УДК 519.21

Б. В. БОНДАРЕВ, канд. физ.-мат. наук,
А. И. ДЗУНДЗА, асп. (Донец. ун-т)

Оценки вероятностей больших уклонений в задачах оценивания расчетных воздействий. I

Пусть задано поле скоростей, описываемое некоторой функцией, зависящей как от времени, так и от точки фазового пространства. Предполагается, что поле скоростей подвержено малым случайным возмущениям, являющимся в общем случае обобщенной производной от предгауссовского процесса.

По наблюдениям за траекторией движения системы в такой случайной среде требуется восстановить заданное поле скоростей. Изучается ядерная оценка вектора скорости. Для уклонения оценки от оцениваемой величины установлены экспоненциальные неравенства С. Н. Бернштейна.

Нехай є поле швидкостей, яке дається у вигляді деякої функції від часу та точки фазового простору. Припускаємо, що на нього впливають малі випадкові збурення, які в загальному випадку мають вигляд узагальненої похідної від догаусівського процесу.

Задача полягає в тому, щоб відновити поле швидкостей, виходячи з спостережень за траєкторіями системи в такому випадковому середовищі. Вивчається ядерна оцінка вектора швидкості. Для різниці між оцінкою та величиною, яка має бути оцінювана, встановлені експоненціальні нерівності С. Н. Бернштейна.

Определим на пространстве $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ класс случайных процессов $E(\alpha; C_{[0;T]})$. Будем говорить, что процесс $\eta(t)$ принадлежит $E(\alpha; C_{[0;T]})$, если справедлива оценка

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|>r\}\leqslant k_1\exp\{-k_2r^{\alpha}\},\quad t\in[0;T],\ \forall\alpha>0, \tag{1}$$

где k_1, k_2 — некоторые абсолютные постоянные. Заметим, что классу $E(\alpha; C_{[0;T]})$ принадлежат следующие типы случайных процессов:

1) предгауссовские процессы [1, 2];

2) процессы вида

$$\eta(t)=\int_0^t\sigma(s;\ \xi(s))\,dw(s)+\int_0^t\int_x\varphi(s;\ u;\ \xi(s))\,\tilde{\nu}(ds,\ du),$$

где $t\in[0;T]$, $u\in X\subset R_n$, $\sigma(t;x)$ и $\varphi(t;u;x)$ — неслучайные функции; $w(s)$ — винеровский процесс; $\tilde{\nu}(t;A)$ — центрированная пуассоновская мера, независящая от $w(t)$; ξ_t — $\mathcal{F}_t$-измеримый случайный процесс ($\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$) — неубывающий поток σ-алгебр, относительно которого измеримы $w(s)$ и $\tilde{\nu}(t;A)$) [3];

3) стохастические интегралы

$$\eta(t)=\int_0^t\sigma(s)\,d\zeta(s),$$

где $\zeta(s)$ — предгауссовский случайный процесс, $\sigma'(s)$ — абсолютно интегрируемая функция; тогда под стохастическим интегралом указанного вида будем понимать [4]

$$\eta(t)=\sigma(s)\,\zeta(s)|_0^t-\int_0^t\sigma'(s)\,\zeta(s)\,ds;$$

4) процессы типа

$$\eta_\varepsilon(t)=\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\zeta(s)\,ds,$$

где $\zeta(s)$ — некоторый случайный процесс, удовлетворяющий условию слабой зависимости (условию равномерно сильного перемешивания или условию сильного перемешивания) [5].

Пусть наблюдаемое движение некоторой стохастической системы описывается уравнением

$$dx_\varepsilon(t)=a(t;\ x_\varepsilon(t))\,dt+\varepsilon d\eta(t), \tag{2}$$

где $x_\varepsilon(0)=x_0$; $t\in[0;T]$; $a(t;y)$ — неслучайная функция, ε — малый параметр, случайный процесс $\eta(t)$ принадлежит классу $E(\alpha; C_{[0;T]})$.

