УДК 517.5

*Е. К. Крутиголова*

# Об условиях разложимости аналитических функций в ряды Дирихле в полуплоскости

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями $\lambda_n$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющая условию

$$L(\lambda) = O(1/\lambda^{\alpha}), \quad 0 < \lambda < \infty, \quad \alpha > 1. \tag{1}$$

Возьмем произвольную функцию $f(z)$, аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ и непрерывную в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 0$. Пусть при больших $|z|$ из полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ функция $f(z)$ удовлетворяет условию

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{\mu}}\right), \quad \mu > 1. \tag{2}$$

Сопоставим функции $f(z)$ ряд Дирихле

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\lambda_n z}, \tag{3}$$

где

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} f(t)\, \psi_n(t)\, dt, \quad n \geqslant 1, \tag{4}$$

и

$$\psi_n(t) = \frac{1}{L'(\lambda_n)} \int_0^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} e^{-\lambda t} d\lambda.$$

В работе [1, с. 503] установлены достаточные условия для возможности представления функции $f(z)$ рядом (3) в полуплоскости $D = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

Для возможности представления произвольной аналитической функции рядом Дирихле в конечной выпуклой области или во всей плоскости необходимо и достаточно [1, с. 289, 475], чтобы выполнялось условие

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}, \quad z \in D, \quad \lambda \text{ — любое}, \tag{5}$$

а в случае конечной области — эквивалентное (5) условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n z}/L'(\lambda_n) = 0, \quad z \in D. \tag{6}$$

Ниже устанавливаются необходимые и достаточные условия для сходимости рядов (5) и (6) в полуплоскости $D$, а также приводятся необходимые и достаточные условия для представления в $D$ произвольной аналитической в $D$ и непрерывной на $\overline{D}$ функции $f(z)$ рядом вида (3).

Для того чтобы полуплоскость $D = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ была областью сходимости ряда (3), необходимо наложить определенные условия на расположение нулей функции $L(\lambda)$, ибо одно лишь условие (1) этого не обеспечивает. Будем предполагать, что:

а) нули $\lambda_n'$ функции $L(\lambda)$, расположенные в правой полуплоскости, лежат на действительной оси;

б) нули $\lambda_n''$ функции $L(\lambda)$, расположенные в левой полуплоскости, лежат в угле $\pi/2 < \theta_2 < \arg \lambda_n'' < \theta_1 < 3\pi/2$, $\{\lambda_n\} = \{\lambda_n'\} \cup \{\lambda_n''\}$;

в) $\varlimsup_{n\to\infty} \dfrac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} = \tau, \quad \tau < \infty, \quad \rho > 1.$

Пример целой функции $L(\lambda)$, удовлетворяющей приведенным выше условиям, построен в [1, с. 506].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями $\lambda_n$, $n \geqslant 1$, удовлетворяющая условию* (1), *и нули которой удовлетворяют условиям* а)—в). *Тогда для абсолютной сходимости каждого из рядов* (5) *и* (6) *в полуплоскости $D$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$|L'(\lambda_n')| > e^{-\varepsilon|\lambda_n'|}, \quad \varepsilon > 0 — \textit{любое}, \quad n > n_0(\varepsilon), \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|L'(\lambda_n'')|}{|\lambda_n''|} = \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ряд (5) сходится абсолютно в $D$. Тогда при любом фиксированном $\lambda \neq \lambda_n$, $n \geqslant 1$, имеем

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)} \right| < C, \quad C = C(z), \quad \operatorname{Re} z < 0,$$

или

$$|e^{\lambda_n z}/L'(\lambda_n)| < C_1|\lambda - \lambda_n|, \quad n \geqslant 1, \quad C_1 = C/|L(\lambda)|.$$

Поэтому

$$|L'(\lambda_n)| > e^{\lambda_n z}|e^{-\ln C_1|\lambda - \lambda_n|} = e^{\lambda_n\left(z - \frac{\ln C_1|\lambda - \lambda_n|}{\lambda_n}\right)}. \tag{9}$$

Пусть теперь $\lambda_n = \lambda_n'$, $\lambda_n > 0$, $n \geqslant 1$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при $n > N(\varepsilon)$ будет $\dfrac{\ln C_1|\lambda - \lambda_n'|}{\lambda_n'} < \varepsilon/2$.

