УДК 517.535.4

И. В. Островский, чл.-корр. АН Украины
(Физ.-техн. ин-т низких температур АН Украины, Харьков)

ИССЛЕДОВАНИЯ М. Г. КРЕЙНА ПО ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

This is a survey of M. G. Krein's results in the theory of entire and meromorphic functions. Their further development is also discussed.

Наведено огляд результатів М. Г. Крейна з теорії цілих та мероморфних функцій, а також їх подальший розвиток.

Результаты исследований М. Г. Крейна по теории целых и мероморфных функций опубликованы в работах [1 – 8] и их можно разделить на четыре части. Первая содержит результаты, связанные с распространением на целые трансцендентные функции критерия Гурвица и теоремы Эрмита – Билера. Во вторую входят результаты по представлениям целых функций, неотрицательных на оси, полуоси или системе интервалов. Третья связана с теоремой о целых функциях, логарифм модуля которых в верхней и нижней полуплоскостях имеет положительные гармонические мажоранты. Наконец, четвертая посвящена изучению корней целых почти периодических в смысле Бора функций с ограниченным спектром, содержащим концы.

В настоящей статье речь идет о первых трех частях; в соответствии с этим она разбита на три пункта. Четвертая часть, состоящая из совместной с Б.Я.Левиным работы [8], подробно описана в монографии [9, с. 575 – 600].

Кроме изложения результатов М. Г. Крейна в области теории целых и мероморфных функций приведено описание возникших благодаря этим результатам дальнейших исследований в этой области.

1. Как известно (см., например, [10], гл. I), критерий Гурвица (1895) — необходимое и достаточное условие для того, чтобы все корни вещественного полинома

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad a_0 > 0,$$

лежали в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$, — состоит в положительности n последовательных главных миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Вопрос о перенесении этого критерия на целые трансцендентные функции привлекал в начале XX века большое внимание. Наиболее сильными считались результаты Громмера (1914) и Фудживары (1925). В частности, результат Громмера состоял в том, что для целых трансцендентных функций рода нуль

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots, \quad a_0 > 0, \tag{2}$$

критерий Гурвица сохраняет силу, т. е. все корни лежат в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы (1) положительны.

М. Г. Крейн [1] дал полное описание класса всех вещественных целых трансцендентных функций (2), для которых положительны все главные миноры матрицы (1). Оказалось, что этот класс состоит из функций вида

$$f(z) = e^{-az} E(z^2)\, g(z), \tag{3}$$

где $a \geq 0$, E — вещественная целая функция, g — вещественная целая функция, все корни которой лежат в полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$ и $|g(z)/g(-\bar{z})| < 1$ при $\operatorname{Re} z < 0$. Если g — полином, в (3) следует считать $a > 0$.

Таким образом, положительность всех главных миноров матрицы (1) обеспечивает принадлежность всех корней полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$ тогда и только тогда, когда среди корней нет отличающихся лишь знаком. Результаты Громмера и Фудживары ошибочны, так как в них отсутствует последнее условие. С другой стороны, условия на род функции, налагаемые этими авторами, оказываются излишними.

Однако не этот основной результат работы [1] оказал наибольшее влияние на дальнейшие исследования. Более важную роль сыграли некоторые промежуточные результаты.

Эти результаты связаны с введенными в [1] классами целых функций, которые М. Г. Крейн обозначил через H_p. Класс H_p при $p = 1, 2, \ldots$ определяется как класс целых функций рода $p-1$, допускающих представление

$$\omega(z) = e^{iaz+b} \prod_k \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left\{z \operatorname{Re} \frac{1}{z_k} + \frac{z^2}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{z_k^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{p-1} \operatorname{Re} \frac{1}{z_k^{p-1}}\right\},$$

$$a \geq 0, \quad \operatorname{Im} z_k > 0, \quad \sum_k \left|\operatorname{Im} \frac{1}{z_k}\right| < \infty.$$

Класс H_∞ определяется как класс целых функций бесконечного рода, допускающих представление

$$\omega(z) = e^{iaz+b} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left\{z \operatorname{Re} \frac{1}{z_k} + \frac{z^2}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{z_k^2} + \ldots + \frac{z^k}{k} \operatorname{Re} \frac{1}{z_k^k}\right\},$$

$$a \geq 0, \quad \operatorname{Im} z_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Im} \frac{1}{z_k}\right| < \infty.$$

М. Г. Крейн доказал, что функции всех этих классов удовлетворяют условию

$$|\omega(z)/\omega(\bar{z})| < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0, \tag{4}$$

и, наоборот, всякая целая функция ω, не обращающаяся в нуль при $\operatorname{Im} z \leq 0$ и удовлетворяющая этому условию, принадлежит одному из классов H_p, $1 \leq p \leq \infty$. Другая полученная в [1] характеризация классов H_p состоит в том, что функция ω принадлежит объединению $\bigcup_{1 \leq p \leq \infty} H_p$ в том и только в том случае, когда она допускает представление

