

В указанных работах устанавливается критерий унитарной эквивалентности простых изометрических (эрмитовых) операторов — в виде унитарной эквивалентности соответствующих характеристических функций; а также теорема умножения х. ф. в случае некоторых специальных сцеплений изометрических операторов.

Из конкретных результатов отметим следующий (который в дальнейшем послужил толчком к построению модельных операторов).

Теорема (М. С. Лившиц [1]). *Для того чтобы простой эрмитов оператор A с индексом дефекта* **(1.1)** *был унитарно эквивалентен оператору дифференцирования D, который действует в пространстве $L_2(0,a)$ и определяется (обычным способом) условиями*

$$DF=\frac{1}{i}f'(x)\quad (f(0)=f(a)=0),$$

необходимо и достаточно, чтобы среди квазиэрмитовых расширений оператора A было расширение без спектра.

2. В дальнейшем теория х. ф. эрмитовых операторов получила существенное развитие в работах А. В. Штрауса [50–54].

В окончательном виде определение х. ф. $C(\lambda)$ эрмитова оператора A вводится в работе А. В. Штрауса [53] следующим образом.

При невещественном $\lambda\ (\operatorname{Im}\lambda>0)$ рассмотрим расширение A_λ эрмитова оператора A, определяемое на линеале $\mathfrak{D}_{A_\lambda}=\mathfrak{D}_A\dot{+}\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ равенством $A_\lambda(x_0+x_{\bar\lambda})=$ $=Ax_0+\lambda x_{\bar\lambda}$ $(x_0\in\mathfrak{D}_A,\ x_{\bar\lambda}\in\mathfrak{N}_{\bar\lambda})$, где $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ — дефектное подпространство оператора A.

Тогда х. ф. $C(\lambda)$ оператора A определяется равенством $C(\lambda)=(A_\lambda-$ $-\lambda_0 I)(A_\lambda-\bar\lambda I)^{-1}\big|_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$, где λ_0 — некоторое фиксированное число из верхней полуплоскости. А так как оператор A_λ является диссипативным, т. е.

$$\operatorname{Im}(A_\lambda x, x)\geq 0\quad (\forall\, x\in\mathfrak{D}_{A_\lambda}),$$

то число $\mu=\bar\lambda_0\notin\sigma_p(A_\lambda)$ и, следовательно, для этого оператора справедлив следующий аналог формул фон Неймана (см. А. В. Кужель, Л. И. Руденко [55, 56], а также А. В. Кужель [57]): произвольный элемент $h=x_0+x_{\bar\lambda}$ из $\mathfrak{D}_{A_\lambda}$ представим в виде $h=h_0+h_\mu+\Phi_\lambda h_\mu$ $(h_0\in\mathfrak{D}_A,\ h_\mu\in\mathfrak{N}_\mu)$, где $\Phi\colon\mathfrak{N}_\mu\to\mathfrak{N}_{\bar\mu}$

— некоторый линейный оператор. При этом $A_\lambda h = A\,h_0 + \overline{\mu} h_\mu + \mu \Phi h_\mu$.

Сравнительно простые выкладки показывают, что х. ф. $C(\lambda)$ оператора A лишь знаком отличается от оператора Φ_λ:

$$C(\lambda) = -\Phi_\lambda. \tag{13}$$

А. Н. Кочубей [58], опираясь на результаты А. В. Штрауса, вводит несколько более общее определение х. ф. симметрического (плотно заданного) оператора A. При этом существенно используется понятие пространства граничных значений, возникшее и разработанное в работах Н. А. Талюша [59], А. Н. Кочубея [60 – 62], В. М. Брука [63 – 65].

