УДК 517.911

М. У. Ахметов, канд. физ.-мат. наук,
Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О МЕТОДЕ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

A method of study of differential equations with an impulse action on a surface, applied in [1] for a bounded part of the phase space, is now being extended to the whole space R^n. Theorems on existence of integral surfaces have been proved for the critical case and a reduction principle for such equations has been substantiated.

У всьому просторі R^n реалізується метод дослідження диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях, застосований в [1] для обмеженої частини фазового простору. Доведені теореми про існування інтегральних поверхонь у критичному випадку, обгрунтовано принцип зведення для таких рівнянь.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющую вид

$$\frac{dx}{\partial t} = A(t)x + f(t, x), \quad t \neq t_i + t_i(x),$$
$$\Delta x \Big|_{t=t_i+t_i(x)} = B_i x + I_i(x), \tag{1}$$

в которой $x \in R^n$, $t \in R$, $A(t)$ — непрерывная матричнозначная функция B_i, $i \in \in Z$, — ограниченная последовательность квадратных порядка n матриц таких, что $\det(E + B_i) \neq 0$, $i \in Z$ (Z — множество целых чисел), функция f непрерывна по t. Будем полагать также, что равномерно относительно $t \in R$, $i \in Z$ для любых $x, y \in R^n$ справедливо условие Липшица

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| + \| I_i(x) - I_i(y) \| \leq l \, \| x - y \| \tag{2}$$

и выполняются соотношения

$$\sup_t \| f(t, 0) \| + \sup_i \| I_i(0) \| = M < +\infty, \tag{3}$$

$$\sup_t \| A(t) \| = N < +\infty. \tag{4}$$

Существует положительное число $\theta \in R$, для которого при всех $i \in Z$ верно неравенство $t_{i+1} \geq t_i + \theta$. Кроме того, поверхности разрыва Γ_i: $t = t_i + t_i(x)$, $i \in \in Z$, удовлетворяют условиям $t_i + t_i(x) < t_{i+1} + t_{i+1}(x)$, $|t_i| \to +\infty$ при $|i| \to \infty$,

$$t_i((E + B_i)x + I_i(x)) \leq t_i(x). \tag{5}$$

1. Установление S-свойства в пространстве R^n. Зафиксируем действительное число $l_0 > 0$ и обозначим $h = l_0 \exp((N + l_0)l_0')$.

Введем в рассмотрение скалярные функции $\nu(u)$ и $\bar{\nu}(u)$, определенные на промежутке $0 < u < +\infty$, удовлетворяющие неравенствам

$$\nu(u) < \begin{cases} 1/((N + l_0)u + M), & \text{если } M > 0, \\ \min(1, \ 1/(N + l_0)u), & \text{если } M = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\bar{\nu}(u) < \begin{cases} 1/l_0[(N + l_0)u + M], & \text{если } M > 0, \\ \min(1, \ 1/l_0(N + l_0)u), & \text{если } M = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что

$$\sup_{u>0} \nu(u) = \begin{cases} 1/M, & \text{если } M>0, \\ 1, & \text{если } M=0, \end{cases} \quad \sup_{u>0} \overline{\nu}(u) = \begin{cases} 1/l_0 M, & \text{если } M>0, \\ 1, & \text{если } M=0. \end{cases}$$

Для каждого $x_0 \in R^n$ обозначим $K_h(x_0) = \{x \in R^n \mid \| x - x_0 \| \leq h\}$. Будем полагать, что при $x \in K_h(x_0)$, $x_0 \in R^n$, справедливо неравенство

$$| t_i(x) | \leq l\nu(\| x_0 \|), \quad l < l_0, \quad i \in Z, \tag{8}$$

и, кроме того, если $x, y \in K_h(x_0)$, $x_0 \in R^n$, то справедливо локальное условие Липшица

$$| t_i(x) - t_i(y) | \leq l\overline{\nu}(\| x_0 \|)\| x - y \|. \tag{9}$$

Функцией $t = t(x)$, удовлетворяющей условиям (8), (9) при произвольно выбранных l_0, M и N, является, например, отображение $t(x) = l \cdot Ke^{-\| x \|}$, в котором постоянную $K = K(l_0, M, N)$ следует выбрать достаточно малой.