Наряду с уравнением (2) рассмотрим уравнение, описывающее движение некоторой детерминированной системы, полученное из (2) отбрасыванием малого случайного возмущения

$$dx_0(t)=a(t;\ x_0(t))\,dt. \tag{3}$$

Функцию $a(t;x_0(t))$ будем называть расчетной скоростью движения. Поставим следующую задачу: по наблюдаемой траектории $x_\varepsilon=\{x_\varepsilon(t):0\leqslant t\leqslant T\}$ движения системы (2) оценить $a(t;x_0(t))$, $0\leqslant t\leqslant T$, в частном случае, когда $a(t;x_0(t))\equiv a(t)$ есть ничто иное, как стандартная задача непараметрической оценки непрерывной регрессии. В качестве оценки расчетной скорости, как и в [4], выберем

$$a_\varepsilon(t)=\frac{1}{h_\varepsilon}\int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)dx_\varepsilon(s). \tag{4}$$

Неотрицательная функция $K_t(u)$ в (4) удовлетворяет условиям

A) $\frac{1}{h_\varepsilon}\int\limits_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)ds = 1;$

B) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_t^\varepsilon(u)\,|u|\,du = c_1 < +\infty;$

C) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K_t'(u)|\,du = c_2 < +\infty.$

Ниже будет получена оценка вида

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{|a_\varepsilon(t) - a(t;\ x_0(t))|}{\sqrt{\varepsilon}} > R\right\} \leqslant k_1 \exp\{-k_2 R^\alpha\}.$$

Прежде, чем изучать свойства функции $x_\varepsilon(t)$, естественно изучить вопрос существования и единственности с вероятностью 1 траектории объекта, движущегося в соответствии с уравнением

$$dx(t) = a(t;\ x(t))\,dt + d\eta(t), \quad x(0) = x_0.$$

Теорема 1. *Если функция $a(t;\ y)$ удовлетворяет условиям*

$$|a(t;\ y_2) - a(t;\ y_1)| \leqslant L\,|y_2 - y_1|,$$

$$|a(t;\ y)| \leqslant M(1 + |y|),$$

случайный процесс $\eta(t)$ принадлежит классу $E(\alpha;\ C_{[0;\ T]})$, то решение задачи (5) существует и единственно.

Доказательство. Существование решения задачи (5) докажем с помощью метода последовательных приближений. Пусть

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int\limits_0^t a(s;\ x_n(s))\,ds + \eta(t); \quad x_0(t) \equiv x_0. \tag{5}$$

Так как справедливы неравенства

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leqslant M(1 + |x_0|)T + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leqslant (M(1 + |x_0|)T + \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|)\frac{(Lt)^n}{n!},$$

то последовательность приближений $\{x_n(t)\}$ в равномерной метрике имеет предел. Обозначим этот предел $x(t)$.

Покажем, что $x_n(t)$ сходится с $P = 1$ к $x(t)$. Так как $x(t) = \sum\limits_{i=k}^{\infty}[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + x_k(t)$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t) - x_k(t)| > \varepsilon\} = \sum_{k=n}^{\infty} P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{i=k}^{\infty}|x_i(t) - x_{i-1}(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sum_{i=k}^{\infty}|\eta(t)| > \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{(lT)^i}{i!}} - MT(1 + |x_0|)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant k_1 \sum_{k=n}^{\infty} \exp\left\{-\frac{k_2\varepsilon}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{(LT)^i}{i!}}\right\} = k_1 \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(LT)^i}{i!}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{(LT)^i}{i!}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{k_2\varepsilon}{\sum\limits_{i=k}^{\infty}\frac{(LT)^i}{i!}}\right\}, \qquad \alpha = 1.$$

Но поскольку $\frac{1}{r}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{r}\right\} \leqslant \frac{1}{\varepsilon e}$ при $r > 0$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty} P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t) - x_k(t)| > \varepsilon\} \leqslant k_1 \frac{1}{\varepsilon e}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(LT)^i}{i!}.$$