Х. ф. А. В. Штрауса (или ее обобщение) использовались в работах А. Н. Кочубея [58, 66], В. А. Деркача и М. М. Маламуда [67], В. А. Деркача, М. М. Маламуда и Э. Р. Цекановского [68] при изучении различных классов расширений симметрического (плотно заданного) оператора. В работах С. А. Кужеля [69, 70] и М. М. Маламуда [71] результаты работы А. Н. Кочубея [58] (характеристическая функция, описание спектра расширений и др.) различными методами обобщены на случай неплотно заданных эрмитовых операторов и их несамосопряженных расширений. Интересное конкретное применение х. ф. $C(\lambda)$ получила в работе А. Н. Кочубея [66] при обобщении результатов Р. С. Филлипса [72] об $\mathcal{U}$-инвариантности расширения по Фридрихсу $\mathcal{U}$-инвариантного полуограниченного оператора на случай $\mathcal{U}$-инвариантных самосопряженных расширений произвольного $\mathcal{U}$-инвариантного симметрического оператора. Р. С. Филлипс построил также пример $\mathcal{U}$-инвариантного симметрического оператора с индексом дефекта (1, 1), не имеющего $\mathcal{U}$-инвариантных самосопряженных расширений. В случае таких операторов, как показал А. Н. Кочубей, х. ф. $C(\lambda) \equiv 0$ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$. Если же воспользоваться равенством (13), то можно показать, что в рассматриваемом случае точечный спектр оператора A_λ заполняет всю верхнюю полуплоскость.

В заключение отметим, что предыдущие результаты обобщаются на случай $\mathcal{U}$-инвариантных расширений $\mathcal{U}$-инвариантных эрмитовых (неплотно заданных) операторов (см. А. В. Кужель, Ю. П. Москалев [73]).

3. В работах А. В. Штрауса [41, 50, 51, 54, 74, 75] установлена также связь между теорией х. ф. максимальных диссипативных операторов и теорией обобщенных резольвент, которая состоит в следующем. Пусть A — эрмитов оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение оператора A с выходом в пространство $\tilde{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$, R_λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ — соответствующая обобщенная резольвента оператора A, определяемая равенством $R_\lambda = P(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}|_{\mathcal{H}}$, где P — ортопроектор в $\tilde{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{H}$.

В пространстве $\hat{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}} \ominus \mathcal{H}$ рассмотрим оператор $\hat{R}_{-i} = \hat{P}(\tilde{A} + iI)^{-1}|_{\hat{\mathcal{H}}}$, где $\hat{P} = I - P$. Оператор $\hat{R}_{-i}$ обратим, а оператор $\hat{A} = \hat{R}_{-i}^{-1} - iI$ является замкнутым максимальным диссипативным оператором. Пусть A_2 — симметрическая часть оператора $\hat{A}$, а A_1 — симметрическая часть оператора $\tilde{A}\,|_{\mathcal{H}}$. Без ограничения общности можно считать, что $A_1 = A$. Оператор $\tilde{A}$ является самосопряженным расширением оператора $A_1 \oplus A_2$. Но тогда, в соответствии с формулами фон Неймана, оператору $\tilde{A}$ отвечает некоторый изометрический оператор $V\colon \mathfrak{N}_i^{(1)} \oplus \mathfrak{N}_i^{(2)} \to \mathfrak{N}_{-i}^{(1)} \dotplus \mathfrak{N}_{-i}^{(2)}$, где $\mathfrak{N}_\lambda^{(k)}$, $k = 1, 2,$ — дефектные подпространства оператора A_k. Представим оператор V в блочном виде

