УДК 517.95:517.98

*А. Л. Сахнович*

# Нелинейное уравнение Шредингера на полуоси и связанная с ним обратная задача

На полуоси $x \geqslant 0$ рассматривается матричное нелинейное уравнение Шредингера «с притяжением». Дается определение функции Вейля — Титчмарша вспомогательной несамосопряженной линейной системы и решается обратная задача восстановления системы по ее функции Вейля — Титчмарша. Описывается эволюция функции Вейля — Титчмарша.

На півосі $x \geqslant 0$ розглядається матричне нелінійне рівняння Шредінгера «з притяганням». Дається визначення функції Вейля — Тітчмарша допоміжної несамоспряженої лінійної системи та розв'язується обернена задача відновлення системи за її функцією Вейля — Тітчмарша. Описується еволюція функції Вейля — Тітчмарша.

Широко известны работы (см., например, [1]), посвященные решению нелинейных эволюционных уравнений на оси методом обратной задачи рассеяния. Большой интерес представляет учет краевых условий, т. е. изучение этих уравнений на полуоси. Ю. М. Березанский [2] решил методом обратной спектральной задачи уравнение для полубесконечной цепочки Тода со свободным концом. Л. А. Сахнович описал [3] эволюцию спектральных данных нелинейных уравнений, приводящих к вспомогательной линейной задаче

$$dw/dx = izJH(x)w, \quad H(x) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{1}$$

В частности, в [3] было рассмотрено нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$\psi_t = \frac{i}{2}(\psi_{xx} - 2\varkappa\psi\psi^*\psi), \quad x \geqslant 0$$

при $\varkappa = 1$. Рассмотрим НУШ при $\varkappa = -1$. В этом случае вспомогательная линейная задача

$$\frac{dw(x, z)}{dx} = izH(x)w(x, z), \quad w(0, z) = E_n \ (H \geqslant 0, E_n = \{\delta_{kj}\}_{k,j=1}^n). \tag{2}$$

является несамосопряженной.

В настоящей работе дается определение функции Вейля—Титчмарша $\varphi(z)$ системы (2), решается задача восстановления по $\varphi(z)$ матрицы-функции $H(x)$ и описывается эволюция $\varphi(t, z)$, когда изменение $H(x, t)$ во времени задается уравнением НШ.

Наряду с (2) изучим систему порядка $n$ ($n = 2m$):

$$dw_1(x, z)/dx = [izj - j\xi(x)]w_1(x, z), \quad w_1(0, z) = E_n, \tag{3}$$

где

$$\xi(x) = \begin{bmatrix} 0 & \psi(x) \\ \psi^*(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_m \end{bmatrix}, \quad \|\psi(x)\| \leqslant M, \quad 0 < x < l. \tag{4}$$

(Система (3) использовалась в качестве вспомогательной линейной задачи для НУШ в [1, 4].) В силу (3) верно равенство

$$w_1^*(x, z)\, jw_1(x, z) = j + \int_0^x w_1^*(u, z)\cdot[i(z - \bar{z})E_n - 2\xi(u)]\, w_1(u, z)\, du. \tag{5}$$

Из (4), (5) следует соотношение

$$w_1^*(x, z)\, j\, w_1(x, z) \leqslant j \ \text{при} \ \operatorname{Im} z \geqslant M. \tag{6}$$

Положим

$$W(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z)\end{bmatrix}=w_1^*(l,\bar{z}), \tag{7}$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ — блоки порядка $m$ матрицы-функции $W$.