Дальше, применив соотношения (2) – (4), (7) и (9), найдем, что для любой точки (t_0, x_0), принадлежащей поверхности разрыва Γ_i, $i \in Z$, справедливо неравенство

$$\| A(t_0)x_0 + f(t_0, x_0) \| l\overline{\nu}(\| x_0 \|) \leq l / l_0 < 1. \tag{10}$$

Из этого неравенства, а также последнего из соотношений (5) вытекает согласно следствию из теоремы 9 [3], что каждое решение системы (1) пересекает любую из поверхностей разрыва при достаточно малом l ровно один раз.

Зафиксируем $i \in Z$. Пусть $x_0(t) = x(t, t_i, x)$ — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x). \tag{11}$$

Обозначим через $t = \theta_i$ момент встречи этого решения с поверхностью Γ_i. Предположим теперь, что $x_1(t) = x(t, \theta_i, (E + B_i)x_0(\theta_i) + I_i(x_0(\theta_i)))$ — также решение уравнения (11). Определим отображение $J_i(x) = x_1(t_i) - (E + B_i)x$ и построим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, имеющую вид

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t, y), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y\Big|_{t=t_i} = B_i y + J_i(y). \tag{12}$$

Будем говорить, что системы (1) и (12) удовлетворяют S-свойству, если для любого решения $x(t)$ уравнения (1), имеющего точки разрыва $t = \tau_i$, $i \in Z$, существует решение $y(t)$ системы (12), которое во всех точках $t \in R$, исключая промежутки $(t_i, \tau_i]$ (или $(\tau_i, t_i]$, если $\tau_i < t_i$), удовлетворяют равенству $x(t) = y(t)$. В частности,

$$y(t_i) = x(t_i), \text{ если } \tau_i \geq t_i, \text{ или } y(t_i) = x(t_i+), \text{ если } \tau_i < t_i,$$

и

$$y(\tau_i) = x(\tau_i+), \text{ если } \tau_i \geq t_i, \text{ или } y(\tau_i) = x(t_i), \text{ если } \tau_i < t_i,$$

и, обратно, для каждого решения y уравнения (12) найдется решение x системы (1), удовлетворяющее всем перечисленным выше условиям. Можно проверить, исходя из способа построения отображений J_i, что уравнения (1) и (12) удовлетворяют S-свойству.

Докажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть для системы* (1) *справедливы перечисленные условия. Тогда существует действительное число* l_1, $0 < l_1 < l_0$, *для которого при всех* x, $y \in R^n$, $0 < l < l_1$, *справедливо неравенство*

$$\| J_i(x) - J_i(y) \| \le l\bar{k}(l) \| x - y \|, \tag{13}$$

где $\bar{k}(l)$ *— ограниченная на множестве* $0 < l < l_1$ *функция.*

Доказательство. Пусть (t_i, x), (t_i, y) — точки плоскости $t = t_i$ при некотором фиксированном $i \in Z$. Не нарушая общности, в дальнейшем будем считать, что $\| x \| \ge \| y \|$. Пусть $x_0(t) = x(t, t_i, x)$, $y_0(t) = y(t, t_i, y)$ — решения уравнения (11), $t = \theta_i$ и $t = \eta_i$ — соответственно моменты пересечения этими решениями поверхности Γ_i. Предположим, не нарушая общности, что $t_i \le \theta_i \le \eta_i$. Обозначим $x^+ = (E + B_i)x_0(\theta_i) + I_i(x_0(\theta_i))$, $y^+ = (E + B_i)y_0(\eta_i) + I_i(y_0(\eta_i))$, и пусть $x_1(t) = x(t, \theta_i, x^+)$, $y_1(t) = x(t, \eta_i, y^+)$ — также решения системы (11). Тогда $J_i(x) = x_1(t_i) - (E + B_i)x$, $J_i(y) = y_1(t_i) - (E + B_i)y$. Используя эти выражения, получаем

$$\begin{aligned} \| J_i(x) - J_i(y)\| \le \| E + B_i \| \int_{t_i}^{\theta_i} (\| A(u)\| + l) \| x_0(u) - y_0(u)\| \, du + \\ + \| E + B_i \| \int_{\theta_i}^{\eta_i} ((\| A(u)\| + l) \| y_0(u)\| + M) du + l \Bigg\{ \| x - y \| + \| E + B_i \| \times \\ \int_{t_i}^{\theta_i} (\| A(u)\| + l) \| x_0(u) - y_0(u)\| du + \int_{\theta_i}^{\eta_i} ((\| A(u)\| + l) \| y_0(u)\| + M) du \Bigg\} + \\ + \int_{\eta_i}^{\theta_i} ((\| A(u)\| + l) \| y_1(u)\| + M) du + \int_{\theta_i}^{\eta_i} (\| A(u)\| + l) \| x_1(u) - y_1(u)\| \, du. \end{aligned} \tag{14}$$