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z), \tag{5}$$

где P, Q — вещественные целые функции, не имеющие общих корней и такие, что

$$\operatorname{Im}(Q(z)/P(z)) \operatorname{Im} z > 0, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Эти результаты сыграли значительную роль в исследованиях по распространению на целые трансцендентные функции следующей **теоремы Эрмита – Билера**. *Для того чтобы все корни полинома* ω, *записанного в виде* (5), *где* P, Q *— вещественные полиномы, лежали в полуплоскости* $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$, *необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов* P *и* Q *были простыми, ве-*

щественными и перемежались, а в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$ *выполнялось*

$$Q'(x)P(x) - P'(x)Q(x) > 0.$$

Простые примеры показывают (см., например, [9, с. 395]), что в таком виде теорема теряет силу для целых трансцендентных функций. В 1942 г. Л. С. Понтрягин показал, что она, однако, сохраняет силу для целых функций вида $\omega(z) = G(z, e^{iz})$, где $G(z, w)$ — полином от двух переменных. Работа Л. С. Понтрягина, а также некоторые предшествовавшие ей работы Н. Г. Чеботарева, вызвали интерес к описанию класса целых трансцендентных функций, для которых верна теорема Эрмита – Билера.

Такое описание было получено в работах Б. Я. Левина и Н. Н. Меймана. Подробное изложение результатов и библиографию можно найти в монографиях [9, 10]. Отметим, что указанный класс оказался в точности совпадающим с объединением $\bigcup_{1 \le p \le \infty} H_p$. Этот класс обозначают теперь часто через HB и определяют с помощью установленного М. Г. Крейном свойства (4).

Весьма интересным оказался подкласс P класса HB, состоящий из целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.). Этот подкласс был выделен и изучен в 1943 г. Б. Я. Левиным, который указал следующее его описание, более эффективное, чем (4). Для принадлежности ц. ф. э. т. ω классу P необходимо и достаточно, чтобы ее корни лежали в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ и было справедливо неравенство $h(\pi/2, \omega) \le h(-\pi/2, \omega)$, где $h(\cdot, \omega)$ — индикатор функции ω. Как сообщил нам Б. Я. Левин, результат, весьма близкий к этому, был одновременно получен М. Г. Крейном, но не опубликован.

Б. Я. Левин (1949) доказал [9, гл. IX], что P является наиболее широким классом ц. ф. э. т., на который может быть распространена следующая известная теорема С. Н. Бернштейна об оценке производной ц. ф. э. т. Если f — ц. ф. э. т. σ и $|f(x)| \le M$, $x \in \mathbb{R}$, то $|f^{(k)}(x)| \le \sigma^k M$, $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$. Справедлива такая **теорема Б. Я. Левина**, первое утверждение которой при $\omega = Me^{i\sigma z}$ дает теорему С. Н. Берштейна. *Если f и ω — ц. ф. э. т. σ, причем $\omega \in P$ и*

$$|f(x)| \le |\omega(x)|, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

то

$$|f^{(k)}(x)| \le |\omega^{(k)}(x)|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Если же ω — ц. ф. э. т. σ и одновременно $\omega(z)$, $\overline{\omega(\bar z)} \notin P$, то найдется функция f — ц. ф. э. т. σ — такая, что выполнено (6), *но не выполнено* (7).

Как показал в 1950 г. Н. Н. Мейман [9, с. 471], если $\omega \in HB$, а целая функция f такова, что

$$|f(z)/\omega(\bar z)| \le 1, \quad |f(\bar z)/\omega(\bar z)| \le 1, \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

то (7) сохраняет силу при $k = 1$.

Приведенная теорема получила в дальнейшем значительное развитие, важным этапом которого явилась работа Н. И. Ахиезера и Б. Я. Левина [11]. Оно привело Б. Я. Левина к созданию теории субгармонических мажорант, изложение которой можно найти в [12, 13].

С исследованиями по обобщениям теоремы Эрмита – Билера связана также следующая **теорема М. Г. Крейна**, которая по свидетельству Б. Я. Левина была получена в 1943 г., но не была тогда опубликована. *Для того чтобы мероморфная функция ψ удовлетворяла условию*

$$\operatorname{Im}\psi(z)\operatorname{Im}z > 0, \quad \operatorname{Im}z \neq 0, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$\psi(z) = c\frac{z-a_0}{z-b_0}\prod_{k\neq 0}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\left(1-\frac{z}{b_k}\right)^{-1}, \tag{9}$$

где $b_k < a_k < b_{k+1}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, $a_{-1} < 0 < b_1$, $c > 0$. *Произведение в* (9) *сходится абсолютно и равномерно в любом конечном круге.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [9, с. 398; 10, с. 140].

Представление (9) было использовано М. Г. Крейном и Б. Я. Левиным (1943) для описания пар P, Q вещественных целых функций, таких, что $P + iQ$ принадлежит классу P. Менее эффективное описание, но обеспечивающее принадлежность функции $P + iQ$ более общему классу HB, было получено Н. Н. Мейманом (1943) также с использованием (9).