Согласно (6) имеют место неравенства [5]

$$W(z)\,j\,W^*(z)\leqslant j,\ W^*(z)\,jW(z)\leqslant j,\ \operatorname{Im} z\leqslant -M. \tag{8}$$

Пусть пара мероморфных $m\times m$ матриц-функций $P(z)$, $Q(z)$ является неособенной, обладающей $j$-свойством, т. е.

$$P^*P+Q^*Q>0,\quad [P^*,Q^*]\,j\begin{bmatrix} P \\ Q\end{bmatrix}\leqslant 0,\quad \operatorname{Im} z<-M. \tag{9}$$

В силу (8), (9) определено дробно-линейное преобразование

$$\varphi(z)=[a(z)P(z)+b(z)Q(z)]\,[c(z)P(z)+d(z)Q(z)]^{-1} \tag{10}$$

и

$$\varphi^*(z)\,\varphi(z)\leqslant E_m. \tag{11}$$

Результаты [6] позволяют восстанавливать $\psi(x)$ по $W(z)$. Здесь мы приведем процедуру восстановления $\psi(x)$ с помощью меньшего объема информации — по матрице-функции $\varphi(z)$.

Положим теперь

$$\beta(x)=[E_m,0]\,U(x),\quad dU/dx=-j\xi U,\quad U(0)=E_n. \tag{12}$$

Подставляя в (2) матрицу-функцию

$$H(x)=\beta^*(x)\,\beta(x), \tag{13}$$

получаем с учетом (12) следующую зависимость между $w(x,z)$ и $w_1(x,z)$:

$$w_1(x,z)=U(x)\,w(x,2z)\,e^{-izx}. \tag{14}$$

Введем далее оператор $K$ в $L_m^2(0,l)$:

$$K=i\beta(x)\int_0^x \beta^*(t)\cdot dt.$$

Очевидно, верно

$$K-K^*=i\beta(x)\int_0^l \beta^*(t)\,dt. \tag{15}$$

В силу (12) справедливы равенства

$$\beta(x)\,\beta^*(x)=E_m,\quad \|\beta_x(x)\|\leqslant M,\quad 0<x<l.$$

Поэтому существует [7] треугольный и ограниченный вместе с обратным оператор $V$ такой, что

$$K=VAV^{-1},\quad A=i\int_0^x\cdot dt, \tag{16}$$

причем $V$ переводит функции с ограниченной производной в функции с ограниченной производной и $(V^{-1}f)(0)=f(0)$. Оператор $V$, удовлетворяющий (16), определен неоднозначно и, как показано в [8, 9], можно дополнительно потребовать, чтобы

$$V^{-1}[\beta_1(x)]=E_m,\quad \beta(x)=[\beta_1(x),\beta_2(x)], \tag{17}$$

где $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ — блоки порядка $m$ матрицы $\beta(x)$.

Введем операторы

$$S=V^{-1}(V^{-1})^*,\quad \Pi=V^{-1}\beta=[\Phi_1,\Phi_2],\quad \Phi_k=V^{-1}\beta_k,\quad k=1,2. \tag{18}$$

Здесь $\Pi$ действует из $n$-мерного евклидова пространства в $L_m^2(0, l)$, а под $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$ понимаются операторы умножения на матрицы-функции $\beta(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ соответственно. Таким образом, $\Phi_1$ — оператор умножения на $E_m$, $\Phi_2$ — оператор умножения на

$$\Phi_2(x) = V^{-1}[\beta_2(x)]. \tag{19}$$

В силу (15), (16) и (18) верно операторное тождество

$$AS - SA^* = i\Pi\Pi^*. \tag{20}$$

Такие тождества исследовались в работе [6]. Решение $w(z) = w(l, z)$ системы (2), (13) допускает [6, с. 28] представление

$$w(z) = E_n + iz\Pi^* S^{-1}(E - zA)^{-1}\Pi. \tag{21}$$

Согласно (20), (21) справедливо равенство [6]

$$E_n - w^*(z)\, w(z) = i(\bar{z} - z)\,\Pi^*(E - \bar{z}A^*)^{-1} S^{-1}(E - zA)^{-1}\Pi. \tag{22}$$