С учетом того, что $i! \geqslant \sqrt{2\pi i}e^{-i}i^i$, имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t) - x_k(t)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{k_1}{\varepsilon e}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\left(\frac{LTe}{i}\right)^i \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \leqslant \frac{k_1}{\varepsilon e\sqrt{2\pi k}}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\left(\frac{LTe}{i}\right)^i.$$

Положим теперь $\frac{LTe}{i} \leqslant \frac{1}{2}$ или $i \geqslant 2LTe$. Тогда внутренняя сумма мажорируется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{k_1}{\varepsilon e\sqrt{2\pi k}}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}\left(\frac{LTe}{i}\right)^i \leqslant \frac{k_1}{\varepsilon e\sqrt{2\pi k}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2k_1}{\varepsilon e\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2 = \frac{4k_1}{\varepsilon e\sqrt{2\pi k}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Переходя в соотношении (5) к пределу, убеждаемся в том, что $x(t)$ — решение исходного уравнения.

Очевидно, что для $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ справедливо неравенство

$$z(t) \leqslant L\int_0^t z(s)\,ds.$$

Далее, так как $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|z(t)| \leqslant L\int_0^t \sup\limits_{0\leqslant\tau\leqslant s}|z(\tau)|\,d\tau$, то $z(t) = 0$ с $P = 1$. Теорема доказана.

К тривиальным, но более громоздким рассуждениям приводит случай $0 < \alpha < 1$, $\alpha > 1$.

Теорема 2. *Пусть функция* $K_t^{\varepsilon}(u)$ *удовлетворяет условиям* A) — C), $\eta(t) \in E(\alpha; C_{[0;T]})$, $\eta(0) = 0$, *а* $a(t; y)$ — *неслучайная функция такая, что*

$$|a(t;\ y)| \leqslant C(1 + |y|),$$
$$|a(t;\ y) - a(s;\ x)| \leqslant L(|y - x| + |t - s|).$$

Тогда справедлива оценка

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\frac{|a_\varepsilon(t) - a(t;\ x_0(t))|}{\sqrt{\varepsilon}} > N_1 + N_2(\varepsilon)r\right\} \leqslant k_1\exp\{-k_2r^{\alpha}\}, \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

где

$$N_1 = L(1 + C(1 + |x_0| + CT)) \exp\{CT\} C_1,$$
$$N_2 = L\sqrt{\varepsilon} \exp\{LT\} + 2C_2 + K_t^\varepsilon(0).$$

Доказательство. Для исследуемой разности $a_\varepsilon(t) - a(t;\ x_0(t))$ справедливо

$$|a_\varepsilon(t) - a(t;\ x_0(t))| = \left| \frac{1}{h_\varepsilon} \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) a(s;\ x_\varepsilon(s))\, ds + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon} \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) d\eta(s) - a(t;\ x_0(t)) \right| \leqslant \frac{1}{h_\varepsilon} \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) |a(s;\ x_\varepsilon) -$$

$$- a(t;\ x_0(t))|\, ds + \left| \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon} \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) d\eta(s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{h_\varepsilon} \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) (|t-s| + |x_\varepsilon(s) - x_0(s)| + |x_0(s) - x_0(t)|)\, ds +$$

$$+ \left| \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon} \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) d\eta(s) \right|. \tag{7}$$

Получим оценку сверху для разности $|x_\varepsilon(s) - x_0(s)|$, фигурирующей в последнем соотношении:

$$|x_\varepsilon(s) - x_0(s)| \leqslant \int_0^s |a(u;\ x_\varepsilon(u)) - a(u;\ x_0(u))|\, du + \varepsilon |\eta(s)| \leqslant$$

$$\leqslant L \int_0^s |x_\varepsilon(u) - x_0(u)|\, du + \varepsilon \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |\eta(s)|. \tag{8}$$

Применяя лемму Гронуолла, имеем

$$|x_\varepsilon(s) - x_0(s)| \leqslant \varepsilon \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} |\eta(s)| \exp\{LT\}.$$