Представление (9) сыграло позднее важную роль в решении следующей проблемы, поставленной в 1914 г. Полиа и Виманом. Пусть f — вещественная целая функция, имеющая вместе со всеми своими производными лишь вещественные нули. Будет ли она принадлежать классу Лагерра – Полиа? Напомним, что класс Лагерра – Полиа — это замыкание в топологии равномерной сходимости на компактах совокупности всех вещественных полиномов с вещественными корнями. Функции этого класса характеризуются представлением

$$f(z) = Cz^m e^{-\gamma z^2+\beta z}\prod_k\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left(\frac{z}{a_k}\right),$$

где

$$\gamma \geq 0, \quad \operatorname{Im}C = \operatorname{Im}\beta = \operatorname{Im}a_k = 0, \quad \sum_k a_k^{-2} < \infty.$$

Очевидно, что все производные функций класса Лагерра – Полиа имеют лишь вещественные корни; проблема Полиа – Вимана относится к обращению этого утверждения.

В работе Б. Я. Левина и И. В. Островского [14] установлено, что если f — вещественная целая функция, такая, что $ff'f''$ имеет лишь вещественные корни, то справедлива оценка

$$|f(z)| \leq \exp\exp\{C_1|z|\ln|z| + C_2\}, \quad C_1 > 0, \ C_2 > 0.$$

Опираясь на этот результат, Геллерштейн и Вильямсон [15] дали положительное решение проблемы, причем оказалось достаточным требовать вещественности корней не всех производных, а лишь f, f', f''. В основе методов, использованных в [14, 15], лежит следующее представление логарифмической производной вещественной целой функции f с вещественными корнями:

$$f'/f = h\psi, \tag{10}$$

где h — целая функция, а ψ — мероморфная функция, удовлетворяющая условию (8). Представление (10) легко следует из теоремы Ролля и теоремы М. Г. Крейна. Заметим, что оно лежит в основе и других работ, связанных с обобщениями проблемы Полиа – Вимана [16].

2. Классическая теорема Фейера – Рисса утверждает, что неотрицательный на вещественной оси тригонометрический полином $f(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikz}$ допускает представление

$$f(x) = |P(x)|^2, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где $P(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k e^{ikz}$ не обращается в нуль в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z: \operatorname{Im} z < 0\}$. Очевидно, представление (11) сохранится, если заменить P функцией $e^{-inz/2}P$, также не обращающейся в нуль в $\mathbb{C}_-$ и являющейся ц. ф. э. т. в два раза меньшего, чем тип f. Теорема Фейера – Риса играет важную роль при изучении тригонометрической проблемы моментов.

В связи с вопросами продолжения эрмитово-позитивных функций М. Г. Крейн [2] получил **следующее обобщение этой теоремы**. *Если ц. ф. э. т. f неотрицательна на вещественной оси и ограничена на ней, то справедливо представление* (11), *где P — ц. ф. э. т. в два раза меньшего, чем тип f, не обращающаяся в нуль в $\mathbb{C}_-$.*

Этот результат повлек работы Н. И. Ахиезера (1948) и Б. Я. Левина (1946) (подробное изложение основных результатов обеих работ можно найти в [9, с. 566 – 574]).

Н. И. Ахиезер дал исчерпывающий ответ на вопрос, каким минимальным условиям должна удовлетворять неотрицательная на вещественной оси ц. ф. э. т. f для того, чтобы сохранилось утверждение теоремы М. Г. Крейна. Оказалось, что условие ограниченности f на вещественной оси можно заменить существенно более слабым условием

$$\sup_{R \geq 1} \int_1^R x^{-2} \ln |f(x) f(-x)| \, dx < \infty, \tag{12}$$

дальнейшее ослабление которого невозможно. Следует отметить, что условие (12), как показал Н. И. Ахиезер, эквивалентно условию $\sum_k |\operatorname{Im}(1/z_k)| < \infty$ на корни z_k ц. ф. э. т. f.

Б. Я. Левин дополнил теорему М. Г. Крейна в другом направлении, налагая на функции f и P дополнительные ограничения представимости абсолютно сходящимися тригонометрическими рядами или интегралами. Рассмотрим два класса функций на вещественной оси, состоящие соответственно из функций, допускающих представления

$$g(x) = \sum_k a_k e^{i\lambda_k x}, \quad \operatorname{Im} \lambda_k = 0, \quad \sum_k |a_k| < \infty; \tag{13}$$

$$g(x) = c + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \psi(\lambda) \, d\lambda, \quad c \in \mathbb{C}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)| \, d\lambda < \infty. \tag{14}$$

Если целая функция f экспоненциального типа σ принадлежит первому или второму классу и $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) > 0$, то справедливо представление (11), где P — ц. ф. э. т. $\sigma/2$, принадлежит тому же классу и не имеет корней в $\{z : \operatorname{Im} z \leq \leq 0\}$. Заметим, что результаты Б. Я. Левина относятся не только к классам (13), (14).

В1981 г. М. Г. Крейн в совместной с А. А. Нудельманом работе [3] обратился к изучению некоторых специальных представлений целых функций, положительных на всей оси, полуоси или внешности интервала. Такие представления играют важную роль при построении аналогов преобразования Фурье в пространствах L^2 со специальными весами (см., например, [17]).