Выберем точку $z = x$ так, чтобы выполнялось неравенство $-\varepsilon/2 < x < 0$, тогда $e^{\lambda_n'\left(x - \frac{\ln C_1|\lambda - \lambda_n'|}{\lambda_n'}\right)} > e^{-\varepsilon\lambda_n'}$, $n > N(\varepsilon)$. Из неравенства (9) получим $|L'(\lambda_n')| > e^{-\varepsilon\lambda_n'}$, $n > N(\varepsilon)$.

Пусть $\lambda_n = \lambda_n'' = |\lambda_n''|(\cos\varphi_n'' + i\sin\varphi_n'')$, $n \geqslant 1$. В силу условия б) $\cos\varphi_n'' < -\gamma < 0$, $n \geqslant 1$. При $z = x$, $x < 0$ для $\lambda_n = \lambda_n''$ неравенство (9) имеет вид

$$|L'(\lambda_n'')| > e^{|\lambda_n''|\left(x\cos\varphi_n'' - \frac{\ln C_1|\lambda - \lambda_n''|}{|\lambda_n''|}\right)}.$$

Так как $x\cos\varphi_n'' > 0$, $n \geqslant 1$, и $\dfrac{\ln C_1|\lambda - \lambda_n''|}{|\lambda_n''|} \to 0$ при $n \to \infty$, то каково бы ни было число $p > 0$, точку $z = x < 0$ можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $x\cos\varphi_n'' - \dfrac{\ln C_1|\lambda - \lambda_n''|}{|\lambda_n''|} > p$. Следовательно, имеем $|L'(\lambda_n'')| > e^{p|\lambda_n''|}$, $n > N_1(p)$, или $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln|L'(\lambda_n'')|}{|\lambda_n''|} = +\infty$. Этим доказана необходимость условий (7) и (8) для абсолютной сходимости в $D$ ряда (5).

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше, убедимся, что условия (7) и (8) необходимы для абсолютной сходимости в $D$ ряда (6).

Достаточность. При фиксированном $\lambda \neq \lambda_n$, $n \geqslant 1$, имеем

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)} \right| < \bar{C} \left| \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)} \right|, \quad \bar{C} = \bar{C}(\lambda), \quad n \geqslant 1, \quad z \in D. \tag{10}$$

Поэтому из абсолютной сходимости ряда (6) при $\operatorname{Re} z < 0$ следует абсолютная сходимость в $D$ ряда (5). Следовательно, нам осталось доказать достаточность условий (7) и (8) для абсолютной сходимости в $D$ ряда (6). Пус $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, тогда в силу (7) получим

$$\left| \frac{e^{\lambda'_n z}}{L'(\lambda'_n)} \right| = \left| \frac{e^{x_0 \lambda'_n}}{L'(\lambda'_n)} \right| < e^{\lambda'_n (x_0+\varepsilon)} < e^{-\delta\lambda'_n}, \ x_0 < 0, \ \delta > 0, \ n > N_1(\varepsilon),$$

так как $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число.

Аналогично в силу (8) имеем

$$\left| e^{\lambda''_n z_0} / L'(\lambda''_n) \right| = e^{(x_0 \cos\varphi''_n - y_0 \sin\varphi''_n)|\lambda''_n|} / |L'(\lambda''_n)| < e^{|\lambda''_n|(x_0\cos\varphi''_n - y_0 \sin\varphi''_n - p)} < e^{-p_1|\lambda''_n|}$$
$$p_1 > 0,$$

так как $p > 0$ — произвольно большое число, и $|x_0 \cos \varphi''_n - y_0 \sin \varphi''_n| \cdot$ $< |x_0| + |y_0| < p$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями* $\lambda$ $n \geqslant 1$, *удовлетворяющая условию* (1), *нули которой удовлетворяют услов ям* а)—в). *Если функция $e^{\Lambda z}$, как функция $\lambda$, при $z \in D$ представима рядс Лагранжа*

$$e^{\lambda z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}, \qquad (1$$

*то произвольная аналитическая в $D$, непрерывная в $\overline{D}$, и удовлетворяющая $\overline{D}$ условию* (2) *функция представима в $D$ рядом* (3), *в котором $\lambda_n$, $n \geqslant 1$,- нули функции* (1), *и коэффициенты вычисляются по формуле* (4).

