УДК 519.248

А. Л. ЗЕЛЕНЦОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук
(ВНИИ систем. исслед. АН СССР, Москва)

Устойчивость с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений Ито

Получены условия абсолютной (не зависящей от запаздывания) асимптотической устойчивости с вероятностью 1 указанных в заглавии систем стохастических уравнений. Предлагаемый подход позволяет свести задачу анализа устойчивости к выяснению условий существования положительно определенного решения линейного матричного уравнения. Эти условия сформулированы в терминах расположения собственных значений матрицы, составленной из элементов матриц исходной системы.

Отримано умови абсолютної (незалежної від запізнювань) асимптотичної стійкості з ймовірністю 1 вказаних в заголовку систем стохастичних рівнянь. Запропонований підхід дозволяє звести задачу аналізу стійкості до визначення умов існування додатньо означеного розв'язку лінійного матричного рівняння. Ці умови сформульовані в термінах розташування власних значень матриці, складеної з елементів матриць початкової системи.

1. Постановка задачи. Рассматривается система стохастических дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

$$dx(t) = \Big[Ax(t) + \sum_{i=1}^{k} B_i x(t-\tau_i)\Big]dt + \sum_{j=1}^{r} C_j x(t)\, dw_j, \tag{1}$$

где $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k < \infty$, x — n-мерный вектор фазовых координат, A, B_i, C_j, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, r}$,— постоянные матрицы размера $n \times n$, причем A — гурвицева, $w_j(t)$, $j = \overline{1, r}$,— независимые между собой стандартные винеровские процессы.

Ставится задача определения условий абсолютной (не зависящей от величины запаздывания) асимптотической устойчивости с вероятностью 1 тривиального решения системы стохастических уравнений, которые выражались бы непосредственно через коэффициенты системы, т. е. через элементы матриц A, B_i, C_j, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, r}$.

2. Основной результат. Исследование устойчивости будем проводить в рамках аппарата второго метода Ляпунова, в соответствии с которым для асимптотической устойчивости с вероятностью 1 тривиального решения системы (1) достаточно существования положительно определенного функционала Ляпунова—Красовского такого, что математическое ожидание его полной производной по времени вдоль решений системы (1) было отрицательной величиной. Предлагаемый в данной работе специальный выбор вида функционала и позволяет получить конструктивно проверяемые условия абсолютной асимптотической устойчивости.

Лемма 1. *Пусть при некоторых значениях параметров $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, линейное матричное уравнение*

$$\widetilde{A}'L + L\widetilde{A} + \sum_{i=1}^{k} \widetilde{B}_i' L \widetilde{B}_i + \sum_{j=1}^{r} C_j' L C_j = -Q, \tag{2}$$

где Q — произвольная положительно определенная матрица, $\widetilde{A} = A + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \gamma_i I$, $\widetilde{B}_i = B_i/\sqrt{\gamma_i}$, имеет положительно определенное решение L.

Тогда тривиальное решение системы (1) *асимптотически устойчиво с вероятностью* 1 *при любых постоянных запаздываниях.*

Доказательство. Будем исследовать устойчивость тривиального решения уравнения (1) с помощью второго метода Ляпунова, выбирая функционал Ляпунова—Красовского из класса

$$V = x'(t) Lx(t) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\gamma_i} \int_{t-\tau_i}^{t} x'(\theta) B_i' L B_i x(\theta) d\theta. \tag{3}$$

Вычисляя стохастический дифференциал dV функционала (3) на решения системы (1) и определяя математическое ожидание полной производной $M\left\{\frac{dV}{dt}\right\}$, имеем

$$M\left\{\frac{dV}{dt}\Big|_{\overset{(1)}{\equiv y}}\right\} = y'(t)\left[A'L + LA + \sum_{j=1}^{r} C_j' L C_j + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\gamma_i} B_i' L B_i\right] y(t) + y'(t) L \times$$
$$\times \left[\sum_{i=1}^{k} B_i y(t-\tau_i)\right] - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\gamma_i} y'(t-\tau_i) B_i' L B_i y(t-\tau_i). \tag{4}$$

Рассматривая выражение в правой части (4) как квадратичную форму от переменных $y(t)$, $y(t-\tau_i)$, $i = \overline{1, k}$, и используя неравенство*, справедливое при $L \geqslant 0$:

$$2y'(t) L B_i y(t-\tau_i) \leqslant \gamma_i y'(t) L y(t) + \frac{1}{\gamma_i} y'(t-\tau_i) B_i' L B_i y(t-\tau_i),$$

получаем

$$M\left\{\frac{dV}{dt}\Big|_{\overset{(1)}{\equiv y}}\right\} \leqslant y'(t)\left[A'L + LA + \sum_{i=1}^{k}\left(\gamma_i L + \frac{1}{\gamma_i} B_i' L B_i\right) + \sum_{j=1}^{r} C_j' L C_j\right] y(t).$$

Из последнего неравенства следует, что для отрицательности $M\left\{\frac{dV}{dt}\right\}$ и соответственно для асимптотической устойчивости с вероятностью 1 системы (1) достаточно разрешимости в классе положительнс определенных матриц уравнения (2).