Для случая целых функций f, положительных на всей оси, речь идет о представлениях $f = A^2 + B^2$, где A и B — вещественные целые функции без общих корней, такие, что

$$\operatorname{Im}(B(z)/A(z)) \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{15}$$

В [3] установлено, что указанное представление возможно тогда и только тогда, когда корни z_k функции f удовлетворяют условию $\sum_k |\operatorname{Im}(1/z_k)| < \infty$. При этом множество всех соответствующих пар A, B описывается формулами

$$A(z) = A_0(z)\cos(\alpha + \beta z) - B_0(z)\sin(\alpha + \beta z),$$

$$B(z) = A_0(z)\sin(\alpha + \beta z) + B_0(z)\cos(\alpha + \beta z),$$

где A_0, B_0 — некоторая фиксированная пара, α пробегает множество всех вещественных, а β — множество всех неотрицательных чисел.

Для случая целых функций, положительных на полуоси $[0, \infty)$, речь идет о представлениях $f(x) = A^2(x) + xB^2(x)$, где A и B — вещественные целые функции без общих корней, такие, что $A(0) > 0$, выполнено условие (15) и, кроме того, функция B/A аналитична и положительна на $(-\infty, 0)$. Такое представление возможно [3] тогда и только тогда, когда $\sum_k \left|\operatorname{Im}\left(1/\sqrt{z_k}\right)\right| < \infty$. Множество всех соответствующих пар A, B описывается формулами

$$A(z) = A_0(z)\cos\beta\sqrt{z} - \sqrt{z}B_0(z)\sin\beta\sqrt{z},$$

$$B(z) = A_0(z)(\sin\beta\sqrt{z})/\sqrt{z} + B_0(z)\cos\beta\sqrt{z},$$

где A_0, B_0 — фиксированная пара, имеющая некоторое экстремальное свойство, а β пробегает множество всех положительных чисел.

Для случая целых функций f, положительных во внешности конечного интервала (a, b), речь идет о представлениях

$$f(x) = A^2(x) + (x-a)(x-b)B^2(x),$$

где A, B — вещественные целые функции без общих корней такие, что выполнено условие (15) и, кроме того, функция B/A аналитична и положительна на (a, b). Представление возможно тогда и только тогда, когда $\sum_k |\operatorname{Im}(1/z_k)| < \infty$, где z_k — корни f. Дается описание всех соответствующих пар A, B.

Уже после кончины М. Г. Крейна вышла из печати его совместная с Б. Я. Левиным и А. А. Нудельманом работа [4], посвященная представлениям полиномов, положительных на системе отрезков. Опишем постановки рассмотренных в ней основных задач и характер полученных результатов.

Пусть

$$E = [0, \infty)\setminus\bigcup_{j=1}^{g}(a_j, b_j), \quad 0 < a_1 < b_1 < \ldots < a_g < b_g < \infty, \tag{16}$$

$$a(z) = \prod_{j=1}^{g}(z - a_j), \quad b(z) = \prod_{j=1}^{g}(z - b_j), \quad T_E(z) = z\,a(z)\,b(z).$$

Задача А. Найти условия, при выполнении которых полином P положительный на E, допускает представление

$$P(z) = A^2(z) + T_E(z)B^2(z), \tag{17}$$

где A, B — вещественные полиномы, такие, что

$$\operatorname{Im}\left(\sqrt{T_E(z)}\ B(z)/A(z)\right) > 0, \quad z \in \mathbb{C}\setminus E. \tag{18}$$

Здесь через $\sqrt{T_E}$ обозначена ветвь, положительная на верхнем борту разреза $(0, a_1)$.

В работе эта задача полностью решена. В отличие от случая $E = [0, \infty)$, $T_E(z) = z$, когда представление (17) с условием (18) имеет место для любого полинома P, положительного на E, в случае (16) это не так. В работе найдены необходимые и достаточные условия на P, при которых возможно (17) с (18).

Задача Б. Для каждого ли положительного на E полинома P существуют числа $c_j \in [a_j, b_j]$ такие, что

$$P(z) = \frac{a(z)A^2(z) + zb(z)B^2(z)}{c(z)}, \quad c(z) = \prod_{j=1}^{g}(z - c_j)? \tag{19}$$

На этот вопрос в работе получен утвердительный ответ и выяснено, каким дополнительным ограничениям можно подчинить вещественные полиномы A и B. Представление (19) при $g = 1$ впервые возникло в одной работе Н. И. Ахиезера (1964) по спектральной теории уравнения Лямэ.

Задача В. Для каждого ли полинома P_1, положительного на E, существует такой положительный на E полином Q, $\deg Q \le 2g$, что полином $P = P_1 Q$ допускает представление (17), (18)?

На этот вопрос также получен утвердительный ответ. Кроме того, установлено, что среди полиномов Q существует единственный минимальной степени, являющийся квадратом полинома, все нули которого находятся в интервалах (a_j, b_j) — не более одного нуля в каждом.

К решению задач А, Б, В в работе применяются два подхода: один использует теорию моментов, а другой — теорию абелевых интегралов. Основные факты получаются как одним, так и другим способом, однако некоторые свойства полиномов A, B доказываются только одним. В работе даны приложения полученных результатов к спектральной теории струны и экстремальным задачам о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на системе отрезков.