Доказательство. Пусть $\Gamma_n$ — замкнутый контур, внутри которо лежат нули $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — функции $L(\lambda)$, и $D_{\Gamma_n}$ — область, ограниченн контуром $\Gamma_n$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_n) = L(\lambda) \sum_{\lambda_k \in D_{\Gamma_n}} \frac{e^{\lambda_k z}}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} - e^{\lambda z}, \quad z \in D.$$

В силу представления (11) имеем

$$\Phi(z, \lambda, \Gamma_n) = - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}, \quad z \in D.$$

Это целая функция относительно $\lambda$, причем на $[0; \infty]$ она ведет себя к $O(1/\lambda^{\alpha+1})$. Положим

$$\gamma(z, t, \Gamma_n) = \int_0^{\infty} \Phi(z, \lambda, \Gamma_n) e^{-\lambda t} d\lambda, \ \operatorname{Re} t \geqslant 0.$$

Запишем формулу для разности между $f(z)$ и частной суммой ряда ( [1, с. 502]:

$$f(z) - \sum_{\lambda_k \in D_{\Gamma_n}} A_k e^{\lambda_k z} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \gamma(z, t, \Gamma_n) f(t) dt. \qquad (1$$

Нам нужно оценить функцию $|\gamma(z, t, \Gamma_n)|$. Для этого будем оценива функцию $|\Phi(z, \lambda, \Gamma_n)|$ при $0 \leqslant \lambda < \infty$.

Если $\lambda_n = \lambda''_n$, $n \geqslant 1$, то $|\lambda - \lambda''_n| > \delta_1 > 0$. Тогда

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda''_n} \right| < \delta_2 |L(\lambda)| < \frac{\delta_3}{1 + \lambda^{\alpha}}, \quad \delta_2 = \text{const}, \quad \delta_3 = \text{const}, \quad \lambda \geqslant 0. \quad (1$$

Пусть $z \in F$, $F = \{z : \operatorname{Re} z \leqslant \beta < 0,\ |z| \leqslant R,\ R > 0\}$. Так как ряд (11) сходится абсолютно в $D$, то согласно теореме 1 выполняется условие (8). Учитывая оценку (13), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k''} \frac{e^{\lambda_k'' z}}{L'(\lambda_k'')} \right| < \frac{C_4}{1+\lambda^\alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-|\lambda_k''|(p-R)}, \quad z \in F,\ p > R,\ C_4 = \text{const}.$$

Выберем $p = R + 2$, тогда сумма ряда справа будет меньше $e^{-|\lambda''_{n+1}|}$ при $n > \bar{n}(R)$ и, следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k''} \frac{e^{\lambda_k'' z}}{L'(\lambda_k'')} \right| < \frac{C_4}{1+\lambda^\alpha} e^{-|\lambda''_{n+1}|}, \quad n > \bar{n}(R), \quad z \in F. \tag{14}$$

Пусть теперь $\lambda_n = \lambda_n'$, $n \geqslant 1$. Убедимся в том, что справедлива оценка

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n'} \right| < \frac{B_1 (\lambda_n')^\alpha}{1+\lambda^\alpha}, \quad 0 \leqslant \lambda < \infty, \quad B_1 = \text{const}. \tag{15}$$

Рассмотрим интервалы $O(\lambda_n') : |\lambda - \lambda_n'| < \dfrac{1}{(\lambda_n')^\alpha}$, $n \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 0$.

Если $\lambda \notin O(\lambda_n')$, то $\left| \dfrac{1}{\lambda - \lambda_n'} \right| < (\lambda_n')^\alpha$, $n \geqslant 1$, $\alpha > 1$. И поскольку в силу условия (1)

$$|L(\lambda)(1+\lambda^\alpha)| < A_1, \text{ то } \left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n'} \right| < \frac{A_1 (\lambda_n')^\alpha}{1+\lambda^\alpha}, \quad \lambda \notin O(\lambda_n'), \quad A_1 = \text{const},$$
$$n \geqslant 1, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Пусть $\lambda \in O(\lambda_n')$. При каждом фиксированном $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$L(\lambda) = \int_{\lambda_n'} L'(t)\, dt,$$

откуда

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n'} \right| \leqslant \max_{t \in [\lambda_n'; \lambda]} |L'(t) = |L'(t_n^0)|, \quad t_n^0 \in [\lambda_n'; \lambda], \quad n \geqslant 1.$$