Оценим сверху правую часть последнего выражения. Учитывая, что в ней есть однотипные интегралы, достаточно определить верхнюю границу изменения величин

$$\alpha = \int_{t_i}^{\theta_i} (\| A(u)\| + l) \| x_0(u) - y_0(u)\| du, \quad \beta = \int_{\theta_i}^{\eta_i} ((\| A(u)\| + l) \| y_0(u)\| + M) du.$$

Прежде всего, исходя из условий леммы, находим

$$\| x_0(t) - x)\| \le h, \quad \| y_0(t) - y)\| \le h, \quad \| x_1(t) - x^+)\| \le h, \quad \| y_1(t) - y^+)\| \le h. \tag{15}$$

Докажем лишь первое из соотношений (15). Остальные проверяются аналогично. Если предположить противное, то существует точка $\bar{t} \in (t_i, \theta_i]$, в которой $\| x_0(\bar{t}) - x \| = h$ и $\| x_0(t) - x \| < h$ для всех $t \in (t_i, \bar{t})$. Поэтому, исходя из неравенства

$$| x_0(t) - x \| \le \int_{t_i}^{t} (\| A(u) \| \| x \| + \| f(u, x)\|) du + \int_{t_i}^{t} (\| A(u) \| + l) \| x_0(u) - x \| du,$$

применяя лемму Гронуолла — Беллмана, получаем

$$\| x_0(t) - x \| \le l_0 \nu(\| x \|)((N + l_0)\| x \| + M)e^{(N + l_0)l_0}.$$

Отсюда, на основании неравенства (6), вытекает, что при всех $t \in (t_i, \bar{t}]$ справедливо соотношение $\|x_0(t) - x\| \le h$, а это противоречит равенству $\|x_0(\bar{t}) - x\| = h$. Следовательно, (15) — истинное неравенство.

Из (15) вытекает, что $\theta_i - t_i \le l\nu(\| x \|)$ и $\eta_i - t_i \le l\nu(\| y \|)$. Для того чтобы оценить $\eta_i - \theta_i$, нужно рассмотреть два случая.

1. Пусть $y_0(\eta_i) \in K_h(x_0(\theta_i))$. Тогда

$$\eta_i - \theta_i = t_i(y_0(\eta_i)) - t_i(x_0(\theta_i)) \le l\bar{\nu}(\| y_0(\eta_i) \|) \times$$

$$\times \left(\int_{\theta_i}^{\eta_i} f(u, y_0(u))du + \| y_0(\theta_i) - x_0(\theta_i) \| \right). \tag{16}$$

Так как на отрезке $[t_i, \theta_i]$ справедливо равенство

$$y_0(t) - x_0(t) = y - x + \int_{t_i}^{t} (A(u)(y_0(u) - x_0(u)) + f(u, y_0(u)) - f(u, x_0(u)))du,$$

то, применив лемму Гронуолла — Беллмана, получим

$$\| y_0(\theta_i) - x_0(\theta_i) \| \le \| y - x \| e^{(N + l)l}. \tag{17}$$

Таким же образом можно проверить, что справедливо соотношение $\| y_0(t) \| \le (\| y \| + Ml\nu(\| y \|))\, e^{(N + l)l}$, и тогда

$$\left\| \int_{\theta_i}^{\eta_i} f(u, y_0(u))du \right\| \le (\eta_i - \theta_i)[M + l(\| y_0(\eta_i) \| + Ml\nu(\| y_0(\eta_i) \|)e^{(N + l)l}]. \tag{18}$$

Оценивая правую часть (16), с помощью соотношений (17) и (18) найдем, что справедливо неравенство

$$\eta_i - \theta_i \le \frac{l\bar{\nu}\left(\| y_0(\eta_i) \| \right)e^{(N+l)l}\| x - y \|}{1 - l\bar{\nu}\left(\| y_0(\eta_i) \|\right)\left[M + l\left(\| y_0(\eta_i) \| + Ml\nu\left(\| y_0(\eta_i) \| \right)\right)e^{(N+l)l}\right]}. \tag{19}$$

Для того чтобы последнее выражение имело смысл при достаточно малом l, достаточно, чтобы ограниченной была функция $F(u) = \bar{\nu}(u)[M + l(u + Ml\nu(u)e^{(N+l)l}]$. Но это справедливо, так как справедливы неравенства (6) и (7).

