УДК 517.5

А. И. СТЕПАНЕЦ, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев),
Н. И. СТЕПАНЕЦ, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

Приближение целыми функциями в среднем на действительной оси

Изучаются приближения в локально интегральной норме функций, представимых в виде свертки на всей оси, посредством операторов Фурье.

Вивчаються наближення в локально інтегральній нормі функцій, які можуть бути представлені у вигляді згортки на всій осі, за допомогою операторів Фур'є.

Пусть $\hat{L}_1$ — множество функций $\varphi(\cdot)$, заданных на всей действительной оси R и имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{\hat{1}} = \sup_{a\in R} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t+a)|\, dt.$$

Пусть, далее, $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geqslant 0$ и β — фиксированное число,

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(v) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv,$$

Тогда через $\hat{L}^\psi_\beta$ обозначим множество функций $f \in \hat{L}_1$, которые почти для всех x представимы равенством

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, \hat{\psi}(t, \beta)\, dt = A_0 + (\varphi * \hat{\psi})(x),$$

где A_0 — некоторая постоянная и $\varphi \in L_1$, а интеграл понимается в смысле его главного значения. Функцию $\varphi(\cdot)$ из этого представления называют (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и обозначают через $f^\psi_\beta(\cdot)$.

Такие и им подобные множества функций рассматривались в [1—5], где, в частности, отмечено, что в периодическом случае множества $\hat{L}^\psi_\beta$ совпадают с множествами L^ψ_β, которые изучались в [6]. В [1, 2] введены операторы

$$F_\sigma(f, x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x+t)\, \hat{\tau}_\sigma(t)\, dt, \quad f \in \hat{L}^\psi_\beta, \quad \sigma > 1,$$

Теорема 3. *Если $\psi \in F_0$, то при любых $\sigma > 1$ и $\beta \in R$*

$$\mathcal{E}_\sigma (\widehat{L}^\psi_{\beta,1})_{\widehat{1}} \leqslant \frac{4}{\pi^2} [\ln |\eta(\alpha) - \sigma| + O(1)] \psi(\sigma), \tag{9}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $\sigma > 1$ и по $\beta \in R$.

Придерживаясь схемы доказательства теоремы 4 статьи [5] и пользуясь, как и при получении неравенства (4), соотношениями вида

$$\left\| \int f(\cdot + t) K(t)\, dt \right\|_{\widehat{1}} \leqslant \| f \|_{\widehat{1}} \int | K(t) |\, dt, \tag{10}$$

получаем аналоги предложения 1 и теоремы 1 в случае, когда $\psi \in \mathfrak{A}_0$.

Предложение 1′, *Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, то $\forall f \in \widehat{L}^\psi_0$ при любом $\sigma > 1$*

$$\rho_\sigma (f;\ x) = B^\psi_\sigma (f;\ x) + b^\psi_\sigma (f;\ x), \tag{11}$$

причем

$$\| b^\psi_\sigma (f;\ x) \|_{\widehat{1}} \leqslant K\psi(\sigma) E_{\sigma-1} (f^\psi_0)_{\widehat{1}}, \tag{12}$$

где K — постоянная, которая, возможно, зависит только от функции $\psi(\cdot)$.

Теорема 4. *Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, то $\forall f \in \widehat{L}^\psi_0$ при любом $\sigma > 1$*

$$\| \rho_\sigma (f;\ x) \|_{\widehat{1}} \leqslant \frac{4}{\pi^2} \psi(\sigma) E_{\sigma-1} (f^\psi_\beta)_{\widehat{1}} \ln \sigma + b^\psi_\sigma (f), \tag{13}$$

где

$$| b^{+}_\sigma (f) | \leqslant K\psi(\sigma) E_{\sigma-1} (f^\psi_\beta)_{\widehat{1}}, \tag{14}$$

а K — постоянная, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Из теоремы 4 вытекает такое утверждение.

Теорема 5. *Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, то $\forall \sigma \geqslant 1$*

$$\mathcal{E}_\sigma (\widehat{L}^\psi_{0,1}) \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln \sigma + O(1) \right) \psi(\sigma), \tag{15}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $\sigma > 1$.