В силу условия (1) и дифференциальных свойств асимптотических оценок [2, с. 21—23] $|L'(\lambda)| < B_2$, $B_2 = \text{const}$, $0 \leqslant \lambda < \infty$. Кроме того, при $\lambda \in O(\lambda_n')$ будет $1 + \lambda^\alpha < B_3 (\lambda_n')^\alpha$, $B_3 = \text{const}$, поэтому

$$\left| \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n'} \right| < \frac{B_4 (\lambda_n')^\alpha}{1+\lambda^\alpha}, \quad \lambda \in O(\lambda_n'), \quad n \geqslant 1, \quad B_4 = \text{const}.$$

С помощью этих оценок аналогично предыдущему убедимся, что ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left| \dfrac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k'} \dfrac{e^{\lambda_k' z}}{L'(\lambda_k')} \right|$, $z \in F$, $\lambda \geqslant 0$, сходится и сумма его меньше $\dfrac{C_5 e^{-\beta_1 \lambda'_{n+1}}}{1+\lambda^\alpha}$. Из этих оценок находим $|\gamma(z, t, \Gamma_n| < C_6 e^{-\delta_1 |\lambda_{n+1}|}$, $C_6 = \text{const}$, $\delta_1 \geqslant 0$.

Учитывая условие (2), получаем

$$\left| \int\limits_{-\infty i}^{\infty i} \gamma(z, t, \Gamma_n) f(t)\, dt \right| < C_7 e^{-\delta_1|\lambda_n+1|}, \quad C_7 = \mathrm{const}, \quad n \geqslant 1, \quad z \in F. \quad (16)$$

Таким образом, в силу (12) имеем $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k e^{\lambda_k z}$, $z \in D$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. С помощью оценок (13) и (15) можно показать, что если выполнены условия (7) и (8), то для произвольной аналитической в $D$, непрерывной в $\overline{D}$ и удовлетворяющей в $\overline{D}$ условию (2) функции $f(z)$ соответствующий ряд (3), в котором $\lambda_n$ — нули целой функции (1), сходится в $D$.

Однако, как будет показано ниже, условия (7) и (8) не гарантируют сходимости этого ряда в $D$ именно к своей функции.

В связи с теоремой 2 возникает вопрос: при каких условиях функция $f(z) = e^{\lambda z}$ при фиксированном $\lambda$ представима в $D$ рядом (5)? Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы функция $e^{\lambda z}$ при любом фиксированном $\lambda$ была представима в $D$ рядом* (5), *в котором $\lambda_n$ — нули целой функции* (1), *удовлетворяющие условиям* а)—в), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (7) *и* (8), *а также условия*:

1) *существуют окружности $|\lambda| = q_k$, $q_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, на которых*

$$\varliminf_{k\to\infty} \min_{|\lambda|=q_k} \frac{\ln|L(\lambda)|}{|\lambda|} \geqslant 0, \quad \varliminf_{k\to\infty} \min_{|\lambda|=q_k} \frac{\ln|L(\lambda)|}{|\lambda|} = +\infty, \quad |\arg\lambda| < \gamma_1,$$

$$0 < \gamma < \pi/2, \quad \gamma \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \pi;$$

2) *существуют окружности $G_k$, $k \geqslant 1$, с центрами в точках $\lambda = q_k$ и радиусами $he^{-h_1 q_k}$, $h_1 > 0$, $h > 0$, на которых*

$$\varliminf_{k\to\infty} \min_{\lambda\in G_k} \frac{\ln|L(\lambda)|}{|\lambda|} \geqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала достаточность условий теоремы. Заметим, что достаточность условий (7) и (8) для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_n} \frac{e^{\lambda_n z}}{L'(\lambda_n)}$ при $\operatorname{Re} z < 0$ и фиксированном $\lambda$ установлена в теореме 1. Нужно лишь убедиться, что сумма этого ряда совпадает с функцией $e^{\lambda z}$.

Согласно определению функции $\Phi(z, \lambda, \Gamma_n)$ имеем

$$e^{\lambda z} - L(\lambda) \sum_{\lambda_k \in D_{\Gamma_n}} \frac{e^{\lambda_k z}}{(\lambda-\lambda_k) L'(\lambda_k)} = -\Phi(z, \lambda, \Gamma_n), \quad \lambda \notin D_{\Gamma_n}.$$

Поскольку правая и левая части этой формулы являются целыми функциями относительно $\lambda$, то это равенство в действительности верно при любом $\lambda$.