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix};$$

где V_{jk}: $\mathfrak{N}_i^{(k)} \to \mathfrak{N}_{-i}^{(j)}$. Пусть $C(\lambda)$ — х. ф. оператора A (в случае $\lambda_0 = i$), так что $C(\lambda)$: $\mathfrak{N}_{-i}^{(2)} \to \mathfrak{N}_i^{(2)}$ $(\mathrm{Im}\ \lambda > 0)$. Положим $F(\lambda) = V_{11} + V_{12}\, C(\lambda)(I - V_{22}\, C(\lambda))^{-1} V_{21}$. Такое дробно-линейное преобразование оператора $C(\lambda)$ из несколько других соображений рассматривалось в работе А. В. Штрауса [74]. В дальнейшем было выяснено, что введенная так операторнозначная функция $F(\lambda)$ является х. ф. диссипативного оператора $\hat{A}$ в смысле определения из работ А. В. Штрауса [40, 41]. В работах А. В. Штрауса [51, 54, 75] показано, что обобщенная резольвента R_λ оператора A представима в виде $R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda I)^{-1}$ $(\mathrm{Im}\ \lambda > 0)$, где $A_{F(\lambda)}$ — расширение оператора A, отвечающее оператору $F(\lambda)$. При этом $\mathfrak{D}_{A_{F(\lambda)}} = \mathfrak{D}_A \dot{+} (F(\lambda) - I)\mathfrak{N}_i$ и при любом $\varphi \in \mathfrak{N}_i$ $A_{F(\lambda)}(F(\lambda) - I)\varphi = i(F(\lambda) + I)\varphi$, т. е. справедлив некий аналог формул фон Неймана.

5. Линейные операторы в пространстве с индефинитной метрикой.

1. *Пространства с индефинитной метрикой.* Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$ и G — ограниченный самосопряженный непрерывно обратимый оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Равенством $[x, y] = (Gx, y)$ определим в $\mathcal{H}$ новое „скалярное произведение" и будем говорить о G-метрике в $\mathcal{H}$, порождаемой оператором G. Пространство $\mathcal{H}$ с указанной G-метрикой обозначим через Π. Часто вместо G рассматривается оператор J, который является не только самосопряженным, но и унитарным ($J^* = J = J^{-1}$). Если оператор G не является знакоопределенным (т. е. билинейная форма может принимать значения разных знаков), то Π называют пространством с индефинитной метрикой.

Дальнейшую информацию о пространствах с индефинитной метрикой можно найти, например, в книге Т. Я. Азизова и И. С. Иохвидова [76].

2. *Квазиунитарные операторы.* Ограниченный непрерывно обратимый оператор T, действующий в пространстве Π, называется квазиунитарным оператором ранга r (или K_r-оператором), если $\dim[(I - T^+ T)\Pi] = r$ $(0 \le r < \infty)$, где $T^+ = G^{-1} T^* G$ — сопряженный в G-метрике оператор к оператору T.

K_r-операторы изучались в работах автора [48, 77 – 83].

Оператор $I - T^+ T$ представим в виде

$$I - T^+ T = \sum_{k,i=1}^{s} [\cdot, g_k]\, J_{ki}\, g_i,$$

где $s \ge r$, $\{g_k\}_1^s$ — некоторая совокупность векторов в Π, а $J = \| J_{ki} \|$ — эрмитова и унитарная матрица.

Характеристическая функция $\chi_T(z)$ оператора T определяется равенством $\chi_T(z)\, J^{(0)}\, \chi_T^*(0) = J - \| [(I - zT^+)^{-1} g_k, g_i] \|$, где $J^{(0)}$ — некоторая эрмитова и унитарная матрица. На такие х. ф. переносятся известные в случае гильбертовых пространств свойства (критерий изоморфизма, теорема умножения и др.).

В отличие от случая гильбертовых пространств х. ф. K_r-оператора, который действует в пространстве с индефинитной метрикой, может быть постоянной матрицей ($\chi_T(z) \equiv C$). В таком случае, как показано в работе автора [81], оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство.

В случае K_r-операторов, которые действуют в пространстве Π_κ (пространство Понтрягина), в указанных ранее работах автора строятся модельные операторы и устанавливается критерий полноты конечномерных инвариантных подпространств нерастягивающего оператора, что является обобщением соответствующих результатов В. Т. Поляцкого [5], установленных ранее в случае гильбертовых пространств.