Разность $|x_0(s) - x_0(t)|$ легко оценивается сверху после применения леммы Гронуолла в следующей цепочке:

$$|x_0(t) - x_0(s)| \leqslant \int_s^t |a(\tau;\ x_0(\tau)|\, d\tau \leqslant C \int_s^t (1 + |x_0(\tau)|)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C|t-s| + C \int_s^t |x_0(\tau)|\, d\tau.$$

Учитывая, что $|x_0(\tau)| \leqslant (|x_0| + CT) \exp\{CT\}$, окончательно имеем

$$|x_0(t) - x_0(s)| \leqslant C(1 + |x_0| + CT) \exp\{CT\} |t-s|. \tag{9}$$

Подставляя (8) и (9) в (7), получаем

$$|a_\varepsilon(t) - a(t;\ x_0(t))| \leqslant \frac{L}{h_\varepsilon} (1 + C(1 + |x_0| + CT) \exp\{CT\}) \times$$

$$\times \int_0^t K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) |t-s|\, ds + \frac{L\varepsilon}{h_\varepsilon} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\eta(t)| \exp\{LT\} \times$$

$$\times \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) ds + \left| \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon} \int_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right) d\eta(s) \right|. \tag{10}$$

С учетом свойств A) и B) функции $K_t^\varepsilon(u)$ из (10) получим

$$|a_\varepsilon(t) - a(t; x_0(t))| \leqslant Lh_\varepsilon(1 + C(1 + |x_0| + CT)\exp\{CT\}) \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{t-T}{h_\varepsilon}}^{\frac{t}{h_\varepsilon}} |u| K_t^\varepsilon(u)\,du + L\varepsilon\exp\{LT\} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\eta(t)| +$$

$$+ \left|\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon}\int\limits_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)d\eta(s)\right| \leqslant Lh_\varepsilon(1 + C(1 + |x_0| + CT)\exp\{CT\}C_1 +$$

$$+ L\varepsilon\exp\{LT\}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)| + \left|\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon}\int\limits_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)d\eta(s)\right|. \qquad (11)$$

Проинтегрируем по частям последнее слагаемое в (11). С учетом свойства C) функции $K_t^\varepsilon(u)$ будем иметь

$$\left|\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon}\int\limits_0^T K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)d\eta(s)\right| = \left|\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon} K_t^\varepsilon\left(\frac{t-T}{h_\varepsilon}\right)\eta(T) +\right.$$

$$\left.+ \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2}\int\limits_0^T K_t'\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)\eta(s)\,ds\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon}(2C_2 + K_t^\varepsilon(0))\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|. \qquad (12)$$

Подставляя теперь (12) в (11) и полагая $h_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$, находим

$$\frac{|a_\varepsilon(t) - a(t; x_0(t)|}{\sqrt{\varepsilon}} \leqslant N_1 + N_2(\varepsilon)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta(t)|,$$

откуда с учетом (1) получаем оценку (6). Теорема доказана.

Замечание. В качестве примера ядра $K_t^\varepsilon(u)$ рассмотрим функцию

$$K_t^\varepsilon(u) = C_\varepsilon(t) = \exp\{-u^2\},$$

где

$$C_\varepsilon(t) = \frac{h_\varepsilon}{\int\limits_{t-T/h_\varepsilon}^{t/h_\varepsilon} \exp\{-z^2\}\,dz}.$$

Выполнение свойства A) очевидно. Легко проверить, что выполнены свойства B) и C):

$$\int\limits_{\frac{t-T}{h_\varepsilon}}^{t/h_\varepsilon} K_t^\varepsilon(u)|u|\,du \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_t^\varepsilon(u)|u|\,du \leqslant \frac{h_\varepsilon}{\int\limits_0^T e^{-z^2}dz} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u|e^{-u^2}du = \frac{h_\varepsilon}{\int\limits_0^T e^{-z^2}dz} = C_1 < +\infty.$$