3. В 1947 г. М. Г. Крейн, занимаясь построением теории целых операторов в гильбертовом пространстве, доказал [5] следующую **теорему**. *Для того чтобы целая функция f в каждой из полуплоскостей $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ была представима в виде отношения голоморфных и ограниченных функций, необходимо и достаточно, чтобы f была ц. ф. э. т. и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|f(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty. \tag{20}$$

Ц. ф. э. т., удовлетворяющие условию (20), известны теперь в теории целых функций под названием функций класса Картрайт (класса C). Функции этого класса имеют следующие важные свойства (см. [9], гл. V, [18, с. 85, 91]). Существует равномерный относительно θ предел

$$\lim_{re^{i\theta}\to\infty}{}^{0}\, r^{-1}\ln\left|f(re^{i\theta})\right| = \begin{cases} c_1\sin\theta, & 0 \le \theta \le \pi, \\ c_2\sin\theta, & \pi \le \theta \le 2\pi, \end{cases} \tag{21}$$

где $\lim^0$ означает, что $re^{i\theta} \to \infty$ вне множества кружков, видных из начала координат под конечным углом. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют не зависящие от ε пределы

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}n_\varepsilon^+(r) = \lim_{r\to\infty} r^{-1}n_\varepsilon^-(r) = \frac{1}{\pi}(c_1 - c_2), \tag{22}$$

где $n_\varepsilon^+(r)$ и $n_\varepsilon^-(r)$ обозначают число нулей функции f в секторах

$$\{z: |\arg z| < \varepsilon,\ |z| < r\} \quad \text{и} \quad \{z: |\pi - \arg z| < \varepsilon,\ |z| < r\}$$

соответственно.

Теорема М. Г. Крейна дала новую характеризацию класса C, более удобную для приложений. Благодаря этому она стала употребительным средством для нахождения асимптотики собственных значений и изучения других свойств линейных операторов.

В силу известной теоремы Неванлинны необходимым и достаточным условием представимости голоморфной в $\mathbb{C}_+$ функции f в виде отношения ограниченных является наличие у $\ln|f|$ положительной гармонической мажоранты. Поэтому эквивалентная и, возможно, более известная формулировка **теоремы М. Г. Крейна** (также приведенная в [5]) такова. *Необходимым и достаточным условием принадлежности целой функции f классу C является наличие у $\ln|f|$ положительных гармонических мажорант в обеих полуплоскостях $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$.*

Особенностью теоремы М. Г. Крейна является то, что она дает условие принадлежности целой функции классу C без каких-либо априорных предположений о ее росте. Теорема М. Г. Крейна послужила началом и источником ряда глубоких исследований, для которых характерно то, что ограничения на рост функции входят не в условия, а в утверждения теорем.

Прежде всего отметим теорему, доказанную М. Г. Крейном в той же работе [5]. Эта теорема связана с введенным им важным классом целых функций, который мы будем обозначать через K.

По определению, класс K состоит из всех целых функций f, обратная величина которых допускает представление

$$\frac{1}{f(z)} = c_0 + \frac{c_1}{z} + \sum_k A_k \left\{\frac{1}{z - b_k} + \frac{1}{b_k}\right\}, \tag{23}$$

где $c_0, c_1, A_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\sum_k |A_k| b_k^{-2} < \infty$.

Этот класс был введен М. Г. Крейном для описания элементов матрицы Неванлинны, опубликованного им позднее в [7]. Напомним, что матрицей Неванлинны называется матрица-функция

$$\begin{pmatrix} a_{11}(z) & a_{12}(z) \\ a_{21}(z) & a_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где a_{jk} — целые функции, удовлетворяющие условиям

$$a_{11}(z)\,a_{22}(z) - a_{12}(z)\,a_{21}(z) = 1, \quad \operatorname{Im}(a_{j1}(z)/a_{j2}(z))\operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Такие матрицы играют важную роль в теории моментов и спектральной теории дифференциальных операторов. М. Г. Крейн доказал [7], что целая функция может служить элементом матрицы Неванлинны тогда и только тогда, когда она принадлежит классу K.

Теорема М. Г. Крейна относительно функций класса K, о которой идет речь, утверждает, что если $f \in K$, то f — ц. ф. э. т. и выполнено условие (20). Другими словами, справедливо включение $K \subset C$ и, следовательно, функции класса K имеют свойства (21) и (22).

М. Г. Крейн доказал также [5]*, что утверждение этой теоремы сохраняется, если расширить класс K, заменив представление (23) более общим

* Отметим, что в работе [6] М. Г. Крейн перенес основные результаты из [7] на случай целых матриц-функций.

$$\frac{1}{f(z)} = R(z) + \frac{c}{z} + \sum_k A_k \left\{ \frac{1}{z-b_k} + \frac{1}{b_k} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{b_k^p} \right\}, \tag{24}$$

где R — полином, $c, A_k, b_k \in \mathbb{C}$,

$$\sum_k |A_k||b_k|^{-p-1} < \infty, \quad \sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{b_k} \right| < \infty. \tag{25}$$

Теоремы М. Г. Крейна о целых функциях, для которых верно (23) или (24), обобщались в дальнейшем в двух направлениях. Первое связано с исследованием роста мероморфных функций, принимающих некоторые значения вблизи системы лучей, а второе — с исследованием роста целых и мероморфных функций, допускающих специальные оценки снизу.