Для оценки $\varphi(z)$ воспользуемся приемом из работы [9]. Так как $w(z)\, w^*(\bar{z}) = E_n$, то соотношения (7), (10) и (14) приводят к формуле

$$[\varphi^*(z), E_m]\, w^*(2z)\, w(2z) \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ E_m \end{bmatrix} = \{\exp[i(z - \bar{z})\, l]\}\{[c(z)P(z) +$$

$$+ d(z)Q(z)]^*\}^{-1}[P^*(z)P(z) + Q^*(z)Q(z)]\,[c(z)P(z) + d(z)Q(z)]^{-1}. \tag{23}$$

Как показано в [7], имеет место представление

$$w_1(x, z) = \exp(ixjz) + \int_{-x}^{x} e^{izu} N(x, u)\, du, \tag{24}$$

где

$$\| N(x, u) \| \leqslant M_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{25}$$

В силу (7), (24) и (25) верна асимптотика

$$\lim_{|z| \to \infty} \left\{ \exp(-izl)\, W(z) - \begin{bmatrix} \exp(-2ilz) & 0 \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad \operatorname{Im} z < 0. \tag{26}$$

Из (9), (23) и (26) при $\operatorname{Im} z < -M$ следует соотношение

$$\left\| [\varphi^*(z), E_m]\, w^*(2z)\, w(2z) \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ E_m \end{bmatrix} \right\| = O(1). \tag{27}$$

Согласно (22), (27) справедлива оценка

$$\left\| (E - 2zA)^{-1}\Pi \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ E_m \end{bmatrix} \right\| = O(1),$$

откуда вытекает

$$\| \varphi(z) + [\Phi_1^*(E - 2zA)^{-1}\Phi_1]^{-1}\, \Phi_1^*(E - 2zA)^{-1}\Phi_2 \| = O(|z \exp(-2ilz)|). \tag{28}$$

Мы пользуемся тем, что согласно (17), (18) верно

$$\Phi_1^*(E - zA)^{-1}\Phi_1 = (iz)^{-1}\{[\exp(ilz)] - 1\}\, E_m. \tag{29}$$

Легко убедиться также, что

$$\Phi_1^*(E - zA)^{-1}\Phi_2 = \int_0^l \{\exp[iz(l - x)]\}\, \Phi_2(x)\, dx. \tag{30}$$

С учетом (28) — (30) получаем

$$\varphi(z) = -2iz \int_0^l [\exp(-2izx)]\, \Phi_2(x)\, dx + O(|z \exp(-2ilz)|). \tag{31}$$

Соотношение (31) позволяет по $\varphi(z)$ восстановить $\Phi_2$. В самом деле, при $\operatorname{Im} z < -M$ из (11) следует представление

$$\varphi(z) = -2iz \int_0^\infty [\exp(-2izx)] \tilde{\Phi}_2(x)\, dx, \tag{32}$$

где $\tilde{\Phi}_2(x)$ — матрица-функция порядка $m$, столбцы $\exp(-2Mx)\tilde{\Phi}_2(x)$ принадлежат $L_m^2(0, \infty)$.

В силу (31), (32) во всей плоскости справедливо соотношение

$$\int_0^l \{\exp[iz(l-x)]\} [\Phi_2(x) - \tilde{\Phi}_2(x)]\, dx = O(1), \tag{33}$$

т. е. $\Phi_2(x) = \tilde{\Phi}_2(x)$, $0 < x < l$.

Окончательно имеем

$$\Phi_2(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (iz)^{-1} [\exp(ixz)]\, \varphi(z/2)\, d\lambda, \tag{34}$$

где $z = \lambda - 2iM$, $0 < x < l$, $\varphi[(\lambda/2) - iM] = \lim\limits_{\eta\to 0} \varphi[(\lambda/2) - i(M+\eta)]$.