Из (19) следует, что существует ограниченная функция $k_1(l)$, для которой при достаточно малом l справедливо соотношение

$$\eta_i - \theta_i \le lk_1(l)\bar{\nu}(\| y_0(\eta_i) \|)\| x - y \|. \tag{20}$$

2. Пусть $y_0(\eta_i) \,\overline{\in}\, K_h(x_0(\theta_i))$. Покажем сначала, что при достаточно малом l это условие выполняется лишь в случае, когда $\| x - y \| \le h/2$. Действительно,

$$\| y_0(\eta_i) - y \| = \left\| \int_{t_i}^{\eta_i} f(u, y_0(u))du \right\| \le l\bar{\nu}(\| y \|)[M + l(\| y \| + Ml\nu(\| y \|))\, e^{(N + l)l}].$$

Отсюда ввиду ограниченности функции $F(u)$ следует, что при достаточно малом l верно неравенство $\| y_0(\eta_i) - y \| \le h/4$. Аналогично, если l достаточно мало, то справедливо соотношение $\|x_0(\theta_i)-x\|\le h/4$. Используя последние неравенства, получаем $\|x-y\|\ge\|y_0(\eta_i)-x_0(\theta_i)\|-\|y_0(\eta_i)-y\|-\|x_0(\theta_i)-x\|\ge$ $\ge h/2$.

Отсюда имеем

$$\eta_i-\theta_i = t_i(y_0(\eta_i))-t_i(x_0(\theta_i)) \le l\nu(\|y_0(\eta_i)\|) \le$$
$$\le l\nu(\|y_0(\eta_i)\|)\frac{2}{h}\|x-y\|. \tag{21}$$

Полагая теперь, что $k(l)=\max(2/h, k_1)$ и $\overline{\overline{\nu}}=\max(\nu(u), \overline{\nu}(u))$, из (20) и (21) получаем соотношение

$$|\eta_i-\theta_i| \le lk(l)\overline{\overline{\nu}}(\|y_0(\eta_i)\|)\|x-y\|. \tag{22}$$

Теперь можно перейти к оценке величин α и β. Имеем

$$\alpha \le (\theta_i-t_i)(N+l)e^{(N+l)l}\|x-y\| \le l\nu(\|x\|)(N+l)e^{(N+l)l}\|x-y\|. \tag{23}$$

Затем, применив (22), получим

$$\beta \le (\eta_i-\theta_i)(M+(N+l_0)(\|y_0(\eta_i)\|+Ml_0))e^{(N+l_0)l_0} \le lk(l)\overline{\overline{\nu}}(\|y_0(\eta_i)\|) \times$$
$$\times (M+(N+l_0)(\|y_0(\eta_i)\|+Ml_0))\exp((N+l_0)l_0))\|x-y\|.$$

Отсюда в силу равномерной по $u>0$ ограниченности функции $\overline{\overline{\nu}}(u)(M+$ $+(N+l_0)(u+Ml_0))\exp((N+l_0)l_0))$ следует $\beta\le lk_2(l)\|x-y\|$, где k_2 — ограниченная функция.

Из анализа полученных для α и β оценок можно заметить, что аналогичные оценки справедливы для всех слагаемых в (14). Отсюда и вытекает справедливость соотношения (13). Лемма доказана.

2. Интегральные поверхности систем с постоянными коэффициентами при части переменных. Пространство R^n разобьем в прямое произведение $R^m\times R^{n-m}$ и определим в нем норму таким образом, что если $w=(x, y)$, $x\in R^m$, $y\in R^{n-m}$, то $\|w\|=\|x\|+\|y\|$, где $\|x\|$ и $\|y\|$ — евклидовы нормы векторов x и y.

На множестве $R^1\times R^n$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющую вид

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A(t)x+f_1(t, w),\\ \frac{dy}{dt} &= \mathbb{C}y+f_2(t, w), \quad t\ne t_i+t_i(w),\\ \Delta x\big|_{t=t_i+t_i(w)} &= B_ix+I_i^1(w),\\ \Delta y\big|_{t=t_i+t_i(w)} &= I_i^2(w),\end{aligned} \tag{24}$$

в которой A — непрерывная по t размера $m\times m$ матрица $\mathbb{C}$, B_i, $i\in Z$, — постоянные квадратные матрицы, $E+B_i$, $i\in Z$, — невырожденные матрицы. Будем в дальнейшем обозначать $f=(f_1, f_2)$ $I_i=(I_i^1, I_i^2)$ и считать, что равномерно по $t \in R$, $i \in Z$ для всех w, $\overline{w} \in R^n$ справедливо неравенство

$$\| f(t, w) - f(t, \overline{w}) \| + \| I_i(w) - I_i(\overline{w}) \| \leq l \| w - \overline{w} \| \tag{25}$$