В частности, критерий полноты формулируется следующим образом: система конечномерных инвариантных подпространств простого нерастягивающего K_r-оператора T, которые отвечают собственным значениям z_k ($|z_k| < 1$) и s_k ($|s_k| > 1$) этого оператора, полна в пространстве Π_κ тогда и только тогда, когда в неравенстве

$$\det \chi_T(0) \leq \prod_{k=1}^{\kappa} |s_k| \prod_{k=1}^{N} |z_k| \quad (N \leq \infty)$$

имеет место знак равенства.

При этом оператор T называется простым, если ни в каком нетривиальном инвариантном подпространстве он не индуцирует унитарный (в G-метрике) оператор, и нерастягивающим, если $[Tx, Tx] \leq [x, x]$ $(\forall\, x \in \Pi)$.

3. *Ограниченные несамосопряженные операторы.* Пусть A — ограниченный оператор такой, что оператор $(A - A^+)/i$ является конечномерным. Тогда этот оператор представим в виде

$$\frac{A - A^+}{i} = \sum_{k,\, i=1}^{s} [\cdot, g_k]\, J_{ki}\, g_i,$$

где, как и прежде, матрица $J = \| J_{ki} \|$ эрмитова и унитарна. Х. ф. оператора A определяется равенством

$$\chi_A(\lambda) = I + i \, \| [(A^+ - \lambda I)^{-1} g_k, g_i] \| J.$$

В этом случае также устанавливается критерий изоморфизма, теорема умножения, критерий полноты в случае диссипативных операторов и др. Указанные результаты были установлены в работах автора [80, 83] и являются обобщением на случай пространств с индефинитной метрикой соответствующих результатов М. С. Лившица [6].

4. *Квазиэрмитовы операторы.* Замкнутый плотно определенный в Π оператор A называется квазиэрмитовым оператором ранга r (или K^r-оператором), если 1) $i \in \rho(A) \cap \rho(A^+)$; 2) $\dim \mathcal{D}_A = r \,(\mathrm{mod}\, \mathcal{G}_A)$; где $\mathcal{G}_A = \{ f \in \mathcal{D}_A \mid [Af, g] = [f, Ag] \ \ \forall\, g \in \mathcal{D}_A \}$ — область эрмитовости (G-эрмитовости) оператора A.

Аналогично изложенному в п. 3 рассматривается вспомогательный оператор $B_\alpha = iR_\alpha - iR_\alpha^+ + 2\,\mathrm{Im}\,\alpha\, R_\alpha^+ R_\alpha$ $(\alpha \in \rho(A))$, который предполагается конечномерным. При $\alpha = -i$ оператор B_{-i} представим в виде

$$B_{-i} = \sum_{k,\, j=1}^{s} [\cdot, g_k]\, J_{ki}\, g_i,$$

где $J^* = J = J^{-1}$ $(J = \| J_{kj} \|)$. Х. ф. оператора A определяется равенством

$$\chi_A(\lambda)\, J^{(0)}\, \chi_A^*(i) = J + i(\lambda + i) \| [(A^+ - iI)(A^+ - \lambda I)^{-1} g_k, g_i] \|,$$

где $J^{(0)}$ — некоторая эрмитова и унитарная матрица. Здесь, кроме других результатов, также устанавливается критерий изоморфизма, теорема умножения и критерий полноты системы конечномерных инвариантных подпространств простого диссипативного K_r-оператора A, который действует в пространстве Понтрягина Π_κ (оператор A называется диссипативным или G-диссипативным, если $\operatorname{Im}[Ax, x] \geq 0$ $(\forall\, x \in \mathcal{D}_A)$). Соответствующие результаты были установлены в работах автора [48, 83] и являются обобщением аналогичных результатов из работ автора [37, 38].

В заключение отметим, что рассмотренные в этом пункте понятия и результаты могут быть обобщены на случай $r = \infty$ и записаны не в матричном, а в операторном виде. Однако при этом следует иметь в виду, что в случае пространств с индефинитной метрикой возникают существенные трудности, связанные в основном с тем, что не каждое подпространство гильбертова пространства является проекционно полным (подпространство Π_1 пространства Π называется проекционно полным, если справедливо разложение $\Pi = \Pi_1 [+] [+] \Pi_2$, где $\Pi_2 = \Pi [-] \Pi_1$; $[+]$ и $[-]$ — знаки ортогональной суммы и ортогонального дополнения в G-метрике). Критерии проекционной полноты приведены в монографии Т. Я. Азизова и И. С. Иохвидова [76], а также в работе автора [84].