Согласно [10] из (17), (18) и (20) вытекает

$$Sf = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial u}\int_{|x-u|}^{x+u}\left[\Phi_2\left(\frac{s+x-u}{2}\right)\Phi_2^*\left(\frac{s+u-x}{2}\right) + E_m\right] ds\right) f(u)\, du. \tag{35}$$

Положим

$$(\mathcal{P}_x f)(u) = f(u)\ (f \in L_m^2(0, l),\ \mathcal{P}_x f \in L_m^2(0, x)); \quad S_x = \mathcal{P}_x S \mathcal{P}_x. \tag{36}$$

В силу (13), (18) справедлива формула

$$H(x) = \frac{d}{dx}(\Pi^* S_x^{-1} \mathcal{P}_x \Pi), \tag{37}$$

где

$$\Pi \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = f_1 + \Phi_2(x) f_2. \tag{38}$$

Матрица $H(x)$ имеет ранг $m$. Поэтому по $H(x)$ можно построить такие непрерывные кусочно-дифференцируемые $m \times 2m$ матрицы-функции $\alpha(x)$, $\tilde{\alpha}(x)$ ранга $m$, что

$$H(x)\tilde{\alpha}^*(x) = 0, \quad \alpha(x)\tilde{\alpha}^*(x) = 0, \tag{39}$$

$$\alpha(0) = [E_m, 0], \quad \tilde{\alpha}(0) = [0, E_m], \sup_{0<x<l} \max(\|\alpha_x(x)\|, \|\tilde{\alpha}_x(x)\|) < \infty.$$

Введем обозначения

$$\gamma(x) = [\alpha(x)\alpha^*(x)]^{-1/2}\alpha(x), \quad \tilde{\gamma}(x) = [\tilde{\alpha}(x)\tilde{\alpha}^*(x)]^{-1/2}\tilde{\alpha}(x) \tag{40}$$

и $v(x)$, $\tilde{v}(x)$ — решения уравнений

$$\begin{gathered} v_x + v(\gamma_x\gamma^*) = 0, \quad v(0) = E_m, \\ \tilde{v}_x + \tilde{v}(\tilde{\gamma}_x\tilde{\gamma}^*) = 0, \quad \tilde{v}(0) = E_m. \end{gathered} \tag{41}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\beta(x) = v(x)\gamma(x), \quad U(x) = \begin{bmatrix} v(x)\ \gamma(x) \\ \tilde{v}(x)\ \tilde{\gamma}(x) \end{bmatrix} \tag{42}$$

и в силу (12) верно

$$\xi = -j\,\frac{dU}{dx}\,U^*. \tag{43}$$

Т е о р е м а 1. *Система* (3), *удовлетворяющая условию* (4), *однозначно определяется матрицей-функцией* $\varphi(z)$. *Процедура восстановления системы* (3) *по* $\varphi(z)$ *описывается соотношениями* (34)—(43).

Внесем теперь в обозначения дробно-линейного преобразования (10) параметр $l$ — длину отрезка и будем вместо $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$ и $\varphi(z)$ писать $a(l, z)$, $b(l, z)$, $c(l, z)$, $d(l, z)$ и $\varphi(l, z)$. Из (5) следует неравенство

$$w_1^*(l, z)\, j w_1(l, z) = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{12}^* & \mu_{22} \end{bmatrix} \geqslant j, \quad \operatorname{Im} z < -M. \tag{44}$$

(Здесь $\mu_{kj}$ — блоки порядка $m$.) Согласно (44) множество значений $\varphi(l, z)$ (при фиксированных $l, z$ и различных $P, Q$, удовлетворяющих (9)) образует матричный круг [11]:

$$\varphi(l, z) = \rho_1^{-1/2}(l, z)\, u(l, z)\, \rho_2^{-1/2}(l, z) - \mu_{11}^{-1}(l, z)\, \mu_{12}(l, z), \tag{45}$$

где $\rho_1 = \mu_{11}$, $\rho_2 = (\mu_{12}^*\mu_{11}^{-1}\mu_{12} - \mu_{22})^{-1}$, $u^*u \leqslant E_m$.