Далее, так как $K_t^\varepsilon\left(\frac{T-t}{h_\varepsilon}\right) \leqslant \dfrac{\exp\left(\frac{T-t}{h_\varepsilon}\right)^2}{\int\limits_0^T \exp(-z^2)\,dz}$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial s}K_t^\varepsilon\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)\right|ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial u}K_t(u)\right|_{u=\frac{t-s}{h_\varepsilon}}\cdot\frac{1}{h_\varepsilon}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(t-s)^2}{h_\varepsilon^2}\right)}{\int\limits_0^T \exp(-z^2)\,dz}\, d\left(\frac{t-s}{h_\varepsilon}\right)^2 \leqslant \frac{\int\limits_{t-T/h_\varepsilon}^{t/h_\varepsilon} e^{-u^2}du^2}{\int\limits_0^T \exp(-z^2)\,dz} = C_2.$$

Пусть теперь $\eta(t;\ s)$ — случайный процесс из класса $E(\alpha;\ C_{[0;T]}\times C_{[0;S]})$, т. е. такой, что для любого α

$$P\{\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ 0\leqslant s\leqslant S}} |\eta(t;\ s)| > r\} \leqslant k_1 \exp\{-k_2 r^\alpha\}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь задачу Гурса в области $[0;\ T]\times[0;\ S]$ для стохастического дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2\xi_\varepsilon(t;\ s)}{\partial t\partial s} = a(t;\ s;\ \xi_\varepsilon(t;\ s)) + \varepsilon\frac{\partial^2\eta(t;\ s)}{\partial t\partial s},$$

$$\xi(0;\ s) = \varphi(s),\quad \xi(t;\ 0) = \psi(t), \tag{14}$$

$$|\varphi(s)| \leqslant l_1,\quad |\psi(t)| \leqslant l_2,\quad \varphi(0) = \psi(0) = \xi_0$$

$$\forall s,\quad t\in[0;\ S]\times[0;\ T].$$

Нетрудно убедиться в том, что для задачи (14) имеет место аналог теоремы 1, поэтому на вопросах существования и единственности решения останавливаться не будем.

В (13) $a(t;\ s;\ y)$ — неслучайная функция, удовлетворяющая условиям

$$|a(t;\ s;\ y) - a(u;\ v;\ x)| \leqslant L(|t-u| + |s-v| + |y-x|), \tag{15}$$

и

$$|a(t;\ s;\ y)| \leqslant C(1+|y|).$$

Как и ранее, наряду с уравнением (14) рассмотрим «укороченное» уравнение $\frac{\partial^2\xi_0(t;\ s)}{\partial t\partial s} = a(t;\ s;\ \xi_0(t;\ s))$, и оценку $a_\varepsilon(t;\ s)$ расчетной скорости $a(t;\ s;\ \xi_0(t;\ s))$ зададим следующим образом:

$$a_\varepsilon(t;\ s) = \frac{1}{h_\varepsilon^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^S K_1^\varepsilon\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right) K_2^\varepsilon\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right)\frac{\partial^2\xi_\varepsilon(u;\ v)}{\partial u\partial v}\,du dv.$$

Функции $K_1^\varepsilon(u)$ и $K_2^\varepsilon(v)$ удовлетворяют условиям A) — C), приведенным выше.

Теорема 3. *Пусть функция $a(t;\ s;\ y)$ удовлетворяет условиям* (14), (15), $\eta(t;\ s)$ *принадлежит классу* $E(\alpha;\ C_{[0;T]}\times C_{[0;S]})$. *Тогда уклонение оценки расчетной скорости от $a(t;\ s;\ \xi_0(t;\ s))$ описывается неравенством*

$$P\left\{\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\ 0\leqslant s\leqslant S}} \frac{|a_\varepsilon(t;\ s) - a(t;\ s;\ \xi_0(t;\ s)|}{\sqrt[3]{\varepsilon}} > N_1 + N_2(\varepsilon)\, r\right\} \leqslant k_1 e^{-k_2 r^\alpha} \tag{16}$$