В периодическом случае утверждения предложения 1′, а также теорем 4 и 5 получены в [7]. Там же отмечалось, что в указанном случае, т. е. для множеств $L^\psi_{0,1}$, соотношения (13) и (15) переходят в равенства. Это означает, что неравенства (13) и (15) являются асимптотически неулучшаемыми.

2. Наилучшие приближения. Следуя схеме доказательства теоремы 6 из [5] и пользуясь соотношениями вида (10), получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Если $\psi \in \mathfrak{A}_0$, то $\forall f \in \widehat{L}^\psi_0$ при любом $\sigma > 1$*

$$E_\sigma (f)_{\widehat{1}} \leqslant K\psi(\sigma) \| f^\psi_0 \|_{\widehat{1}}. \tag{16}$$

Если $\psi \in \mathfrak{A}_c$, то $\forall f \in \widehat{L}^\psi_\beta$ при любых $\beta \in R$ и $\sigma > 1$

$$E_\sigma (f)_{\widehat{1}} \leqslant K\psi(\sigma) E_{\sigma/2} (f^\psi_\beta)_{\widehat{1}}; \tag{17}$$

если же $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, то $\forall f \in \widehat{L}^\psi_\beta$ при любых $\beta \in R$ и $\sigma > 1$

$$E_\sigma (f)_{\widehat{1}} \leqslant K\psi(\sigma) E_{2\sigma-\eta(\sigma)} (f^\psi_\beta)_{\widehat{1}}, \tag{18}$$

где $\eta(\sigma) = \eta(\psi;\ \sigma) = \psi^{-1}(\psi(\sigma)/2)$, $\sigma > 1$, $\eta(\sigma) > \sigma$; K — постоянная, которая может зависеть только от функции $\psi(\cdot)$.

Отметим, что неравенства (16), (17) реализуются при приближении функций $f \in \widehat{L}^\psi_\beta$ посредством функций $\Phi_\sigma(f;\ x)$, $V_\sigma(f;\ x)$ и $S_\sigma(f;\ x)$, введенных при доказательстве теоремы 6 из [5], которые, как там указано, в условиях теоремы 6 являются целыми функциями экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ и принадлежат к W^2_σ.

Полагая $E_\sigma(\hat{L}^\psi_{\beta,1})_{\hat{1}} = \sup\limits_{f\in\hat{L}^\psi_{\beta,1}} E_\sigma(f)_{\hat{1}}$, из теоремы 6 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть* $\psi\in\mathfrak{A}_0$. *Тогда* $\forall\sigma>1$

$$E_\sigma(\hat{L}^\psi_{0,1})_{\hat{1}} \leqslant K\psi(\sigma); \tag{19}$$

если же $\psi\in\mathfrak{A}_{c,\infty}$, *то* $\forall\sigma>1$ *и* $\forall\beta\in R$

$$E_\sigma(\hat{L}^\psi_{\beta,1})_{\hat{1}} \leqslant K\psi(\sigma), \tag{20}$$

где K — *постоянная, которая может зависеть только от функции* $\psi(\cdot)$.

Для классов $L^\psi_{\beta,1}$ при $\psi\in\mathfrak{M}_{c,\infty}$ и $\beta\in R$ или $\psi\in\mathfrak{M}_0$ и $\beta=0$ в [6, с. 251] показано, что найдутся постоянные K_1 и K_2 такие, что $\forall n\in N$

$$K_1\psi(n)\leqslant E_n(L^\psi_{\beta,1})_1\leqslant K_2\psi(n).$$

Поскольку $L^\psi_{\beta,1}\subset\hat{L}^\psi_{\beta,1}$, то отсюда заключаем, что неравенства (19) и (20) в общем случае точны по порядку.

1. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн.— 1987.— 40, № 2.— С. 198—209.
2. *Степанец А. И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси.— Киев, 1988.— С. 3—41.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 88.27).
3. *Степанец А. И., Степанец Н. И.* Приближение целыми функциями в среднем // Там же.— С. 42—47.
4. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. I. // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 1.— С. 102—112.
5. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. II // Там же.— № 2.— С. 210—222.
6. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
7. *Степанец А. И., Степанец Н. И.* Скорость сходимости рядов Фурье в метрике L // Скорость сходимости рядов Фурье в пространствах L^ψ_β.— Киев, 1986.— С. 53—56.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86, 66).

Получено 09.06.89