Рассмотрим случай, когда система (3) задана на полуоси $x \geqslant 0$ и выполнено условие

$$\|\psi(x)\| < M, \quad 0 < x < \infty. \tag{46}$$

В этом случае параметр $l$ в (45) можно устремлять к $\infty$. При возрастании $l$ круги (45) вкладываются друг в друга, а радиусы $\rho_1^{-1/2}(l, z)$, $\rho_2^{-1/2}(l, z)$ убывают. Из (5), (44) вытекает

$$\rho_1(l, z) \geqslant [1 - 2(\operatorname{Im} z + M)\, l]\, E_m. \tag{47}$$

Таким образом, верно $\lim\limits_{l\to\infty} \rho_1(l, z) = \infty$.

Значит, матричные круги сходятся в точку (точку Вейля) : существует единственная матрица-функция

$$\tilde{\varphi}(z) = \lim_{l\to\infty} \varphi(l, z), \tag{48}$$

попадающая в матричные круги (45) при всех $l$. (При каждом $l$ существует своя пара $P_l(z)$, $Q_l(z)$, задающая $\tilde{\varphi}(z)$ с помощью преобразования (10).) Нетрудно убедиться, что $\tilde{\varphi}(z)$ является функцией Вейля—Титчмарша системы (3), (46), т. е.

$$\int\limits_0^\infty [\tilde{\varphi}^*(z), E_m]\, w_1^*(x, z)\, w_1(x, z) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(z) \\ E_m \end{bmatrix} dx < \infty. \tag{49}$$

Действительно, согласно (5) при $\operatorname{Im} z < -M$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^l w_1^*(x, z)\, w_1(x, z)\, dx \leqslant \frac{1}{2}(-\operatorname{Im} z - M)^{-1}\, [w_1^*(l, z)\, j w_1(l, z) - j],$$

откуда с учетом (9) следует

$$\int\limits_0^\infty [\tilde{\varphi}^*(z), E_m]\, w_1^*(x, z)\, w_1(x, z) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(z) \\ E_m \end{bmatrix} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(-\operatorname{Im} z - M)^{-1}\, [E_m - \tilde{\varphi}^*(z)\, \tilde{\varphi}(z)] < \infty.$$

Так как $w_1^*(x, z)\, w_1(x, z) \geqslant w_1^*(x, z)\, j w_1(x, z)$, то из (44), (47) выводим

$$[E_m, 0]\, w_1^*(x, z)\, w_1(x, z)\, [E_m, 0]^* \geqslant [1 - 2(\operatorname{Im} z + M)\, x]\, E_m. \tag{50}$$

В силу (49), (50) справедливо следующее замечание.

З а м е ч а н и е 1. Система (3), удовлетворяющая (46), имеет единственную функцию Вейля—Титчмарша.

Рассмотрим далее НУШ

$$\psi_t = \frac{i}{2}(\psi_{xx} + 2\psi\psi^*\psi), \quad x \geqslant 0 \tag{51}$$

с начально-краевыми условиями

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{52}$$

$$\psi(0, t) = \psi_1(t), \quad \psi_x(0, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t < t_0. \tag{53}$$

Обозначим через $D$ полуполосу $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant t < t_0$. Пусть существует ограниченное решение $\psi(x, t)$ системы (51) — (53):

$$\sup_{(x,t)\in D} \| \psi(x, t) \| \leqslant M < \infty, \quad \sup_{(x,t)\in D} \| \psi_x(x, t) \| \leqslant M_0 < \infty, \tag{54}$$

причем $\psi$, $\psi_x$, $\psi_{xx}$ непрерывны в $D$. Следуя классической схеме [4], полагаем

$$G_1(x, t, z) = j(izE_n - \xi),$$
$$F_1(x, t, z) = -i\left[jz^2 + izj\xi - \frac{1}{2}(\Omega - \xi_x)\right], \tag{55}$$

где

$$\xi(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & \psi(x, t) \\ \psi^*(x, t) & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{bmatrix} \psi(x, t)\,\psi^*(x, t) & 0 \\ 0 & -\psi^*(x, t)\,\psi(x, t) \end{bmatrix}.$$