для любого $\alpha > 0$, где

$$N_1 = LC_1(2 + C(1 + |\xi_0| + CTS))(T+S)\exp\{CTS\},$$

$$N_2(\varepsilon) = L(\sqrt[3]{\varepsilon^2}\exp\{LTS\} + C_2^2 + (C_2 + K_2(0))\times$$
$$\times(2C_2 + K_1(0)) + C_2(C_2 + K_1(0)).$$

Доказательство проведем аналогично доказательству теоремы 2. Имеем

$$|a_\varepsilon(t;\ s) - a(t;\ s;\ \xi_0(t;\ s))| \leqslant \frac{1}{h_\varepsilon^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^S K_1^\varepsilon\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right) K_2^\varepsilon\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right)|a(u;\ v;\ \xi_\varepsilon) -$$

$$- a(t;\ s;\ \xi_0(t;\ s))|\, dudv + \left| \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2} \int_0^T \int_0^S K_1^\varepsilon\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right) K_2^\varepsilon\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \eta(u;\ v)}{\partial u \partial v}\, dudv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L}{h_\varepsilon^2} \int_0^T \int_0^S K_1^\varepsilon\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right) K_2^\varepsilon\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right) (|t-u| + |s-v| + |\xi_\varepsilon(u;\ v) -$$

$$- \xi_0(u;\ v)| + |\xi_0(u;\ v) - \xi_0(t;\ s)|)\, dudv +$$

$$+ \left| \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2} \int_0^T \int_0^S K_1^\varepsilon\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right) K_2^\varepsilon\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \eta(u;\ v)}{\partial u \partial v}\, dudv \right|. \qquad (17)$$

Получим оценку сверху для $|\xi_\varepsilon(u;\ v) - \xi_0(u;\ v)|$. Так как

$$|\xi_\varepsilon(u;\ v) - \xi_0(u;\ v)| \leqslant L \int_0^u \int_0^v |\xi_\varepsilon(t;\ s) - \xi_0(t;\ s)|\, dsdt + \varepsilon \sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant S \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |\eta(t;\ s)|,$$

то после применения леммы Гронуолла имеем

$$|\xi_\varepsilon(u;\ v) - \xi_0(u;\ v)| \leqslant \varepsilon \sup_{\substack{0 \leqslant u \leqslant T \\ 0 \leqslant v \leqslant S}} |\eta(u;\ v)| \exp\{LTS\}. \qquad (18)$$

Далее, так как

$$|\xi_0(\tau;\ z)| \leqslant |\xi_0| + C \int_0^\tau \int_0^z |1 + \xi_0(u;\ v)|\, dudv \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_0| + CTS + C \int_0^T \int_0^S |\xi_0(u;\ v)|\, dudv,$$

или с учетом леммы Гронуолла

$$|\xi_0(\tau;\ z)| \leqslant (|\xi_0| + CTS) \exp\{CTS\},$$

то для $\xi_0(t;\ s) - \xi_0(u;\ v)$ справедливо

$$|\xi_0(t;\ s) - \xi_0(u;\ v)| = \left| \int_0^t \int_0^s a(\tau;\ z;\ \xi_0)\, d\tau dz - \int_0^u \int_0^v a(\tau;\ z;\ \xi_0)\, d\tau dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_v^s \int_0^t |a(\tau;\ z;\ \xi_0)|\, dzd\tau + \int_u^t \int_0^v |a(\tau;\ z;\ \xi_0(\tau;\ z)|\, dzd\tau \leqslant$$

$$\leqslant C \int_v^s \int_0^t (1 + |\xi_0(\tau;\ z)|)\, dzd\tau + C \int_u^t \int_0^v (1 + |\xi_0(\tau;\ z)|)\, dzd\tau \leqslant CT|s-v| +$$

$$+ CS|t-u| + C \int_v^s \int_0^t |\xi_0(\tau;\ z)|\, dzd\tau + C \int_u^t \int_0^v |\xi_0(\tau;\ z)|\, dzd\tau,$$