и верны соотношения

$$f(t, 0) = I_i(0) = 0, \tag{26}$$

$$\sup_t \| A \| + \sup_i \| B \| + \| \mathbb{C} \| = N < +\infty, \tag{27}$$

действительные числа t_i, $i \in Z$, удовлетворяют условию

$$0 < \theta_1 \leq t_{i+1} - t_i \leq \theta_2 < +\infty. \tag{28}$$

Будем полагать также, что функции $t_i(x)$ удовлетворяют соотношениям (8), (9) и неравенствам

$$t_i + t_i(w) < t_{i+1} + t_{i+1}(w), \quad t_i(w + (B_i x, 0) + I_i(w)) \leq t_i(w). \tag{29}$$

Нетрудно заметить, что уравнение (24) является системой вида (1). Поэтому, используя результаты предыдущего пункта, некоторые соотношения для системы (24) будем получать, исходя из таковых для уравнения (1).

Заметим сразу же, что условия (8), (9) и (29) при достаточно малом l устраняют "биение" решений системы (24) о поверхности разрыва.

Положив $z = (\xi, \eta)$, аналогично системе (12) построим уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi + f_1(t, z), \quad \frac{d\eta}{dt} = C\eta + f_2(t, z), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta\xi \,|_{t=t_i} = B_i \xi + J_i^1(z), \quad \Delta\eta \,|_{t=t_i} = J_i^2(z). \tag{30}$$

Система (30) вместе с уравнением (24) удовлетворяет S-свойству во всем пространстве R^n. Обозначим $J_i = (J_i^1, J_i^2)$. Для векторов J_i, $i \in Z$, равномерно для всех z, $\overline{z} \in R^n$ справедливы соотношения $J_i(0) = 0$, $\| J_i(z) - J_i(\overline{z}) \| \leq$ $\leq l \overline{k}(l) \| z - \overline{z} \|$, где $\overline{k}$ — ограниченная функция.

Далее, полагаем, что

$$\mathrm{Re}\lambda_j(\mathbb{C}) \geq 0, \quad j = \overline{m+1, n}, \tag{31}$$

и матрицант $X(t, u)$ линейной однородной системы $dx/dt = A(t)x$, $t \neq t_i$, $\Delta x\,|_{t=t_i} =$ $= B_i x$, соответствующей уравнениям (30), удовлетворяет оценке

$$\| X(t, u) \| \leq a e^{-\lambda(t-u)}, \quad t \geq u, \tag{32}$$

где a и λ — положительные постоянные.

Вопрос о существовании интегральных поверхностей уравнений вида (30) ранее был рассмотрен в работе [4]. Поэтому ниже только сформулированы леммы 2 – 4.

Известно, что из неравенства (31) вытекает соотношение $\| \exp(\mathbb{C}t) \| \leq a(1 +$ $+ |t|^k)$, $t \leq 0$, где k, $0 \leq k \leq n - m$, — некоторое целое число, коэффициент a принят равным коэффициенту в (32), что, очевидно, не нарушает общности рассуждений.

Выберем произвольное σ из интервала $(0, \lambda)$ и обозначим

$$\nu_1 = \int_0^\infty (1+t^k)e^{-\sigma t}dt, \quad \nu_2 = \sup_t \sum_{t<t_i} (1+(t_i-t)^k)e^{-\sigma(t_i-t)}.$$

Можно проверить, что ν_1 и ν_2 — конечные числа.

Зафиксируем положительное число $\varepsilon \in R$ и обозначим

$$\mu_1 = la(a+\varepsilon)((\lambda-\sigma)^{-1} + \nu_1 + \bar{k}(l)(1-e^{-(\lambda-\sigma)\theta_1})^{-1} + \nu_2),$$

$$\mu_2 = la(\lambda^{-1} + \nu_1 + \bar{k}(l)((1-e^{-\lambda\theta_1})^{-1} + \nu_2)).$$

Лемма 2. *Пусть система* (30) *удовлетворяет перечисленным условиям и* $z(t)$, $z(t_0) = (\xi_0, \eta_0)$ — *решение этого уравнения, для которого верно соотношение* $\| z(t)\| \le c_z \exp(-\sigma(t-t_0))$, $t \ge t_0$, *где* c_z — *положительная постоянная. Тогда функция* $z(t)$ *удовлетворяет системе интегральных уравнений*

$$\begin{gathered}\xi = X(t,t_0)\xi_0 + \int_{t_0}^t X(t,u)f_1(u,z)du + \sum_{t_0 \le t_i < t} X(t,t_i)J_i^1(z),\\ \eta = -\int_t^\infty e^{\mathbb{C}(t-u)}f_2(u,z)du - \sum_{t<t_i} e^{\mathbb{C}(t-t_i)}J_i^2(z)\end{gathered} \tag{33}$$