1. *Лившиц М. С.* Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Мат. сб. – 1946. – **19**. – С. 239–260.
2. *Лившиц М. С.* Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы // Мат. сб. – 1950. – **26**. – С. 247–264.
3. *Лившиц М. С., Потапов В. П.* Теорема умножения характеристических матриц-функций // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**, № 4. – С. 625–628.
4. *Шмульян Ю. Л.* Операторы с вырожденной характеристической функцией // Докл. АН СССР. – 1953. – **93**, № 6. – С. 986–988.
5. *Поляцкий В. Т.* О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов // Докл. АН СССР. – 1957. – **113**, № 4. – С. 756–759.
6. *Лившиц М. С.* О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Мат. сб. – 1954. – **34**. – С. 144–199.
7. *Szökefalvy-Nagy B., Foias C.* Models fonctionelles des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caracteristique // Comptes Rend. – 1963. – **256**. – P. 3236–3239.
8. *Szökefalvy-Nagy B., Foias C.* Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles tranqulares et une classification des contractions// Ibid. – **258**. – P. 3413–3415.
9. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
10. *Кужель А. В.* Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов // Науч. докл. высш. шк. Сер. физ.-мат. наук. – 1959. – № 3. – С. 33–41.
11. *Кужель А. В.* Характеристична оператор-функцiя довiльного обмеженого оператора // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 3. – С. 233–236.
12. *Кужель А. В.* Обобщение теоремы Надя – Фояша о факторизации характеристической оператор-функции // Acta Sci. Math. – 1969. – **30**. – С. 225–234.
13. *Devis Ch., Foias C.* Operators with bounded characteristic function and their J-unitary dilation // Acta Sci. Math. – 1971. – **32**. – С. 127–139.
14. *Сахнович Л. А.* Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром // Тр. Моск. Мат. о-ва. – 1968. – **19**. – С. 211–270.
15. *Clark D.* On models for noncontractions // Acta Sci. Math. – 1974. – **36**, № 1. – С. 5–6.
16. *McEnnis B.* Purely contractive analytic functions and characteristic functions of noncontractions // Acta Sci. Math. – 1979. – **41**, № 1–2. – С. 161–172.
17. *McEnnis B.* Characteristic functions and dilatations of noncontractions // J. Operator Theory. – 1980. – **3**. – С. 71–87.
18. *McEnnis B.* Models for operators with bounded characteristic functions // Acta Sci. Math. – 1981. – **43**, № 1–2. – С. 71–90.
19. *Макаров Н. Г.* Устойчивость существенного спектра операторов, близких к унитарному // Функцион. анализ и его прил. – 1982. – **16**, № 3. – С. 72–73.