Пусть теперь $\lambda \geqslant 0$. Согласно теореме 8.1.1 [1, с. 503] при выполнении условий 1 и 2 справедлива оценка $|\Phi(z, \lambda, \Gamma_n)| < \frac{C'}{1+\lambda^{\alpha}} e^{-\bar{\delta} r_k}$, $\bar{\delta} > 0$, $C' = \mathrm{const}$, $r_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$. Следовательно, при любом $\lambda \geqslant 0$ функция $e^{\lambda z}$ представима в $D$ рядом (5). Так как этот ряд сходится при любом $\lambda$ и при $\lambda \geqslant 0$, сумма этого ряда совпадает с функцией $e^{\lambda z}$, заключаем, что сумма этого ряда совпадает с $e^{\lambda z}$ при любом $\lambda$.

Необходимость условий (7) и (8) установлена в теореме 1. Для доказательства необходимости условий 1 и 2 используем методику построения окружностей $|\lambda| = q_k$ со свойствами 1 и 2, изложенную в [1, с. 476].

В силу условия в) имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{|\lambda_k|^h} < \infty$, $h > \rho$. Обозначим через $K_n$, $n \geqslant 1$, кружки $K_n : |\lambda - \lambda_n'| < 1/|\lambda_n|^h$, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим кольцо $U_n : n \leqslant |\lambda| \leqslant n+1$. Сумма диаметров кружков $K_n$, имеющих общие точки с кольцом $U_n$, не превышает

$$2 \sum_{|\lambda_k| \geqslant n-1} 1/|\lambda_k|^h < 1/2, \quad n > n_0. \tag{17}$$

Следовательно, в кольце $U_n$ при $n > n_0$ найдется окружность $|\lambda| = q_n$, не имеющая общих точек с кружками $K_n$. Окружности $|\lambda| = q_n$ — искомые. Действительно, имеем

$$\left| \frac{1}{L(\lambda)} \right| < |e^{-\lambda z}| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n|^h e^{|\lambda_n| R}}{|L^1(\lambda_n)|}, \quad |\lambda| = q_n, \quad |z| = R, \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Ряд справа сходится на основании (7) и (8). Выберем $z$ с условием $z = x$, $x < 0$, и $|\lambda| = q_n$, $n \geqslant 1$, $|\arg \lambda| < \gamma < \pi/2$. Тогда $|1/L(\lambda)| < Ae^{-q_n x \cos \arg \lambda}$, $A = A(z)$. Так как $\cos \arg \lambda > \varphi_0 > 0$, $x < 0$, мы можем взять $x$ таким, чтобы выполнялось неравенство $|x \cos \arg \lambda| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — любое). Отсюда $|L(\lambda)| > \bar{A}_1 e^{-\varepsilon q_n}$, $|\arg \lambda| < \gamma < \pi/2$, $n > \bar{n}_0$, $\bar{A}_1 = \bar{A}_1(z)$.

Если $\pi/2 < \gamma_1 < |\arg \lambda| \leqslant \pi$, $|\gamma_1 - \gamma| < \pi/2$, то мы снова возьмем $z = -R$ и получим $|1/L(\lambda)| < \bar{A}_2 e^{-q_n(-R)\cos \arg \lambda}$, $|\lambda| = q_n$, $\bar{A}_2 = \bar{A}_2(R)$. Поскольку здесь $\cos \arg \lambda < 0$, то имеем $|L(\lambda)| > \bar{A}_2 e^{-q_n R \cos \arg \lambda}$, $q_n \to \infty$, $n \to \infty$. Каким бы ни было большим число $p > 0$, мы всегда можем взять число $R$ таким, чтобы выполнялось неравенство $-R \cos \arg \lambda > p$, и, следовательно, $|L(\lambda)| > \bar{A}_2 e^{q_n p}$, $p > 0$, $q_n \to \infty$, $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \min_{|\lambda| = q_n} \frac{\ln |L(\lambda)|}{|\lambda|} = +\infty.$$

Если же $\gamma \leqslant \arg \lambda \leqslant \gamma_1$, или $-\gamma_1 \leqslant \arg \lambda \leqslant -\gamma$, то возьмем $z$ соответственно $\arg z = -\gamma_1$, $|z| = R$, или же $\arg z = \gamma_1$ — во втором случае. Получим $|1/L(\lambda)| < \bar{A}_3 e^{-Rq_n \cos(\arg \lambda - \gamma_1)}$, $\bar{A}_3 = \bar{A}_3(z)$, $n \geqslant 1$. Так как $\cos(\arg \lambda - \gamma_1) > \eta > 0$, то $\forall p > 0$ число $R$ можно выбрать таким, чтобы выполнялось неравенство $|L(\lambda)| > \bar{A}_3 e^{pq_n}$, $p > 0$, $|\lambda| = q_n$, $n \geqslant 1$, $\bar{A}_3 = \text{const}$.