и

$$\eta_0 = -\int_{t_0}^\infty e^{\mathbb{C}(t_0-u)}f_2(u,z(u))du - \sum_{t_0<t_i} e^{\mathbb{C}(t_0-t_i)}J_i^2(z(t_i)). \tag{34}$$

Если $\mu_2 < 1$, то вектор η_0 определяется по выражению (34) для данного ξ_0 единственным образом.

Пусть теперь

$$F(\xi_0,t_0) = -\int_{t_0}^\infty e^{\mathbb{C}(t_0-u)}f_2(u,z(u))du - \sum_{t_0<t_i} e^{\mathbb{C}(t_0-t_i)}J_i^2(z(t_i)).$$

С помощью предыдущей леммы доказывается, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполняются перечисленные для системы* (30) *условия и постоянная* l *достаточно мала для того, чтобы неравенства* $\mu_1 < \varepsilon$, $\mu_2 < 1$ *были справедливыми. Тогда уравнение* $\eta = F(\xi, t)$ *определяет* m*-мерное интегральное многообразие* Ψ_+ *системы* (30). *Каждое решение* $z(t) = z(t,\xi_0)$, $z(t_0) = z(\xi_0,\eta_0)$, *интегральная кривая которого лежит на* Ψ_+, *удовлетворяет неравенству* $\| z(t)\| \le (a+\varepsilon)\|\xi_0\| \exp(-\sigma(t-t_0))$. *Кроме того, функция* F *равномерно по* $t \in R$ *удовлетворяет соотношениям* $F(0,t) = 0$, $\| F(\xi_1,t) - F(\xi_2,t)\| \le 2la^2\|\xi_1 - \xi_2\|$.

Любое решение $z(t,\xi_0)$ *непрерывным в* B*-топологии* [1] *образом зависит от* ξ_0.

Из леммы 3 на основании S-свойства вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполяются соотношения* (8), (9), (25) – (29), (32) *и* $\mu_1 < \varepsilon$, $\mu_2 < 1$. *Тогда существует* m*-мерная интегральная поверхность* Φ_+ *сис-*

темы (24) *такая, что каждое решение* $x(t, \xi)$, *интегральная кривая которого при* $t \geq t_0$ *проходит по* Φ_+, *удовлетворяет неравенству*

$$\| x(t, \xi) \| \leq d(\| \xi \|) e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad d(u) = O(u).$$

Если θ_i — *точки разрыва решения* $x(t, \xi)$, *то* $|\theta_i - t_i - t_i(0)| \to 0$ *при* $i \to \to +\infty$.

Если уравнение (24) *является периодическим по* t *с периодом* ω, *то и интегральное множество* Φ_+ *также будет* ω-*периодическим.*

Рассмотрим теперь вопрос о существовании интегральной поверхности уравнения (24), связанной с матрицей $\mathbb{C}$.

Сформулируем сначала следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть система* (30) *удовлетворяет перечисленным условиям. Тогда при достаточно малой константе* l *в условии Липшица существует* $(n-m)$-*мерная интегральная поверхность* Ψ_- *этой системи, определяемая уравнением* $\xi = Q(\eta, t)$, *где* Q — m-*мерная функция, кусочно-непрерывная по* t, *удовлетворяющая условиям* $Q(0, t) = 0$, $\| Q(\eta_1, t) - Q(\eta_2, t) \| \leq \kappa l \tilde{k}(l) \| \eta_1 - -\eta_2 \|$, *где* κ — *положительная постоянная, зависящая только от матриц* A, B_i *и* $\mathbb{C}$, $\tilde{k}$ — *ограниченная функция.*

Для любого решения $z(t)$, *расположенного на* Ψ_-, *справедлива оценка* $\| z(t) \| \leq c_z \exp(-\beta t)$, $t \leq 0$, *где* $c_z > 0$ *и* $\beta > 0$ — *постоянные числа и* β — *сколь угодно малое при достаточно малом* l *число.*