Системе (51) эквивалентно [4] уравнение нулевой кривизны

$$\partial G_1/\partial t - \partial F_1/\partial x + G_1F_1 - F_1G_1 = 0. \tag{56}$$

В силу (56) справедливо представление [3]

$$w_1(x, t, z) = R(x, t, z)\, w_1(x, 0, z)\, R^{-1}(0, t, z), \tag{57}$$

где $w_1, R$ — решения уравнений

$$dw_1/dx = G_1(x, t, z)\, w_1, \quad w_1(0, t, z) = E_n, \tag{58}$$

$$dR/dt = F_1(x, t, z)\, R, \quad R(x, 0, z) = E_n. \tag{59}$$

Введем параметр $t$ в обозначения $a(l, z)$, $b(l, z)$, $c(l, z)$, $d(l, z)$, $\varphi(l, z)$, а также $\tilde{\varphi}(z)$ и $P_l(z)$, $Q_l(z)$. Тогда из (57) следует равенство

$$\tilde{\varphi}(t, z) = [r_{11}(t, z)\,\hat{\varphi}(l, t, z) + r_{12}(t, z)]\,[r_{21}(t, z)\,\hat{\varphi}(l, t, z) + r_{22}(t, z)]^{-1}, \tag{60}$$

где $r_{kj}(t, z)$ — блоки порядка $m$ матрицы-функции

$$[R^*(0, t, \bar{z})]^{-1} = R(0, t, z) = \{r_{kj}(t, z)\}_{k,j=1}^{2}, \tag{61}$$

$$\hat{\varphi}(l, t, z) = [a(l, 0, z)\,\hat{P}(t, z) + b(l, 0, z)\,\hat{Q}(t, z)]\,[c(l, 0, z)\,\hat{P}(t, z) + d(l, 0, z)\,\hat{Q}(t, z)]^{-1}, \tag{62}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(t, z) \\ \hat{Q}(t, z) \end{bmatrix} = R^*(l, t, \bar{z}) \begin{bmatrix} P_l(t, z) \\ Q_l(t, z) \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Из (60) выводится закон эволюции.

Т е о р е м а 2. *Пусть решение системы* (51)—(53) *существует и удовлетворяет* (54). *Тогда эволюция функции Вейля—Титчмарша системы* (58) *выражается по формуле*

$$\tilde{\varphi}(t, z) = [r_{11}(t, z)\,\varphi_0(z) + r_{12}(t, z)]\,[r_{21}(t, z)\,\varphi_0(z) + r_{22}(t, z)]^{-1}, \tag{64}$$

*где матрица-функция* $\varphi_0(z) = \tilde{\varphi}(0, z)$ *определяется по начальным данным* (52) *с помощью формул* (48), (55), (58), *коэффициенты* $r_{kj}(t, z)$ *определяются по граничным данным* (53) *с помощью формул* (55), (59), (61).

Доказательство. С учетом (54), (59) нетрудно показать, что при $M_1 = 3\max(1, M, M_0)$,

$$\operatorname{Re} z \leqslant -1, \quad \operatorname{Im} z \leqslant -M_1 \tag{65}$$

имеет место неравенство

$$R^*(l, t, z)\, jR(l, t, z) \geqslant j + \int_0^t R^*(l, s, z)\, R(l, s, z)\, ds. \tag{66}$$

В частности, отсюда вытекает

$$R^*(l, t, \bar{z})\, j\, R(l, t, \bar{z}) \leqslant j, \quad R(l, t, \bar{z})\, jR^*(l, t, \bar{z}) \leqslant j. \tag{67}$$

Согласно (63), (67) пара $\hat{P}$, $\hat{Q}$ удовлетворяет (9) в области (65). Поэтому в силу (48), (62) существует предел

$$\varphi_0(z) = \tilde{\varphi}(0, z) = \lim_{l\to\infty} \hat{\varphi}(l, t, z). \tag{68}$$

Из формул (60), (68), следует справедливость (64) в области (65). Учитывая аналитичность матриц-функций $R$, $\tilde{\varphi}$, $\varphi_0$, убеждаемся в том, что (64) верно во всей полуплоскости $\operatorname{Im} z < -M$.