Учитывая, что в кольце $U_n$ выполняется условие (17), видим, что существует некоторый интервал $]\alpha; \beta[$ $[n; n+1]$, каждая точка которого может быть взята в качестве точки $q_n$, $n \geqslant 1$, причем, взяв любую из этих точек в качестве $q_n$ и построив соответствующую окружность $\lambda = q_n$, убедимся, что выполняется неравенство (17). А значит, в кольце $U_n$ существует окружность $G_n$ с требуемыми свойствами. Теорема доказана.

Пусть теперь $f(z)$ произвольная аналитическая в $D$ и непрерывная при $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ функция.

Используя теорему М. В. Келдыша [1, с. 516] получаем, что функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = G(z) + \varphi(z)$, где $G(z)$ — целая функция, $\varphi(z)$ — аналитическая в $D$, непрерывная на $\bar{D}$ и удовлетворяет в $\bar{D}$ условию $\varphi(z) = O(1/|z|^2)$, $z \in \bar{D}$.

Из теорем 2 и 3 следует, что условия (7), (8) совместно с условиями 1, 2 достаточны для представления функции $\varphi(z)$ рядом (3) в $D$, в котором $\lambda_n$ — нули целой функции (1). Согласно теореме 7.4.4 [1, с. 481] каков бы ни был порядок функции $G(z)$, найдется целая функция $L_1(\lambda)$ с простыми нулями

$\mu_k'$, $k \geqslant 1$, такая, что функцию $G(z)$ можно представить во всей плоскости рядом вида (3), в котором $\mu_n'$ — нули функции $L^1(\lambda)$. Необходимыми и достаточными условиями для возможности такого представления являются:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln |L_1(\mu_n')|}{|\mu_n'|} = +\infty; \tag{18}$$

существуют окружности $|\lambda| = q_n$, на которых

$$\lim_{n\to\infty} \min_{|\lambda|=q_n} \frac{\ln |L_1(\lambda)|}{|\lambda|} = +\infty. \tag{19}$$

Таким образом, условия (7), (8), 1), 2) и (18), (19) достаточны для того, чтобы функцию $f(z)$ можно было представить в $D$ рядом вида (3), в котором $\{\mu_n\} = \{\mu_n'\} \cup \{\lambda_n\}$. Как отмечалось, условия (18), (19) вместе с тем необходимы для представления функции $G(z)$ рядом вида (3) во всей плоскости.

Условия (7), (8), 1), 2) необходимы для представления функции $\varphi(z)$ рядом (3) по нулям функции (1) в $D$. Действительно, при фиксированном $\lambda > 0$ и $z = x$, $x < 0$, функция $e^{\lambda x}$ удовлетворяет условию $e^{\lambda x} = O(1/x^2)$, $x \to -\infty$.

Если произвольная функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая в $\overline{D}$ условию $\varphi(z) = O(1/|z|^2)$, $|z| \to \infty$, представима рядом (3) по нулям $\lambda_n$, в $D$, то и функция $e^{\lambda x}$ ($\lambda > 0$ — фиксированное) представима рядом (5) при $x < 0$, но тогда согласно теореме 3 выполняются условия (7), (8), 1) и 2). Этим доказана такая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы произвольная аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Re} z < 0$ *и непрерывная при* $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ *функция* $f(z)$ *была представима при* $\operatorname{Re} z < 0$ *рядом вида* (3), *в котором* $\{\mu_n\} = \{\mu_n'\} \cup \{\lambda_n\}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (7), (8), 1), 2), *а также* (18), (19).

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонен .— М. : Наука, 1976.— 536 с.
2. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М. : Наука, 1978.— 327 с.

Дрогобыч. пед. ин-т

Получено 13.11.84