20. *Бродский В. М., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Определение и основные свойства характеристической функции J-узла // Там же. – 1970. – **4**, № 1. – С. 88–90.
21. *Бродский В. М.* Теоремы умножения и деления характеристических функций обратимого оператора // Acta Sci. Math. – 1971. – **32**. – С. 165–175.
22. *Поляков В. Н.* К теории характеристических функций линейных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1967. – **63**, № 8. – С. 53–59.
23. *Поляков В. Н.* Об одной задаче теории характеристических функций линейных операторов // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 2. – С. 171–180.
24. *Поляков В. Н.* Теорема умножения характеристических функций линейных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1973. – **132**, № 5. – С. 73–76.
25. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функциях сжатий // Докл. АН СССР. – 1965. – **160**, № 1. – С. 9–12.
26. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об операторах рассеяния и полугруппах сжатий в гильбертовых пространствах // Там же. – **165**, № 1. – С. 9–12.
27. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исследования. – Кишинев. – 1966. – **1**, вып. 2. – С. 3–64.
28. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Общее решение задачи линейного прогнозирования стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. – 1968. – **13**, № 3. – С. 419–431.
29. *Кужель А. В., Третьяков Д. В.* Об одном обобщении схемы Лакса – Филлипса в теории рассеяния // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 2. – С. 19–21.
30. *Кужель А. В., Третьяков Д. В.* Обобщенная схема Лакса – Филлипса в теории рассеяния // Динам. системы: Респ. межведомств. науч. сб. – 1983. – Вып. 2. – С. 115–121.
31. *Сахнович Л. А.* Приведение несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду // Мат. сб. – 1957. – **44**, № 4. – С. 509–548.
32. *Сахнович Л. А.* Приведение одного несамосопряженного оператора с непрерывным спектром к диагональному виду // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 4. – С. 193–196.
33. *Бродский М. С.* Характеристические матрицы-функции линейных операторов // Мат. сб. – 1956. – **39**, № 2. – С. 179–200.
34. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления операторов. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
35. *Руткас А. Г.* О характеристических функциях неограниченных операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1970. – вып. 12. – С. 20–35.
36. *Карпенко И. И.* Характеристические оператор-функции $\breve{K}_\Gamma$-операторов // Докл. АН УССР. Сер. А. –1983. – № 9. – С. 3–5.
37. *Кужель А. В.* О приведении неограниченных несамосопряженных операторов к треугольному виду // Докл. АН СССР. –1958. – **119**, № 5. – С. 868–871.
38. *Кужель А. В.* Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов // Там же. –1959. – **125**, № 1. – С. 36–37.
39. *Кужель А. В.* Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1959. – 148 с.
40. *Штраус А. В.* О характеристических функциях линейных операторов // Докл. АН СССР. –1959. – **126**, № 3. – С. 514–516.
41. *Штраус А. В.* Характеристические функции линейных операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. –1960. – **24**, № 1. – С. 43–47.
42. *Цекановский Э. Р., Шмульян Ю. Л.* Теория бирасширений операторов в оснащенных гильбертовых пространствах. Неограниченные операторные узлы и характеристические функции // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, № 5. – С. 69–124.
43. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Вища шк., 1990. – 600 с.
44. *Руткас А. Г.* К теории характеристических функций линейных операторов // Докл. АН СССР. –1976. – **229**, № 3. – С. 546–549.
45. *Руткас А. Г.* Характеристическая функция и модель линейного пучка операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1986. – Вып. 45. – С. 98–111.
46. *Руткас А. Г.* Операторно-дифференциальные уравнения в радиофизике, не разрешенные относительно производной: Дис. … д-ра. физ.-мат. наук. – Харьков, 1988. – 268 с.
47. *До Хонг Тан.* О теореме умножения характеристических функций неограниченных операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1969. – Вып. 7. – С. 65–74.
48. *Кужель А. В.* Спектральный анализ неограниченных несамосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. –1968. – **178**, № 1. – С. 31–34.
49. *Губреев Г. М.* Определение и основные свойства характеристической функции W-узла // Докл. АН УССР. Сер. А. –1978. – № 1. – С. 3–6.
50. *Штраус А. В.* К теории эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. –1949. – **67**, № 4. – С. 211–214.
51. *Штраус А. В.* К теории обобщенных резольвент симметрического оператора // Там же. –1951. – **78**, № 2. – С. 217–220.
52. *Штраус А. В.* О самосопряженных операторах в ортогональной сумме гильбертовых пространств // Там же. –1962. – **144**, № 3. – С. 512–515.
53. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. –1968. – **32**, № 1. – С. 186–207.