Обобщения первого направления были получены в 1957 – 1961 гг. И. В. Островским (библиографию и подробное изложение результатов можно найти в монографии [19], гл. VI).

Приведем некоторые результаты по этому направлению. Пусть F — мероморфная функция, представимая выражением такого вида, как в правой части (24), и выполнены условия (25). Если F имеет дефектное (по Неванлинне) значение, то

$$T(r, F) = O(r), \quad r \to \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|F(t)||}{1+t^2} \, dt < \infty, \tag{26}$$

где T — характеристика Неванлинны функции F.

Эта теорема является обобщением теоремы М. Г. Крейна (для представления (24)): действительно, если $F = 1/f$, где f — целая функция, то F вовсе не имеет нулей и, следовательно, нуль для нее является дефектным значением.

Более общий результат того же направления выглядит так. Пусть F — мероморфная функция (представимость в виде (24) не предполагается) такая, что для трех различных значений $a_1, a_2, a_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ корни $z_k(a_j)$ уравнений $F(z) = a_j$ удовлетворяют условию

$$\sum_k \left| \operatorname{Im} \frac{1}{z_k(a_j)} \right| < \infty, \quad j = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Если F имеет дефектное значение, то выполняются условия (26).

Чтобы вывести отсюда предыдущий результат, достаточно заметить [19, с. 379], что для функций F такого вида, как в правой части (24), из условия $\sum_k |\operatorname{Im}(1/b_k)| < \infty$ следует, что для любого $a \in \mathbb{C}$ имеем

$$\sum_k |\operatorname{Im}(1/z_k(a))| < \infty,$$

где $z_k(a)$ — корни уравнения $F(z) = a$.

Отметим, что из условий (26) вытекает представимость функции F в виде отношения двух ц. ф. э. т. и справедливость для $\ln|F(re^{i\theta})|$ асимптотического равенства, аналогичного (21).

Условие (27) можно понимать как условие „близости" корней уравнения $F(z) = a_j$ к паре лучей: $\{z: \arg z = 0\}$ и $\{z: \arg z = \pi\}$. Более общим является следующее условие „близости" к произвольной системе лучей $\{z : \arg z = \alpha_q\}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} = \alpha_1 + 2\pi$:

$$\sum_{q=1}^{n} \sum_{\alpha_q < \theta_k < \alpha_{q+1}} r_k^{-\omega_q} \sin \omega_q(\theta_k - \alpha_q) < \infty,$$

где $z_k(a_j) = r_k e^{i\theta_k}$, $\omega_q = \pi/(\alpha_{q+1} - \alpha_q)$. При таком условии доказывается, что если F имеет дефектное значение, то

$$T(r, F) = O(r^{\omega}), \quad r \to \infty; \quad \int_1^{\infty} \frac{\left|\ln\left|F(te^{i\alpha_q})\right|\right|}{t^{\omega+1}}\, dt < \infty, \quad q = 1, \ldots, n,$$

где $\omega = \max\limits_{1 \le q \le n} \omega_q$, и справедливы асимптотические равенства, аналогичные (21). Этот результат обобщает и усиливает также некоторые результаты Бибербаха (1919), Неванлинны (1925), Эдрея (1955).

Перейдем к обобщениям теоремы М. Г. Крейна, относящимся ко второму направлению. Основными здесь являются результаты В. И. Мацаева [20], полученные в связи с его исследованиями по теории несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Эти результаты были позднее дополнены Е. Н. Сергиенко [21, 22].

В. И. Мацаев доказал, что если целая функция f при некоторых ρ, $0 < \rho < 1$, $C > 0$, допускает оценку снизу

$$\ln|f(re^{i\theta})| \ge -C\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right)^{\rho} - C, \tag{28}$$

то f — ц. ф. э. т. и выполнено условие (20).

Эта теорема является обобщением теоремы М. Г. Крейна для случая представления (23). Действительно, из этого представления следует, что

$$\left|\frac{1}{f(z)}\right| = \left|c_0 + \frac{c_1}{z} - \frac{1}{z}\sum_k A_k b_k^{-2} + z^2 \sum_k \frac{A_k}{b_k^2(z - b_k)}\right| \le |c_0| + \frac{C}{r} + \frac{C_r}{|\sin\theta|},$$

а это дает оценку для $\ln|f|$ снизу более сильную, чем (28).

Е. Н. Сергиенко показала [21], что теорема В. И. Мацаева может быть обобщена на мероморфные функции, имеющие „мало" полюсов. Именно, если f — мероморфная функция, допускающая оценку (28), и ∞ является дефектным значением для f, то выполняются соотношения (26) (с заменой F на f).