или окончательно

$$|\xi_0(t;\ s) - \xi_0(u;\ v)| \leqslant CT(1 + |\xi_0| + CTS) \exp\{CTS\} |s-v| +$$
$$+ CS(1 + |\xi_0| + CTS) \exp\{CTS\} |t-u|. \qquad (19)$$

Применяя теперь во втором слагаемом правой части соотношения (17) двухмерную формулу интегрирования по частям, с учетом условий А)— С) получаем

$$\left| \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2} \int_0^T \int_0^S K_1^\varepsilon\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right) K_2^\varepsilon\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right) \frac{\partial^2 \eta(u;\ v)}{\partial u \partial v}\, dudv \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^4} \int_0^T \int_0^S K_1'\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right) K_2'\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right) \eta(u;\ v)\, dudv \right| +$$

$$+\left|\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^3}\int_0^T K_1'\left(\frac{t-u}{h_\varepsilon}\right)K_2\left(\frac{s-S}{h_\varepsilon}\right)\eta(u;S)\,du\right.+$$
$$+\left|\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^3}\int_0^S K_1^\varepsilon\left(\frac{t-T}{h_\varepsilon}\right)K_2'\left(\frac{s-v}{h_\varepsilon}\right)\eta(T;v)\,dv\right|+$$
$$+\left|\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2}K_1^\varepsilon\left(\frac{t-T}{h_\varepsilon}\right)K_2^\varepsilon\left(\frac{S-s}{h_\varepsilon}\right)\eta(T;S)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left[C_2^2\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2}+C_2(C_2+K_2^\varepsilon(0))\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2}+C_2(C_2+K_1^\varepsilon(0))\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2}+\right.$$
$$\left.+(C_2+K_1^\varepsilon(0))(C_2+K_2^\varepsilon(0))\frac{\varepsilon}{h_\varepsilon^2}\right]\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\0\leqslant s\leqslant S}}|\eta(t;s)|. \tag{20}$$

Подставляя теперь (18) — (20) в (17) и полагая $h_\varepsilon=\sqrt[3]{\varepsilon}$, получаем

$$\frac{|a_\varepsilon(t;s)-a(t;s;\xi_0(t;s)|}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\leqslant N_1+N_2(\varepsilon)\sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant T\\0\leqslant s\leqslant S}}|\eta(t;s)|.$$

С учетом (15) из последнего неравенства легко получается (16). Теорема доказана.

Заметим, что в неравенство (6) вкладывается следующий смысл: при достаточно большом R с вероятностью $1-\gamma$ расчетная скорость $a(t;x_0(t))$ удовлетворяет соотношению

$$a_\varepsilon(t)-\sqrt{\varepsilon}R<a(t;x_0(t))<a_\varepsilon(t)+\sqrt{\varepsilon}R,$$

т. е. расчетная скорость лежит в достаточно узкой «доверительной» полосе. Аналогичный вывод можно сделать и в задаче Гурса.

1. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* О локальных свойствах реализаций случайных процессов и полей // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1974.— Вып. 10.— С. 10—14.
2. *Дмитровский В. А.* О распределении максимума и локальных свойствах реализаций предгауссовских полей // Там же.— 1981.— Вып. 25.— С. 154—164.
3. *Бондарев Б. В.* Об усреднении стохастических систем при слабо зависимых возмущениях // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 5.— С. 593—600.
4. *Бондарев Б. В.* К вопросу о скорости сходимости в принципе усреднения // Теория случайн. процессов.— 1980.— Вып. 8.— С. 7—16.
5. *Бондарев Б. В.* Об усреднении в стохастических системах с зависимостью от всего прошлого // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 4.— С. 443—451.
6. *Деврой П., Дьерфи Л.* Непараметрическое оценивание плотности.— М. : Мир, 1988.— 407 с.

Получено 02.03.90