Для получения условий разрешимости уравнения (2) введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть z — произвольный вектор из R^n. Рассмотрим вектор $z[p]$ с координатами

$$\sqrt{p!/(p_1!\, p_2! \ldots p_n!)}\, z_1^{p_1} \cdot z_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{p_n}, \quad p_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = p, \tag{5}$$

элементы которого упорядочим лексикографически. Размерность вектора $z^{(p)}$ равна $m = \binom{n+p-1}{p}$.

В [1] введены следующие преобразования квадратной $(n \times n)$-матрицы A: пусть $y = Az$, тогда $y^{[p]} = A^{[p]} z^{[p]}$; пусть $\dot{z} = Az$, тогда $\dot{z}^{[p]} = A_{[p]} z^{[p]}$. Свойства преобразований матриц изучались в [2, 3].

Лемма 2. *Для существования положительно определенного решения* L *уравнения* (2) *необходимо и достаточно, чтобы матрица* $G = A_{[2]} + \sum_{i=1}^{k}\left(\gamma_i I + \frac{1}{\gamma_i} B_i^{[2]}\right) + \sum_{j=1}^{r} C_j^{[2]}$ *была гурвицевой, т. е.* $\operatorname{Re}\lambda_i\{G\} < 0$, $i = \overline{1, m}$.

Доказательство. Рассмотрим систему, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dz(t) = \widetilde{A}z(t)\,dt + \sum_{i=1}^{s} D_i z(t)\,d\xi_i, \tag{6}$$

где z — n-мерный вектор, ξ_i, $i = \overline{1, s}$,— независимые между собой стандартные винеровские процессы, $s = k + r$,

$$D_i = \begin{cases} B_i/\sqrt{\gamma_i}, & i = \overline{1, k}; \\ C_i, & i = \overline{k+1, s}. \end{cases} \tag{7}$$

Следуя [1], получаем систему уравнений Ито для $z^{[p]}$. Для этого запишем уравнение Стратоновича для процесса $z(t)$, определяемого уравнением (6):

$$d_{0.5}z(t) = \left(\widetilde{A} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} D_i^2\right) z(t)\,dt + \sum_{i=1}^{s} D_i z(t)\,d_{0,5}\xi_i.$$

Вычисляя дифференциал Стратоновича $d_{0,5}z^{[p]}$, с учетом (5) имеем

$$d_{0,5}z^{[p]}(t) = \left(\widetilde{A} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} D_i^2\right)_{[p]} z^{[p]}(t) + \sum_{i=1}^{s} D_{i[p]}z^{[p]}(t)\,d_{0,5}\xi_i,$$

и, корректируя член смещения, получаем уравнение Ито для $z^{[p]}$:

$$dz^{[p]}(t) = A_p z^{[p]}(t)\,dt + \sum_{i=1}^{s} D_{i[p]}z^{[p]}(t)\,d\xi_i, \tag{8}$$

где

$$A_p = \widetilde{A}_{[p]} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} [(D_i^2)_{[p]} - (D_{i[p]})^2]. \tag{9}$$

Отметим, что при $p = 2$ справедливо следующее соотношение [3]:

$$D_i^{[2]} = \frac{1}{2}[(D_{i[2]})^2 - (D_i^2)_{[2]}]. \tag{10}$$

Обозначив $m(t) = M\{z^{[p]}(t)\}$, где M — оператор математического ожидания, из (8) с учетом (10), (7) и (9) получим уравнения вторых моментов

$$\frac{dm(t)}{dt} = \left(A_{[2]} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i I + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\gamma_i} B_i^{[2]} + \sum_{j=1}^{r} C_j^{[2]}\right) m(t). \tag{11}$$

Из (11) следует, что расположение собственных значений матрицы $G = A_{[2]} + \sum_{i=1}^{k}\left[\gamma_i I + \frac{1}{\gamma_i}B^{[2]}\right] + \sum_{j=1}^{r} C_j^{[2]}$ в левой полуплоскости является необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости уравнений вторых моментов.

С другой стороны, необходимым и достаточным условием устойчивости в среднеквадратическом является существование положительно определенного решения L матричного уравнения (2) (см., например, [4]). Из эквивалентности требований асимптотической устойчивости в среднеквадратическом и асимптотической устойчивости уравнений моментов порядка $p = 2$ вытекает справедливость утверждения леммы.

Объединяя леммы 1 и 2, получаем условия устойчивости системы (1).