Дальнейшее обобщение теоремы В. И. Мацаева связано с ее распространением на функции, представимые в виде разности субгармонических. Этот класс функций можно считать в некотором смысле более широким, чем класс мероморфных функций, поскольку если f мероморфна, то $\ln|f|$ есть разность субгармонических. Для функций u, являющихся разностями субгармонических, вводятся [23, с. 145, 171] аналоги характеристики Неванлинны T и дефекта в бесконечности.

Сформулируем результат Е. Н. Сергиенко [22]. Пусть функция u, являющаяся разностью субгармонических, допускает при некоторых ρ, $0 < \rho < 1$, $C > 0$, оценку снизу

$$u(re^{i\theta}) \ge -C\left(\frac{r}{|\sin\theta|}\right)^{\rho} - C. \tag{29}$$

Если u имеет дефект в бесконечности, а положительная часть μ^+ ее меры Риса удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{1+x^2+y^2}\,\mu^+(dx\,dy) < \infty, \tag{30}$$

то

$$T(r,u) = O(r),\ \ r\to\infty; \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(t)|}{1+t^2}\,dt < \infty. \tag{31}$$

Условие (30) опустить нельзя, так как функции вида $u = |f|$, где f — произвольная нелинейная целая функция, удовлетворяют (29), но не удовлетворяют (31). Заметим, что из (31) следует асимптотическое равенство для $u(re^{i\theta})$, аналогичное (31).

В. И. Мацаев рассмотрел также случай, когда оценка (28) выполняется при $\rho > 1$. Его результаты имеют несколько более общий характер, приведем один из них. Если целая функция f при некоторых $k > 0$, $\rho > 1$ допускает оценку снизу

$$\ln|f(re^{i\theta})| \geq -C\frac{r^{\rho}}{|\sin\theta|^k} - C,$$

то справедлива оценка сверху

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi} \ln|f(re^{i\theta})| = O(r^{\rho}), \quad r\to\infty.$$

Этот результат был перенесен Е. Н. Сергиенко на мероморфные функции, имеющие „мало" полюсов [21], и функции, представимые в виде разности субгармонических [22].

В заключение вернемся к классу K и приведем несколько связанных с ним результатов, полученных в 70–80-е годы.

Еще в 1953 году М. Г. Крейн показал, что в спектральных задачах теории струны важную роль играет класс $\mathfrak{J}$ вещественных целых функций f, удовлетворяющих условию: все корни уравнения $f^2(z) = 1$ вещественны. Полное описание этого класса было получено в работе В. А. Марченко и И. В. Островского [24], посвященной описанию спектра оператора Хилла. Оказалось, что общий вид функции класса $\mathfrak{J}$ задается формулой

$$f(z) = \cos\theta(z),$$

где $\theta = \theta(z)$, $\theta(\infty) = \infty$, — функция, осуществляющая конформное отображение полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на область вида

$$\{\theta\colon p\pi < \operatorname{Re}\theta < q\pi,\ \operatorname{Im}\theta > 0\} \setminus \bigcup_{p<k<q} \{\theta\colon \operatorname{Re}\theta = k\pi,\ 0\le\operatorname{Im}\theta\le h_k\}, \tag{32}$$

где p, q, k — целые (возможно, $p = -\infty$, $q = +\infty$), $0 \le h_k < \infty$.

Связь между классами $\mathfrak{J}$, K и C изучалась в работах [25, 26]. В [25] было установлено, что $\mathfrak{J}$ является собственной частью K, но, с другой стороны, каждая функция $f \in K$ допускает представление

$$f = f_1 + f_2, \quad f_j \in \mathfrak{J}, \quad j = 1, 2. \tag{33}$$

Последний результат существенно усилен В. Э. Кацнельсоном [26], который показал, что представление (33) допускает любая функция f из класса C.

В работе [25] получено описание функций класса K, которое можно считать „описанием в терминах независимых параметров". Это описание имеет такой вид. Все функции f класса K и только они получаются с помощью такой конструкции. Возьмем произвольную область вида (12) и рассмотрим конформное отображение $\theta = \theta(z)$ полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на эту область, $\theta(\infty) = \infty$. Выберем на каждом из отрезков

$$[a_k, b_k] = \theta^{-1}(\{\theta\colon \operatorname{Re}\theta = k\pi,\ 0 \le \operatorname{Im}\theta \le h_k\})$$

по одной точке λ_k и положим

$$f(z) = Cz^n \lim_{R\to\infty} \prod_{0<|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right). \tag{34}$$

где $C = \text{const}$, $n = 0$ или 1, если соответственно $0 \notin \{\lambda_k\}$ или $0 \in \{\lambda_k\}$. Предел в (34) обязательно существует.

Аналогичное описание для более широкого, чем K, класса, определяемого представлением (24), неизвестно.