Из последней леммы вытекает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для системы* (24) *выполняются соотношения* (8), (9), (25) – (29), (32), (35). *Тогда при достаточно малом* l *эта система допускает* $(n-m)$-*мерную интегральную поверхность* Φ_-, *все решения на которой удовлетворяют оценке*

$$\| w(t) \| \leq c_z \exp(-\beta t), \quad t \leq 0,$$

где $\beta > 0$ — *произвольно малое при достаточно малом* l *постоянное число.*

3. Принцип сведения для слабонелинейных импульсных систем. Продолжим исследование системы (24), полагая, что справедливы условия теорем 1 и 2 и, следовательно, существуют поверхности Φ_- и Φ_+. Обозначим $x = \overline{Q}(y, t)$ уравнение, задающее интегральную поверхность Φ_-. Тогда на поверхности Φ_- уравнения (24) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \mathbb{C}y + f_2(t, \overline{Q}(y, t), y), \quad t \neq t_i + t_i(\overline{Q}(y, t), y),$$

$$\Delta y \big|_{t = t_i + t_i(\overline{Q}(y,t), y)} = I_i^2(\overline{Q}(y, t), y). \tag{35}$$

На основании принципа сведения, разработанного для обыкновенных дифференциальних уравнений [5], вопрос об устойчивости тривиального решения уравнения (24) можно рассматривать в зависимости от устойчивости такого же решения для системы (35). В силу установленного для систем (24) и (30) S-свойства достаточно рассмотреть уравнение (30). Поэтому в дальнейшем основная задача состоит в установлении прямой зависимости между устойчивостью нулевого решения уравнения (30) и устойчивостью нулевого решения системы

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathbb{C}\eta + f_2(t, Q(\eta, t), \eta), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta\eta\,|_{t=t_i} = J_i^2(Q(\eta, t_i), \eta), \tag{36}$$

к которой уравнение (30) сводится на поверхности Ψ_-.

Прежде чем осуществить исследование данной задачи, рассмотрим вопрос об устойчивости самой поверхности Ψ_-. Введем необходимые определения.

Пусть дана система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющая вид

$$\frac{dx}{dt} = P(t, x), \quad t \neq t_i(x), \quad \Delta x\,|_{t=t_i(x)} = W_i(x), \tag{37}$$

$\mathfrak{A}$ — интегральная поверхность этого уравнения. Пусть $\tau \in R$. Обозначим $\mathfrak{A}_\tau = \{x \in R^n \mid (\tau, x) \in \mathfrak{A}\}$.

Определение 1. *Решение $x(t)$ уравнения (37) находится в ε-окрестности множества $\mathfrak{A}$ на промежутке J, если $x(t)$ определено на этом промежутке, и для всех $\tau \in J$, расположенных вне ε-окрестностей точек разрыва решения $x(t)$, точка $x(\tau)$ принадлежит ε-окрестности множества $\mathfrak{A}_\tau$, т. е. справедливо неравенство $\inf\limits_{x \in \mathfrak{A}_\tau} \|x(\tau) - x\| < \varepsilon$.*

Определение 2. *Интегральная поверхность $\mathfrak{A}$ B-устойчива, если для каждого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдется вещественное число $\delta > 0$ такое, что любое решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, для которого точка $t = t_0$ не является моментом разрыва и x_0 расположено в δ-окрестности множества $\mathfrak{A}_{t_0}$, находится в ε-окрестности множества $\mathfrak{A}$ при $J = \{t \in R \mid t \geq t_0\}$.*

Определение 3. *Интегральная поверхность $\mathfrak{A}$ B-асимптотически устойчива, если существует положительное число $\Delta \in R$ такое, что для каждых вещественного числа $\varepsilon > 0$ и решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, для которого $t = t_0$ не является точкой разрыва и x_0 принадлежит Δ-окрестности множества $\mathfrak{A}_{t_0}$, найдется вещественное число $\theta > t_0$ такое, что решение $x(t)$ принадлежит ε-окрестности множества $\mathfrak{A}$ при $J = \{t \in R \mid t \geq \theta\}$.*

Определение 4. *Интегральная поверхность $\mathfrak{A}$ называется B-устойчивой в целом, если для нее число $\Delta > 0$ в предыдущем определении можно выбрать произвольным.*