Теорема 1. *Пусть найдутся такие значения параметров* $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, *что*

$$\operatorname{Re} \lambda_i \left\{ A_{[2]} + \sum_{i=1}^{k} \left[\gamma_i I + \frac{1}{\gamma_i} B_i^{[2]} \right] + \sum_{j=1}^{r} C_j^{[2]} \right\} < 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{12}$$

$$\left(\textit{т. е. матрица } G = A_{[2]} + \sum_{i=1}^{k} \left[\gamma_i I + \frac{1}{\gamma_i} B_i^{[2]} \right] + \sum_{j=1}^{r} C_j^{[2]} - \textit{гурвицева} \right).$$

Тогда тривиальное решение системы (1) *асимптотически устойчиво с вероятностью 1 при любых постоянных запаздываниях.*

Замечание. Отметим, что из разрешимости (2) следует разрешимость в классе положительно определенных матриц неравенства $\widetilde{A}'L + L\widetilde{A} < 0$, из которого, в свою очередь, вытекает гурвицевость матрицы $\widetilde{A}$. Таким образом, для параметров γ_i, $i = \overline{1, k}$, справедлива оценка $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i < 2\beta$, где β — абсолютная величина действительной части ближайшего к мнимой оси собственного значения матрицы A («запас устойчивости» матрицы A). Эта оценка используется для ограничения диапазона поиска оптимальных значений γ_i, $i = \overline{1, k}$, при численной проверке условия (12) на ЭВМ.

3. Сравнение с известными результатами. Отметим, что при большом количестве публикаций по вопросам теории устойчивости стохастических систем с последействием работ, посвященных разработке конструктивных методов анализа устойчивости стохастических систем с запаздыванием, немного (см. библиографию в [5]). Наиболее полные результаты по устойчивости решений систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений представлены в [6]. Полученные в этой работе условия сводят задачу анализа устойчивости к задаче нахождения положительно определенной $(n \times n)$-матрицы H, обеспечивающей отрицательную определенность блочной матрицы порядка $2n$, блоки которой линейно зависят от H. Конструктивных способов построения матрицы H не предложено. Поэтому несомненно преимущество в вычислительном отношении предложенного в данной работе подхода, позволяющего свести задачу либо к решению (в классе положительно определенных матриц) линейного матричного уравнения (лемма 1), либо к проверке выполнения сформулированного в терминах коэффициентов системы условия существования такого решения (теорема 1).

Возникает естественный вопрос: не является ли платой за простоту проверки условий его большая по сравнению с предложенным в [6] грубость. Из работ [7, 8] следует, что по крайней мере для детерминированных систем дифференциально-разностных уравнений условия данной работы (при $C_j = 0$, $j = \overline{1, r}$) заведомо не слабее, чем условия [6].

4. Пример. Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциально-разностное уравнение Ито с k запаздываниями и со скалярным винеровским процессом

$$dx(t) = \left[-ax(t) + \sum_{i=1}^{k} b_i x(t - \tau_i) \right] dt + cx(t)\, dw, \tag{13}$$

$$a > 0, \quad 0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k < \infty.$$

Условие (12) для рассматриваемой системы имеет вид

$$-2a + c^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2/\gamma_i + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i < 0. \tag{14}$$

Полагая в (14) $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_k = \dfrac{2a - c^2}{2k}$, видим, что при выполнении неравенства

$$a > \frac{c^2}{2} + \sqrt{k \sum_{i=1}^{k} b_i^2} \qquad (15)$$

уравнение (13) асимптотически устойчиво по Ляпунову с вероятностью 1.

1. *Брокетт Р. У.* Группы и алгебры Ли в теории управления // Математические методы в теории систем.— М. : Мир, 1979.— С. 174—200.
2. *Barkin A. I., Zelentsovsky A. L.* Method of power transformations for analysis of stability of nonlinear control systems // Systems and Control Letters.— 1983.— N 5.— P. 303—310.
3. *Баркин А. И., Зеленцовский А. Л., Имангалиев Ш. И.* Устойчивость стохастических систем управления с динамической частотно-импульсной модуляцией // Динамика неоднородных систем.— М. : ВНИИСИ, 1986.— С. 51—55.
4. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 367 с.
5. *Кореневский Д. Г.* Алгебраические коэффициентные условия абсолютной (не зависящей от запаздывания) асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических уравнений Ито с последействием // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 6.— С. 791—795.
6. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений Ито // Там же.— 1987.— **39**, № 1.— С. 34—39.
7. *Зеленцовский А. Л., Сизиков В. И.* Устойчивость решений систем линейных дифференциально-разностных уравнений // Динамика неоднородных систем.— М. : ВНИИСИ, 1988.— С. 75—78.
8. *Кореневский Д. Г., Мазко А. Г.* Компактная форма алгебраического критерия абсолютной (по запаздыванию) устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 2.— С. 278—282.

Получено 13.04.88