Целые функции порядка $\rho \le 1/2$, принадлежащие классу K, могут иметь все корни на одном луче: примером служит $f(z) = \cos\sqrt{z}$. С другой стороны, для функций класса K нормального типа порядка 1 имеет место определенная симметрия в расположении корней, выражаемая равенством (22), где в этом случае будет $c_1 + c_2 > 0$. Б. Г. Фрейдин заметил [27], что некоторая симметрия корней сохраняется и для функций класса K порядка $1/2 < \rho < 1$. Одним из ее выражений является равенство

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln n_\varepsilon^+(r)}{\ln r} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln n_\varepsilon^-(r)}{\ln r} = \rho,$$

где $n_\varepsilon^\pm$ имеет тот же смысл, что и в (22). В [27] получены более точные характеристики этой симметрии и, кроме того, результаты обобщены на целые функции, допускающие оценку снизу типа (28), мероморфные функции с дефектом в ∞, а также на функции, представимые в виде разности субгармонических.

А. А. Гольдберг [28] рассмотрел класс целых функций f, обратная величина которых допускает представление

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_k \frac{A_k}{(z - b_k)^2}, \quad \sum_k \frac{|A_k|}{|b_k|^2} < \infty, \quad \sum_k \left|\operatorname{Im}\frac{1}{b_k}\right| < \infty.$$

В отличие от класса K, этот класс оказался довольно узким: общий вид принадлежащих ему функций задается формулой

$$f(z) = A\sin^2(Bz + C),$$

где $A \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $B \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $C \in \mathbb{C}$.

1. *Крейн М. Г.* Об одном специальном классе целых и мероморфных функций // Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. – Харьков: ДНТВУ, 1938. – С. 208 – 252.
2. *Крейн М. Г.* О представлении функций интегралами Фурье – Стилтьеса // Учен. зап. Куйбышев. пед. ин-та. – 1943. – Вып. 7. – С. 123 – 147.
3. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* О представлении целых функций, положительных на вещественной оси, или на полуоси, или вне конечного интервала // Мат. исследования. – 1981. – Вып. 61. – С. 40 – 59.
4. *Krein M. G., Levin B. Ja., Nudelman A. A.* On special representations of polynomials that are positive on a system of closed intervals and some applications // Funct. Anal., Optimiz. and Math. Econ. – New York, Oxford: Oxford Univ. Press, 1990. – P. 56 – 114.

5. *Крейн М. Г.* К теории целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1947. – **11**, № 4. – С. 309 – 326.
6. *Крейн М. Г.* К теории целых матриц-функций экспоненциального типа // Укр. мат. журн. – 1951. – **3**, № 2. – С. 164 – 173.
7. *Крейн М. Г.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма – Лиувилля на интервале (0, ∞) // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1952. – **16**, № 4. – С. 293 – 324.
8. *Крейн М. Г., Левин Б. Я.* О целых почти-периодических функциях экспоненциального типа // Докл. АН СССР. – 1949. – **64**, № 3. – С. 285 – 287.
9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
10. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н.* Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1949. – **26**. – С. 1 – 332.
11. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – С. 125 – 183.
12. *Левин Б. Я.* Мажоранты в классах субгармонических функций // Теория функцй, функцион. анализ и их прил. – 1989. – Вып. 51. – С. 3 – 17; Вып. 52. – С. 3 – 33.
13. *Левин Б. Я.* Полнота систем функций, квазианалитичность и субгармонические мажоранты // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **170**. – С. 102 – 156.
14. *Левин Б. Я., Островский И. В.* О зависимости роста целой функции от расположения нулей ее производных // Сиб. мат. журн. – 1960. – **1**, № 3. – С. 427 – 455.
15. *Hellerstein S., Williamson J.* Derivatives of entire functions and a question of Polya // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – **227**. – P. 227 – 249; **234**. – P. 497 – 503.
16. *Sheil-Small T.* On the zeros of the derivatives of real entire functions and Wiman's conjecture // Ann. Math. – 1989. – **129**. – P. 179 – 193.
17. *Гурарий В. П.* Преобразование Фурье в $L^2_\varphi(-\infty, \infty)$ с весом // Мат. сб. – 1962. – **58**, № 4. – С. 439 – 452.
18. *Левин Б. Я.* Целые функции. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 124 с.
19. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
20. *Мацаев В. И.* О росте целых функций, допускающих некоторые оценки снизу // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 283 – 286.
21. *Сергиенко Е. Н.* О росте мероморфных функций, допускающих специальную оценку снизу // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1974. – Вып. 21. – С. 83 – 104.
22. *Сергиенко Е. Н.* О росте функций, представимых в виде разности субгармонических и допускающих специальную оценку снизу // Там же. – 1982. – Вып. 37. – С. 116 – 122.
23. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
24. *Марченко В. А., Островский И. В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. – 1975. – **97**, № 4. – С. 540 – 606.
25. *Островский И. В.* Об одном классе целых функций // Докл. АН СССР. – 1976. – **229**, № 1. – С. 39 – 42.
26. *Кацнельсон В. Э.* К теории целых функций класса Картрайт // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1984. – Вып. 42. – С. 57 – 62.
27. *Фрейдин Б. Г.* О целых функциях, допускающих специальную оценку снизу // Там же. – 1986. – Вып. 46. – С. 139 – 141.
28. *Гольдберг А. А.* К одной теореме М. Г. Крейна // Докл. и сообщ. Ужгород. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – 1961. – № 4. – С. 106 – 108.

Получено 17. 06. 93