54. *Штраус А. В.* Расширения и обобщенные резольвенты неплотно заданного симметрического оператора // Там же. –1970. – **34**, № 1. – С. 175–202.
55. *Кужель А. В., Руденко Л. И.* Правильные расширения эрмитовых и изометрических операторов // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 6. – С. 810–814.
56. *Кужель А. В., Руденко Л. И.* Описание правильных расширений эрмитовых операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1982. – **16**, № 1. – С. 74–75.
57. *Кужель А. В.* Расширения эрмитовых операторов. – Киев: Вища шк., 1989. – 56 с.
58. *Кочубей А. Н.* О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений // Изв. АН АрмССР. – 1980. – **15**, № 3. – С. 219–232.
59. *Талюш М. О.* Типова структура дисипативних операторів // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1973. – № 11. – С. 993–996.
60. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 1. – С. 41–48.
61. *Кочубей А. Н.* О спектре самосопряженных расширений симметрического оператора // Там же. – 1976. – **19**, № 3. – С. 429–434.
62. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 2. – С. 314–320.
63. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб. – 1976. – **100**, № 2. – С. 210–216.
64. *Брук В. М.* О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки. – 1977. – **22**, № 6. – С. 825–834.
65. *Брук В. М.* О зависящих от параметра расширениях симметрического оператора // Функциональный анализ. – Ульяновск: Ульянов. пед. ин-т, 1978. – Вып. 10. – С. 32–40.
66. *Кочубей А. Н.* О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1979. – **13**, № 4. – С. 77–78.
67. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. –85 с. – (Препринт АН УССР. ДонФТИ; 85.9(104)).
68. *Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.* Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 151–158.
69. *Кужель С. А.* Пространства граничных значений и характеристические функции эрмитовых операторов. – Киев, 1989. – 7 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 1710-Ук.89.
70. *Кужель С. А.* О пространствах граничных значений и правильных расширениях эрмитовых операторов // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 854–857.
71. *Маламуд М. М.* Об одном подходе к теории расширений неплотно заданного эрмитова оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 3. – С. 20–26.
72. *Филлипс Р. С.* Расширения дуальных подпространств, инвариантных относительно алгебры // Математика. Сб. переводов. – 1964. – **8**, № 6. – С. 81–108.
73. *Кужель А. В., Москалева Ю. П.* Расширения с ограничениями эрмитовых неплотно заданных операторов // XYI шк. по теории операторов (Нижний Новгород, 13–20 сент. 1991 г.): Тез. докл. – Нижний Новгород, 1991. – С. 121.
74. *Штраус А. В.* Об одном классе регулярных оператор-функций // Докл. АН СССР. –1950. – **70**, № 4. – С. 577–580.
75. *Штраус А. В.* Об обобщенных резольвентах симметрического оператора // Там же. –1950. – **71**, № 2. – С. 241–244.
76. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
77. *Кужель А. В.* Спектральний аналіз квазіунітарних операторів першого рангу в просторі з індефінітною метрикою // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1961. – № 8. – С. 1001–1003.
78. *Кужель А. В.* Трикутна модель K_Γ-операторів в просторі з індефінітною метрикою // Там же. – 1962. – № 5. – С. 572–574.
79. *Кужель А. В.* Характеристичні матриці-функції квазіунітарних операторів довільного рангу в просторі з індефінітною метрикою // Там же. – № 9. – С. 1135–1138.
80. *Кужель А. В.* Спектральный анализ ограниченных несамосопряженных операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. –1963. – **151**, № 4. – С. 772–774.
81. *Кужель А. В.* Про один випадок існування інваріантних підпросторів квазіунітарних операторів в просторі з індефінітною метрикою // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1966. – № 5. – С. 583–585.
82. *Кужель А. В.* Спектральный анализ квазиунитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Теория функций, функцион. анализ и их прил. –1967. – Вып. 4. – С. 3–27.
83. *Кужель А. В.* О некоторых вопросах спектральной теории линейных операторов в пространствах с дефинитной и индефинитной метрикой: Дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. – Киев, 1969. – 233 с.
84. *Кужель А. В.* Правильные расширения эрмитовых операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. –1982. – **265**, № 5. – С. 1059–1061.

Получено 02.10.91