Замечание 2. Из теорем 1, 2 вытекают единственность и способ восстановления решения системы (51)—(53), удовлетворяющего (54).

Предположим теперь, что $t_0 = \infty$. В силу (66) справедливо соотношение

$$r_{11}^*(t, z)\, r_{11}(t, z) \geqslant (1 + t)\, E_m. \tag{69}$$

Так как $\|\tilde{\varphi}(t, z)\| \leqslant 1$, то согласно [64] имеет место неравенство

$$[\varphi_0^*(z), E_m]\, R^*(0, t, z)\, jR(0, t, z)\, [\varphi_0^*(z), E_m]^* \leqslant 0. \tag{70}$$

Из (66), (70) в области (65) получаем

$$[\varphi_0^*(z), E_m] \int_0^t R^*(0, u, z)\, R(0, u, z)\, du\, [\varphi_0^*(z), E_m]^* \leqslant E_m. \tag{71}$$

В силу (54), (59) и (71) для каждого $z$ из области (65) ограничено выражение $\|R(0, t, z)\, [\varphi_0^*(z), E_m]^*\|$. Отсюда с учетом (69) вытекает

$$\varphi_0(z) = -\lim_{t\to\infty} r_{11}^{-1}(t, z)\, r_{12}(t, z). \tag{72}$$

Замечание 3. В случае $t_0 = \infty$ можно определять $\varphi_0(z)$ не по начальным, а по граничным данным. Таким образом, закон эволюции $\tilde{\varphi}(t, z)$ и решение $\psi(x, t)$ НУШ однозначно определяются граничными условиями (53).

Отметим, что теорема 2 и формула (72) являются аналогами соответствующих результатов, полученных в [3] для НУШ при $\varkappa = 1$.

Кроме того, рассматриваемая нами вспомогательная линейная задача (2) возникает не только в случае НУШ, $\varkappa = -1$, но и в ряде других нелинейных уравнений. Так, если случай уравнения гиперболического синус-Гордона сводится к задаче (1) [3], то уравнение синус-Гордона приводит к задаче (2). Как система (1), так и система (2) возникают и в МКДФ.


1. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов.— М. : Наука, 1986.— 528 с.
2. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной задачи // Докл. АН СССР.— 1985.— 281, № 1.— С. 16—19.
3. *Сахнович Л. А.* Нелинейные уравнения и обратные задачи на полуоси.— Киев, 1987.— 56 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.30).

4. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений. I // Функцион. анализ и его прил.— 1974.— **8**, № 3.— С. 43—53.
5. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура $J$-растягивающих матриц-функций // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1955.— **4**.— С. 125—236.
6. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 1.— С. 3—55.
7. *Сахнович Л. А.* Спектральный анализ вольтерровских операторов, заданных в пространстве вектор-функций $L_m^2\,[0,\ l]$ // Укр. мат. журн.— 1964.— **16**, № 2.— С. 259—268.
8. *Сахнович А. Л.* К спектральной теории канонических систем.— М., 1987.— 44 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4657 В87 Деп.
9. *Сахнович А. Л.* Асимптотика спектральных функций $S$-узла // Изв. вузов. Математика.— 1988.— № 9.— С. 62—72.
10. *Сахнович А. Л.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, № 4.— С. 69—129.
11. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны—Пика // Теория операторов в функцион. пространствах и ее прил.— Харьков: Харьк. ун-т, 1981.— С. 25—49.

Отд-ние гидроакустики Мор. гидрофиз. ин-та
АН УССР, Одесса

Получено 23.05.88