Пусть $z(t) = (\xi, \eta)$, $z(t_0) = (\xi_0, \eta_0)$ — произвольное решение системы (30), $z(t, \overline{\eta}) = (\xi(t, \overline{\eta}), \eta(t, \overline{\eta}))$ — решение, удовлетворяющее начальному условию $\xi(t_0, \overline{\eta}) = Q(\overline{\eta}, t_0)$, $\eta(t_0, \overline{\eta}) = \overline{\eta}$ и проходящее в силу этого по поверхности Ψ_-. Осуществим в уравнении (30) замену переменных $x = \xi - \xi(t, \overline{\eta})$, $y = \eta - \eta(t, \overline{\eta})$ и обозначим $w = (x, y)$. Тогда относительно w получим систему уравнений, имеющую вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F_1(t, w, \overline{\eta}), \quad \frac{dy}{dt} = \mathbb{C}y + F_2(t, w, \overline{\eta}), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta x\,|_{t=t_i} = B_i x + V_i^1(w, \overline{\eta}), \quad \Delta y\,|_{t=t_i} = V_i^2(w, \overline{\eta}), \tag{38}$$

в которой функции $F = (F_1, F_2)$, $V_i = (V_i^1, V_i^2)$ удовлетворяют соотношениям $\| F(t, w, \overline{\eta}) - F(t, \overline{w}; \overline{\eta}) \| \le l \| w - \overline{w} \|$, $\| V_i(w, \overline{\eta}) - V_i(\overline{w}, \overline{\eta}) \| \le lk(l) \| w - \overline{w} \|$, равномерно по всем $t \in R$, $t \in Z$, $w, \overline{w} \in R^n$.

Согласно лемме 3 система (38) допускает кусочно-непрерывную интегральную поверхность $\tilde{\Psi}_+$, определенную уравнением вида $y = \tilde{F}(x, t, \overline{\eta})$, в котором функция $\tilde{F}$ непрерывна по параметру $\overline{\eta}$ и удовлетворяет соотношениям $\tilde{F}(0, t, \overline{\eta}) = 0$, $t \in R$, $\| \tilde{F}(x, t, \overline{\eta}) - \tilde{F}(\overline{x}, t, \overline{\eta}) \| \le \kappa l \| x - \overline{x} \|$, где κ — постоянная, удовлетворяющая неравенству $\kappa \ge 2la^2(\nu_1 + \nu_2)$.

В следующей лемме, исходя из свойств функций Q и $\tilde{F}$, устанавливается, что поверхность Ψ_- устойчива в целом.

Лемма 5. *Для каждого решения* $z(t)$ *системы* (30) *найдется решение* $z(t, \overline{\eta})$ *этой же системы такое, что*

$$\| \xi(t) - \xi(t, \overline{\eta}) \| \le 2a \| \xi_0 - \xi(t_0, \overline{\eta}) \| e^{-\sigma(t-t_0)},$$

$$\| \eta(t) - \eta(t, \overline{\eta}) \| \le 2a\kappa l \| \xi_0 - \xi(t_0, \overline{\eta}) \| e^{-\sigma(t-t_0)}, \quad t \ge t_0.$$

Доказательство леммы 5 в общих чертах совпадает с доказательством теоремы из работы [4].

Таким же образом, с точностью до постоянных, перенеся рассуждения из [4], можно проверить на основании леммы 5, что справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть выполняются перечисленные для уравнения* (30) *условия и постоянная* l *в* (8), (9) *и* (25) *такова, что* $l \to 0$ *при* $\| z \| + \| \overline{z} \| \to 0$. *Тогда нулевое решение этой системы устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво, если таковым является нулевое решение соответствующей системы* (36).

Сформулируем теперь в силу установленного для систем (24) и (30) S-свойства следующие теоремы 3 и 4, являющиеся соответственно следствиями лемм 5 и 6.

Теорема 3. *При достаточно малом* l *интегральная поверхность* Φ_- *системы* (24) *является* B*-устойчивой в целом.*

Теорема 4. *Если система уравнений* (24) *критическая, выполняются условия* (31), (32) *и постоянная* l *такова, что в соотношениях* (8), (9) *и* (25) $l \to 0$ *при* $\| w \| + \| \overline{w} \| \to 0$, *то устойчивость, асимптотическая устойчивость или неустойчивость нулевого решения системи* (24) *имеет место тогда и только тогда, когда устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво нулевое решение системы* (35).

Сделав несложный анализ, можно убедиться, что теорема 4 имеет локальный характер. Поэтому она справедлива и в случае, когда поверхности разрыва удовлетворяют более слабым условиям из [1].

1. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О методе сравнения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, №9. – С. 1475 – 1483.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И.* Проблема "биений" в импульсных системах. – Киев, 1990. – 46 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90. 11).
4. *Черникова О. С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, №5. – С. 601 – 607.
5. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

Получено 22. 05. 92